LIMITES DE ESBELTEZ PARA SOPORTES DE HORMIGON ARMADO

(SLENDERNESS BOUNDS FOR REINFORCED CONCRETE COLUMNS)

Olga Río Suárez, y Francisco Morán Cabré,
Drs. Ingenieros de Caminos
IETcc/CSIC

400-18

RESUMEN

Se presenta una propuesta racional de límites de esbeltez para soportes de hormigón armado, que tiene en cuenta los principales parámetros conocidos en el dimensionamiento: el esfuerzo axial, la excentricidad relativa y la relación de excentricidades en los extremos del soporte. En función de estos parámetros se define la esbeltez límite equivalente λ_e , que permite calibrar la importancia de los efectos de segundo orden.

SUMMARY

A rational proposal of slenderness bounds for r.c. columns is presented. This proposal takes into account the main parameters which are known in column design: the relative normal force, the relative eccentricity of the load and the ratio between the load eccentricities at column ends. The equivalent limit slenderness (ELS) λ_e is defined as a function of the above-mentioned parameters. This ELS allows the calibration of the importance of the second-order effects in the column design.

INTRODUCCION

Las diversas normas vigentes sobre hormigón armado indican que en la comprobación de elementos comprimidos (soportes) puede ser necesario tener en cuenta los efectos de segundo orden. Para ello definen los llamados límites de esbeltez, válidos para soportes aislados o pertenecientes a pórticos intraslaciones. El límite de esbeltez inferior separa el campo de los soportes cortos, para los cuales puede prescindirse de la consideración de los efectos de segundo orden, del de los soportes esbeltos, que requieran tener en cuenta dichos efectos. El límite de esbeltez superior delimita el campo de los soportes de esbeltez moderada, para los que los efectos de segundo orden pueden evaluarse por algún método simplificado, del de los de esbeltez elevada, que requieren un estudio más riguroso en teoría de segundo orden.

La mayoría de las normas establecen estos límites en función de la esbeltez mecánica λ_m del soporte biarti-

culado equivalente. Por ejemplo, la Instrucción española EH-82 adopta los siguientes valores:

límite inferior $\lambda_m = 35$;

límite superior $\lambda_m = 100$.

Esta definición del límite inferior obliga a calcular como esbeltos un gran número de soportes en los que los efectos de segundo orden carecen de importancia. Por ello parece conveniente encontrar una definición racional del límite de esbeltez inferior, que haga intervenir los principales parámetros que determinan la importancia real de los efectos de segundo orden.

Medida de los efectos de segundo orden

Ante todo es necesario establecer un criterio para medir la importancia de los efectos de segundo orden. Como magnitud idónea para ello se elige el error referido

a axiles, que expresa la sobreestimación de la capacidad portante de un soporte esbelto cuando se calcula como corto:

$$\epsilon_r = \frac{\nu^I - \nu^{II}}{\nu^I}$$

siendo:

ν^I = esfuerzo axil que resiste el soporte en teoría de primer orden (cálculo de sección o soporte corto);

ν^{II} = esfuerzo axil que resiste el soporte, con la misma excentricidad que ν^I , en teoría de segundo orden (soporte esbelto).

El error referido a axiles ϵ_r es más difícil de calcular que el error referido a momentos ϵ_m adoptado en otros estudios de límites de esbeltez [2,3], pero parece más representativo [4,5]. Las discrepancias entre ambos errores son importantes [2,4].

Parámetros considerados

En segundo lugar es preciso elegir, entre los parámetros conocidos en el dimensionamiento de un soporte, aquellos que tengan mayor influencia en el error ϵ_r . Estos parámetros son los siguientes:

- forma de la sección;
- distribución de la armadura;
- esfuerzo axil reducido: $\nu = N_d / (f_{cd} \cdot b \cdot h)$;
- excentricidad de primer orden relativa $\eta = e_1 / h$;
- relación de excentricidades en los extremos del soporte $\alpha = e_1 / e_2$;
- esbeltez geométrica del soporte: $\lambda = l_0 / h$.

Las formas de la sección más frecuentes en un soporte son la rectangular, que para flexión diagonal se transforma en rombo, y la circular. Un estudio comparativo sobre estas formas de sección ha demostrado que este parámetro no tiene gran influencia. Por ello se considera sólo la sección rectangular.

La distribución de armaduras es desconocida a priori en el dimensionamiento, porque depende de la cuantía resultante. Un estudio comparativo sobre varias distribuciones de armado simétricas ha demostrado que los mayores errores se presentan para armaduras iguales en las cuatro caras de la sección. Sin embargo, y dado que los resultados no difieren demasiado si se consideran armaduras iguales en dos caras opuestas, se ha utilizado esta última por ser más sencilla de calcular.

Por lo que respecta a los otros parámetros ν , η , α y λ , se ha realizado un estudio sistemático de su influencia en el error ϵ_r , que se describe en el apartado siguiente.

Estudio paramétrico de los efectos de segundo orden

Para evaluar la influencia de los parámetros citados en la importancia de los efectos de segundo orden se ha estudiado el siguiente modelo:

GEOMETRIA: Soporte biarticulado de longitud l_0 igual a la longitud de pandeo del soporte considerado y sección rectangular con armaduras iguales $A_s/2$ en dos caras opuestas. La sección y sus armaduras son constantes a lo largo de la altura del soporte.

MATERIALES: Diagrama parábola-rectángulo para el hormigón sin considerar fluencia. Diagrama bilineal para el acero (dureza natural) con límite elástico $f_{yd} = 4200/1,1$ kp/cm² y $E_s = 2.100.000$ kp/cm².

CARGAS: Cargas axiles instantáneas N actuando en ambos extremos del soporte con iguales o distintas excentricidades de primer orden e_1 , e_2 .

CUANTIAS MAXIMA Y MINIMA: Se consideran las siguientes cuantías mecánicas extremas:

$$\omega_{\min} = A_{s,\min} / (f_{cd} \cdot b \cdot h) = 0,1$$

$$\omega_{\max} = A_{s,\max} / (f_{cd} \cdot b \cdot h) = 1,4$$

RELACION DE EXCENTRICIDADES α : Se estudian las tres relaciones de excentricidades $\alpha = -1, 0$ y 1 .

EXCENTRICIDADES RELATIVAS η : Se consideran los diez valores siguientes: $\eta = 0,1; 0,2; \dots; 1,0$.

AXILES REDUCIDOS ν : Se consideran todos los comprendidos entre $\nu_{\inf}$ (axil inferior para el que $\omega = \omega_{\min}$) y el $\nu_{\sup}$ (para el que $\omega = \omega_{\max}$, siendo en todo caso $\nu_{\sup} \geq 1$) con intervalos de 0,02.

ERROR DE AXILES ϵ_r : Se toma constante e igual a 0,1 (error del 10%) para el límite de esbeltez inferior.

El procedimiento seguido es el siguiente:

- a) Conocido el axil ν^I del soporte corto y su excentricidad η se dimensiona como soporte corto (cálculo de sección). Se obtiene la cuantía ω , que debe cumplir $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$. Si no es así, se elige otra pareja ν^I , η .
- b) El axil ν^{II} del soporte esbelto, para un error en axiles del 10%, valdrá $\nu^{II} = \nu^I / 1,1$.

c) Se calcula cuál es la esbeltez geométrica λ de un soporte esbelto armado con la cuantía ω , tal que su axil último con la excentricidad η sea precisamente ν . Este cálculo se hace por tanteos, utilizando el método general (método de Engesser-Vianello o de las diferencias finitas [5]). En otros estudios de límites de esbeltez [2,4] se han utilizado métodos aproximados (Método de la Columna Modelo); pero entonces el error propio de estos métodos (del orden del 6%) puede falsear las conclusiones del estudio.

La esbeltez λ_e así calculada se denomina esbeltez equivalente; y para ella el error de axiles es constante e igual al 10%.

Los resultados del estudio paramétrico (véanse figs. 1 a 4) muestran que la esbeltez equivalente depende en efecto de los parámetros restantes ν, η, α .

Influencia de la excentricidad η .

Fig. 1

Fig. 2

Influencia del recubrimiento δ .

Fig. 3

Influencia de la relación de excentricidades α .

Fig. 4

Límite de esbeltez inferior

En virtud de la definición de esbeltez equivalente λ_e , resulta la siguiente definición del límite de esbeltez inferior:

$$\lambda \leq \lambda_e = f(\nu, \eta, \alpha)$$

o sea, un soporte podrá calcularse como corto siempre que su esbeltez geométrica λ no supere la esbeltez equivalente λ_e , función de los parámetros ν , η y α , con un error acotado al valor considerado admisible (10%).

Para deducir una expresión analítica para λ_e se observan las formas de las curvas de la fig. 4, pudiéndose concluir lo siguiente:

- las curvas $\eta = \eta_i$ de las familias $\alpha = 0$ y $\alpha = -1$ resultan, aproximadamente, de efectuar una traslación horizontal de la curva $\eta = \eta_i$ de la familia $\alpha = 1$.
- Las curvas $\eta = \eta_i$ de una familia $\alpha = 1$ resultan, aproximadamente, de efectuar una afinidad horizontal de la curva $\eta = 0,2$ de la misma familia $\alpha = 1$.

Sobre la base de estas conclusiones se ajusta una fórmula aproximada de la forma:

$$\lambda_e = (K_1 + K_2\nu - K_3\alpha) (K_4 + K_5\eta),$$

resultando los valores numéricos de los coeficientes K_i :

$$K_1 = 12,4; K_2 = 7; K_3 = 10; K_4 = 1; K_5 = 1,1.$$

Los errores resultantes de esta aproximación pueden verse en la tabla I.

Una mejor solución se obtiene mediante el nomograma de la fig. 5. Este nomograma representa la función:

$$\lambda_e = g(\nu, \alpha) \cdot (1 + 1,1\eta)$$

y en él las curvas $g(\nu, \alpha)$ de la parte izquierda se han obtenido gráficamente como envolventes de las nubes de puntos representativos de soportes reales estudiados numéricamente mediante el proceso indicado en el apartado anterior.

Tabla I

α	η	ν	ϵ_i	σ
1	0,1—1,0	$\nu_{inf} - \nu_{sup}$	8,99 14,06 4,18	1,35 2,25 1,45

Fig. 5

Los errores resultantes de la aplicación del nomograma pueden verse en la tabla II.

Las ventajas del nomograma son las siguientes:

- facilita el valor de λ_e por lectura directa sin cálculos auxiliares;
- permite una mejor precisión que la fórmula aproximada;
- sobre el nomograma (parte derecha) se ha representado otra familia de curvas (curvas α'). Esta familia corresponde a situaciones en las que la cuantía resultante es la mínima, ω_{min} . Por consiguiente para $\lambda \leq \lambda_e$ no es preciso efectuar el dimensionamiento del soporte corto (cálculo de sección), bastando armarlo con $\omega_{min} = 0,1$.

Tabla II

α	η	ν	ϵ_p	σ
1	0,1—1,0	$\nu_{inf} - \nu_{sup}$	9,39 9,27 9,97	1,05 1,23 1,39

Método aproximado y límite de esbeltez superior

Si la esbeltez geométrica λ de un soporte supera a la esbeltez equivalente es preciso tener en cuenta en el dimensionamiento los efectos de segundo orden. Para esbelteces moderadas, es decir, hasta el límite de esbeltez superior, el cálculo del soporte esbelto podrá hacerse estimando los efectos de segundo orden mediante algún método aproximado, mientras que para esbelteces elevadas será preciso recurrir a un cálculo riguroso en teoría de segundo orden.

El límite de esbeltez superior dependerá por tanto de cuál sea el método aproximado que se utilice y del valor máximo que se admita para el error ϵ_p .

Un estudio sistemático de los errores, referido a tres normas (Código Modelo CM-78 del CEB, Instrucción Española EH-82, Eurocódigo-2) y a sus correspondientes métodos aproximados y límites superiores ha demostrado que los errores cometidos, aunque quedan del lado de la seguridad, son importantes y se comportan de forma irregular.

Por ello ha parecido procedente proponer un nuevo método aproximado, en el que los efectos de segundo or-

den se tengan en cuenta a través del parámetro esbeltez equivalente λ_e , que como se ha visto incorpora la influencia de los parámetros axil ν , excentricidad η y relación de excentricidades α en esos efectos de segundo orden. Más precisamente, a través de la diferencia entre esa esbeltez equivalente λ_e y la esbeltez geométrica del soporte λ .

El método propuesto consiste en reducir el dimensionamiento del soporte esbelto al de un soporte corto (cálculo de sección), cuyos esfuerzos son los de aquél multiplicados por un coeficiente γ_R que viene dado por la fórmula:

$$\gamma_R = 1,1 + \frac{(\lambda - \lambda_e)^2}{200} \text{ para } \lambda \geq \lambda_e$$

Para esbelteces geométricas menores que la esbeltez equivalente, $\lambda < \lambda_e$, o sea, por debajo del límite inferior, no es preciso aplicar el coeficiente γ_R , si bien, para quedar siempre del lado de la seguridad, podría aplicarse el coeficiente $\gamma_R = 1,1$.

Si se observa la variación del error ϵ_r cuando se aplica este método aproximado, (fig. 6) puede verse que estos errores varían de una forma gradual y uniforme.

La observación de la figura 6 mencionada sugiere una propuesta de límite de esbeltez superior coherente con el límite de esbeltez inferior. Tomando como valor del error ϵ_r admisible el 20% del lado de la seguridad, resulta:

$$\lambda_{e,s} = \lambda_e + 10$$

Fig. 6

En la figura 7 se representa un nomograma para la obtención de la esbeltez límite superior $\lambda_{e,s}$. En la parte derecha de dicho nomograma se han trazado al igual que en el de la fig. 5, las curvas α' , que permiten obtener la esbeltez $\lambda'_{e,s}$ por debajo de la cual no es preciso dimensionar el soporte esbelto, ya que la cuantía resultante para el mismo sería inferior a la mínima $\omega_{min.} = 0,1$.

Ejemplos

Dimensionar un soporte biarticulado con $\lambda = l/h = 15$ y los siguientes datos adimensionales:

	a	b	c	d	e
ν	-0,40	-0,40	-0,30	-0,30	-0,20
η	0,30	0,50	0,30	0,50	0,20
α	-0,50	-0,50	0,50	0,50	1,00

a) En este caso se entra en el nomograma de la fig. 5 y se obtiene una esbeltez límite equivalente:

$$\lambda_e = 24,4.$$

Como $\lambda < \lambda_e$ el soporte se puede dimensionar como soporte corto. Además como el punto P_1 queda a la izquierda de la curva $\alpha' = -0,50$, la cuantía será menor que la mínima y se adopta como valor de la cuantía:

$$\omega = \omega_{min.} = 0,1.$$

b) En este caso se obtiene:

$$\lambda_e = 28,7$$

y se puede dimensionar el soporte como soporte corto. Como el punto P_2 queda a la derecha de la curva $\alpha' = -0,5$ es necesario calcular la cuantía ω por un dimensionamiento de sección. El valor resultante es:

$$\omega = 0,242$$

c) En este caso se debe entrar en los nomogramas de las figs. 5 y 7 obteniéndose:

$$\begin{aligned} \lambda_e &= 12,2 \\ \lambda_{e,s} &= 22,2 \end{aligned}$$

Se tiene entonces: $\lambda_e < \lambda < \lambda_{e,s}$.

el soporte se dimensiona entonces como soporte esbelto, pero se puede utilizar para ello el método del coe-

Fig. 7

ficiente γ_R . Como el punto P_3 queda a la izquierda de la curva $\alpha' = 0,5$ en la fig. 7, la cuantía será menor que la mínima, por lo que se adopta la mínima:

$$\omega = \omega_{\min.} = 0,1.$$

d) En este caso se obtiene:

$$\begin{aligned}\lambda_e &= 14,2 \\ \lambda_{e,s} &= 24,2.\end{aligned}$$

Como $\lambda_e < \lambda < \lambda_{e,s}$, entonces el soporte se dimensiona utilizando el método del coeficiente γ_R . El punto P_4 queda a la derecha de la curva $\alpha' = 0,5$; entonces se debe proceder al dimensionamiento con dicho método aproximado.

$$\gamma_R = 1,1 + ((15-14,2)^2/200) = 1,103;$$

$$\nu^* = 1,103 \times 0,3 = 0,331;$$

$$\eta = 0,5.$$

Con los valores de ν^* y η se procede al dimensionamiento de sección obteniéndose:

$$\omega = 0,145$$

e) En este caso se obtiene:

$\lambda_{e,s} = 14,6$, como $\lambda > \lambda_{e,s}$ no se puede emplear el método aproximado del coeficiente γ_R . Para este caso se debe utilizar necesariamente el método general.

BIBLIOGRAFIA

1. Instrucción EH-82 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado. Comisión Permanente del Hormigón. MOPU, 1982.
2. MENEGOTTO, M. "Summary considerations about the problem of slenderness bounds for columns". C.E.B. Permanent Commission III. London, 1980.
3. CAUVIN, A.; MACCHI, G. "Définition modifiée d'éclatement des colonnes dans les ossatures en béton armé a noeuds déplaçables". Béton Armé. Ingénieurs et Architectes Suisses n.º 21. October, 1983.
4. FOURE, B. "Contribution to item 5-Slenderness Bounds". C.E.B. Commission III. "Buckling and Instability". Paris meeting. November 4/5 1980.
5. RIO, O. "El problema de los límites de esbeltez en el dimensionamiento en teoría de segundo orden de soportes esbeltos de hormigón armado". Tesis Doctoral presentada en la E.T.S.I.C.C.P. Madrid, junio de 1986.