

# COMPROBACION A PUNZONAMIENTO SEGUN LA INSTRUCCION ESPAÑOLA EH-80

P. Jiménez Montoya, Dr. Ingeniero de Construcción  
Miembro del Comité Euro-Internacional del Hormigón.

400-11

## 1. Consideraciones generales

1.º El problema del punzonamiento de placas no ha sido tan estudiado como el de flexión debido, probablemente, a la mayor dificultad que presenta la ejecución de los ensayos, cuya dispersión suele ser muy elevada. Por esta causa, los métodos prácticos de comprobación admitidos por las distintas normas difieren notablemente aunque tengan análogos fundamentos.

Si se comparan los resultados obtenidos en la comprobación a punzonamiento adoptando el método de la Instrucción española EH-80, con los correspondientes al Código Modelo CEB-FIP-78, las diferencias pueden ser notables. Y si la comparación se efectúa entre los resultados obtenidos mediante la Instrucción EH-80 y la antigua EH-73, las diferencias pueden resultar aun mayores.

Los fundamentos de los métodos de comprobación a punzonamiento correspondientes a la Instrucción EH-80, al Código Modelo CEB-FIP, y al Código americano ACI 318-77, son análogos; los dos Códigos mencionados proporcionan, también, fórmulas prácticas basadas en la experimentación. Admiten que la sección crítica que debe comprobarse está constituida por secciones normales a la placa, situadas alrededor del soporte, y a una distancia igual a la mitad del canto útil de la misma, contada a partir de los bordes del soporte. Y se supone que la distribución de las tensiones tangenciales, en los distintos puntos de la sección crítica, sigue una ley plana. Hay que comprobar que la máxima tensión tangencial se conserva inferior a la resistencia a punzonamiento admisible para la placa.

Pero el problema presenta una doble dificultad: primero cómo cuantificar la máxima tensión tangencial, sobre todo, en las secciones críticas correspondientes a los soportes del contorno de la placa; y segundo, lo difícil que resulta fijar el valor de la resistencia a esfuerzo cortante por punzonamiento al depender, además de la resistencia del hormigón, de otros muchos factores como son la cuantía de la armadura de flexión de la placa, el espesor de la misma, las dimensiones y situación del soporte, etc. Los valores admitidos para esta resistencia por la Instrucción española EH-80 pueden llegar al doble de los preconizados por el Código Modelo CEB-FIP.

Si se designa por  $N_d$  la reacción del soporte a efectos de punzonamiento y por  $A_c$  a la sección crítica, para la determinación de la máxima tensión tangencial habrá que sumar, a la tensión media  $N_d/A_c$ , la correspondiente a la excentricidad de  $N_d$  referida al centro de gravedad de la sección crítica. Ahora bien, hay que tener en cuenta que debido al alabeo de la placa, el momento transmitido a cada soporte lo recibe, una parte  $\alpha \cdot M_d$  por torsión, y el resto  $(1 - \alpha) \cdot M_d$  por flexión. Sólo produce tensiones tangenciales en la sección crítica la fracción  $\alpha \cdot M_d$ , que es la que interesa para este estudio; el resto,  $(1 - \alpha) \cdot M_d$ , produce tensiones normales en la mencionada sección.

Fácilmente se comprende la dificultad que entraña este método teórico para la comprobación a punzonamiento, debido a la incertidumbre existente en la evaluación previa de los datos que intervienen en el problema: momentos flectores, valor de  $\alpha$ , e incluso dimensiones de la sección crítica en muchos casos.

Con el presente trabajo se pretende una doble finalidad: en primer lugar, desarrollar el método teórico, esbozado anteriormente, para la comprobación de placas a punzonamiento, y establecer unas tablas que faciliten el

Para la redacción de este trabajo han sido muy útiles los estudios previos de J. Calavera y F. Morán (referencias 11 y 13, respectivamente).

problema práctico de acuerdo con la Instrucción española EH-80. Y en segundo lugar, proponer unas limitaciones para mejorar la seguridad en algunos casos límites cuyos resultados, obtenidos mediante el método general, pueden resultar poco fiables debido a las incertidumbres indicadas anteriormente.

2.º Según la Instrucción española EH-80, se comprobará a punzonamiento la sección constituida por el conjunto de secciones verticales resistentes situadas alrededor del soporte y a una distancia igual a la mitad del canto útil de la placa, contada a partir del borde del capitel, o del soporte si no existe capitel.

Como ejes de referencia,  $x$  e  $y$ , se adoptan los que pasan por el centro de gravedad de la sección crítica y son paralelos a los ejes de la sección rectangular del soporte.

De acuerdo con lo indicado anteriormente la tensión tangencial, en el punto  $(x,y)$  de la sección crítica, puede ponerse en la forma:

$$\tau = \frac{N_d}{A_c} + \frac{\alpha_x \cdot M_x}{J_x} \cdot y + \frac{\alpha_y \cdot M_y}{J_y} \cdot x$$

con los siguientes significados (fig. 1):

$\tau$  = Tensión tangencial media en el punto  $(x,y)$ .

$N_d$  = Reacción del soporte menos la parte de carga en la zona de punzonamiento; en valor de cálculo.

$A_c$  = Área resistente de la sección crítica a comprobar;  $A_c = u \cdot d$ , siendo  $u$  el perímetro crítico y  $d$  el canto útil medio.

$M_x$  = Diferencia de momentos flectores de cálculo a ambos lados de la sección  $x-x$ ; si es vano final, momento en la sección  $x-x$ .

$M_y$  = Igual significado, en la sección  $y-y$ .

$J$  = Momento de inercia combinado de la sección  $A_c$  respecto a los ejes de referencia;  $J_x$  respecto a  $x-x$ , y  $J_y$  respecto a  $y-y$ .

$\alpha$  = Fracción del momento que produce tensiones tangenciales en la sección crítica.

Para la comprobación a punzonamiento hay que determinar el valor máximo de  $\tau$ . La placa se encuentra en buenas condiciones resistentes cuando la máxima tensión tangencial en la sección crítica,  $\tau_{max}$ , no supera a la resistencia virtual del hormigón a punzonamiento,  $f_{pd} = 2 \cdot f_{cv} = \sqrt{f_{cd}}$ , en donde todas las resistencias se expresan en  $kp/cm^2$  (1). En general, es conveniente dimensionar las placas de forma que se cumpla la condición anterior, aumentando, si es necesario, las dimensiones de los soportes o el espesor de la placa, disponiendo ábacos o capiteles, e incluso mejorando la calidad del hormigón. De no ser posible será necesario disponer una armadura de punzonamiento.

3.º Para el cálculo práctico y las tabulaciones que se proponen es conveniente expresar el valor de la tensión tangencial, en el punto  $(x,y)$  de la sección crítica, en la forma:

$$\tau = \frac{N_d}{A_c} \left( 1 + k_x \cdot \frac{e_a}{a} + k_y \cdot \frac{e_b}{b} \right)$$

con los siguientes significados:

$$e_a = \frac{M_x}{N_d},$$

$$k_x = \frac{A_c}{J_x} \cdot y \cdot \alpha_x \cdot a$$

$$e_b = \frac{M_y}{N_d},$$

$$k_y = \frac{A_c}{J_y} \cdot x \cdot \alpha_y \cdot b$$

(1) El Código Modelo es mucho más conservador, pues admite para la resistencia a punzonamiento el valor

$f_{pd} = 0,12 \cdot \beta \cdot (1 + 50 \cdot \rho) \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ , en  $kp/cm^2$ , con  $\beta = 1,6 - d \leq 1$  ( $d$ , en metros), y  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \geq 0,008$ .

en donde todas las magnitudes se refieren a los ejes adoptados ya mencionados. Cuando los momentos estén referidos a los ejes de la sección del pilar los designaremos por  $M_a$  y  $M_b$ , respectivamente.

El parámetro  $\alpha$  es de difícil evaluación. Tanto el Código ACI 318 como la Instrucción española EH-80 adoptan los valores (fig. 1):

$$\alpha_x = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{a}{b}}} \approx \frac{a + b}{a + 4b}$$

$$\alpha_y = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{b}{a}}} \approx \frac{a + b}{4a + b}$$

en donde  $a$  y  $b$  son las dimensiones del perímetro crítico. Algunos autores toman para  $\alpha$  un valor constante,  $\alpha_x = \alpha_y = 0,50$ .

a) En el caso de soportes interiores, los ejes de la sección crítica coinciden con los de la sección del soporte y, por tanto,  $M_x = M_a$ , y  $M_y = M_b$  (fig. 1-a). Por otra parte, la sección crítica tiene por valor:

$$A_c = u \cdot d = 2(a + b) \cdot d$$

en donde  $u$  es el perímetro crítico y  $d$  el canto útil medio de la placa (media aritmética de los cantos útiles en las dos direcciones ortogonales).

b) En los soportes de borde, uno de los ejes de la sección crítica coincide con uno de la sección del soporte, pero el otro no (fig. 1-b). La distancia entre los dos ejes no coincidentes es,

$$e_o = \frac{d}{4} \cdot \left(1 + \frac{2ab}{A_c}\right)$$

como fácilmente se comprueba. Las excentricidades son, en este caso:

$$e_a = \frac{M_a}{N_d} - e_o \quad ; \quad e_b = \frac{M_b}{N_d}$$

en donde los momentos  $M_a$  y  $M_b$  se refieren a los ejes de la sección del soporte. La sección crítica en los soportes de borde es:

$$A_c = u \cdot d = (2a + b) \cdot d$$

c) En los soportes de esquina, las distancias entre los ejes  $x$  e  $y$ , a los correspondientes a la sección del soporte, son iguales, con el valor común:

$$e_{ox} = e_{oy} = e_o = \frac{d}{4} \cdot \left(1 + \frac{2ab}{A_c}\right)$$

como se demuestra fácilmente (fig. 1-c). Las excentricidades son, en este caso:

$$e_a = \frac{M_a}{N_d} - e_o \quad ; \quad e_b = \frac{M_b}{N_d} - e_o$$

y el valor del área crítica de punzonamiento, en soportes de esquina, es:

$$A_c = u \cdot d = (a + b) \cdot d$$

## 2. Determinación de los parámetros $k$

Los valores de  $k$  que corresponden a la máxima tensión tangencial se designan por  $k_a$  y  $k_b$ , y pueden determinarse, directamente, sin necesidad de calcular los momentos de inercia. Para ello se establecen las ecuaciones de equilibrio entre las tensiones tangenciales y los momentos que las originan, admitiendo, como ya ha sido indicado, una distribución plana de tensiones. En cuanto sigue, se consideran todos los momentos de las fuerzas exteriores en valor absoluto.

## 1.º Soportes interiores

En el caso de soportes interiores las tensiones tangenciales originadas por el momento  $\alpha_x \cdot M_x$  son las indicadas en la figura 2. El valor más desfavorable corresponde al lado  $b$  indicado en el dibujo ya que las tensiones correspondientes son del mismo signo que las originadas por  $N_d$  y, por tanto, se suman. Estableciendo la ecuación de equilibrio de momentos, respecto al eje  $x$ , resulta:

$$2(b \cdot \tau_1 d \cdot \frac{a}{2}) + 4(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \tau_1 d \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}) + 4(\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \tau_1 d \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{2}) = \alpha_x \cdot M_x$$

de donde se deduce el valor de  $\tau_1$ :

$$\tau_1 = \frac{3 \cdot \alpha_x \cdot M_x}{d(3ab + a^2 + d^2)} = \frac{6a(a + b)^2}{(3ab + a^2 + d^2)(a + 4b)} \cdot \frac{e_a}{a} \cdot \frac{N_d}{A_c} = k_a \cdot \frac{e_a}{a} \cdot \frac{N_d}{A_c}$$

Los valores de  $k_a$  y  $k_b$  son, en este caso:

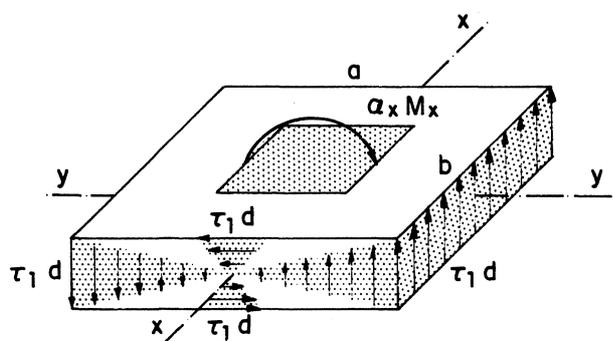


Fig.—2

$$k_a = \frac{6a(a + b)^2}{(3ab + a^2 + d^2)(a + 4b)} \approx \frac{6(a + b)^2}{(a + 3b)(a + 4b)}$$

$$k_b = \frac{6b(a + b)^2}{(3ab + b^2 + d^2)(4a + b)} \approx \frac{6(a + b)^2}{(3a + b)(4a + b)}$$

Las expresiones de  $k$  han sido simplificadas suprimiendo el término  $d^2$  que es muy pequeño respecto a los otros sumandos, sobre todo, en las placas normalmente diseñadas cuyos espesores no superan a la menor dimensión del soporte. De esta forma, dichas expresiones dependen sólo de  $b/a$ , lo que permite establecer una tabla de simple entrada para la determinación de los mencionados parámetros.

La simplificación propuesta equivale a no considerar, en las ecuaciones de equilibrio, las tensiones tangenciales horizontales, cuyos brazos de palanca son mucho menores que los correspondientes a las tensiones verticales. Por último, conviene resaltar que el error que se comete al determinar  $\tau_{max}$ , empleando estos valores aproximados de  $k$ , es muy pequeño y siempre del lado de la seguridad.

## 2.º Soportes de borde

Al no existir simetría, la determinación de  $k_a$  y  $k_b$  hay que hacerla independientemente; para  $k_a$  es necesario distinguir dos casos según que  $M_a/N_d$  sea mayor o menor que  $e_o$ , siendo  $M_a$  el momento de las fuerzas exteriores referido al eje del soporte, en valor absoluto.

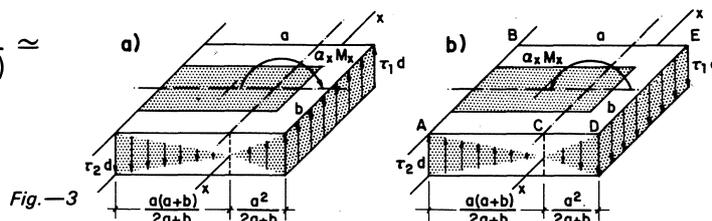
a) En el caso de que sea  $M_a/N_d \geq e_o$ , que es el más frecuente, el valor más desfavorable de la tensión tangencial es  $\tau_1$  (fig. 3-a), que corresponde al lado  $b$  de la sección crítica ya que tiene el mismo signo que  $N_d/A_c$  y, por tanto, se suman.

Estableciendo la ecuación de equilibrio entre  $\alpha_x \cdot M_x$  y los momentos de las tensiones tangenciales que origina, resulta (1):

$$\tau_1 = \frac{6a \cdot \alpha_x \cdot M_x}{d[2a^2(a + 2b) + d^2(2a + b)]} = \frac{6a^2(2a + b)(a + b)}{[2a^2(a + 2b) + d^2(2a + b)](a + 4b)} \cdot \frac{e_a}{a} \cdot \frac{N_d}{A_c}$$

(1) Con objeto de simplificar la figura, no han sido dibujadas las tensiones tangenciales horizontales.

$$k_a = \frac{6a^2(2a+b)(a+b)}{[2a^2(a+2b)+d^2(2a+b)](a+4b)} \approx \frac{3(2a+b)(a+b)}{(a+2b)(a+4b)}$$



b) En el caso de que sea  $M_a/N_d < e_o$ , caso poco frecuente, el valor más desfavorable de la tensión tangencial es  $\tau_2$  (fig. 3-b), que corresponde a los puntos A y B de la sección crítica. La determinación de  $\tau_2$  puede hacerse, fácilmente, de la relación:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{AC}{CD} = \frac{a+b}{a} \quad ; \quad \tau_2 = \tau_1 \frac{a+b}{a} \quad ; \quad k'_a = k_a \cdot \frac{a+b}{a} \approx \frac{3(2a+b)(a+b)^2}{a(a+2b)(a+4b)}$$

Ahora bien, en este caso, el valor de  $k'_a$  varía muy poco para los distintos valores de  $b/a$  por lo que no se tabula, adoptando el valor constante  $k'_a = 2,50$ .

c) La determinación de  $k_b$  es más sencilla por existir simetría respecto al eje  $y$ . De la ecuación de equilibrio de momentos, respecto a dicho eje, se deduce fácilmente:

$$\tau_1 = \frac{6 \cdot \alpha_y \cdot M_y}{d(6ab + b^2 + d^2)} = \frac{6b(2a+b)(a+b)}{(6ab + b^2 + d^2)(4a+b)} \cdot \frac{e_b}{b} \cdot \frac{N_d}{A_c} = k_b \cdot \frac{e_b}{b} \cdot \frac{N_d}{A_c}$$

$$k_b = \frac{6b(a+b)(2a+b)}{(6ab + b^2 + d^2)(4a+b)} \approx \frac{6(a+b)(2a+b)}{(6a+b)(4a+b)}$$

El error que se comete al determinar  $\tau_{max}$ , empleando estos valores de  $k$ , es completamente aceptable y siempre del lado de la seguridad. Un estudio de los límites de error no tiene significación alguna teniendo en cuenta la gran imprecisión de los datos que intervienen en el problema, así como de las hipótesis admitidas para el método teórico de cálculo.

### 3.º Soportes de esquina

Sólo hay que determinar uno de los valores  $k_a$  ó  $k_b$ , pues el otro se deduce por permutación circular. Hay que distinguir dos casos, según que la excentricidad de las fuerzas exteriores sea mayor o menor que  $e_o$ .

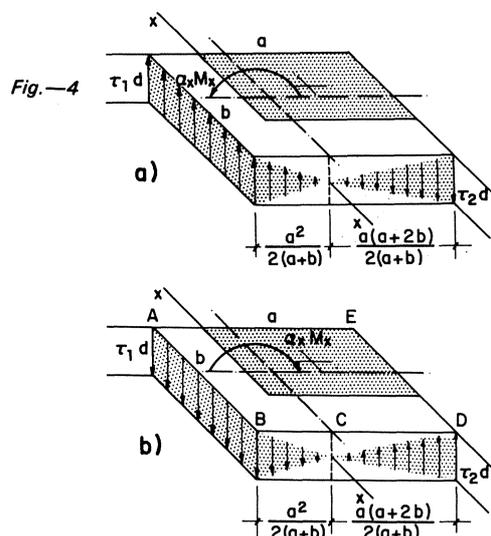
a) En el caso más frecuente de que sea  $M_a/N_d \geq e_o$ , el valor más desfavorable de la tensión tangencial es  $\tau_1$  que corresponde al lado  $b$  (fig. 4-a) ya que tiene el mismo signo que  $N_d/A_c$  y, por tanto, se suman.

Estableciendo la ecuación de equilibrio de momentos entre  $\alpha_x \cdot M_x$  y los correspondientes a las tensiones que origina, resulta (1):

$$\tau_1 = \frac{6a \cdot \alpha_x \cdot M_x}{d[a^2(a+4b)+d^2(a+b)]} = \frac{6a^2 \cdot (a+b)^2}{[a^2(a+4b)+d^2(a+b)](a+4b)} \cdot \frac{e_a}{a} \cdot \frac{N_d}{A_c}$$

$$k_a = \frac{6a^2(a+b)^2}{[a^2(a+4b)+d^2(a+b)](a+4b)} \approx 6 \cdot \left(\frac{a+b}{a+4b}\right)^2$$

$$k_b = \frac{6b^2(a+b)^2}{[b^2(4a+b)+d^2(a+b)](4a+b)} \approx 6 \cdot \left(\frac{a+b}{4a+b}\right)^2$$



(1) Con objeto de no complicar la figura, no se han dibujado las tensiones tangenciales horizontales.

b) En el caso poco frecuente de que sea  $M_a/N_d < e_o$ , el valor más desfavorable de la tensión tangencial es  $\tau_2$  (fig. 4-b), que corresponde al punto *D* de la sección crítica. La determinación de  $\tau_2$  se hace, fácilmente, en función de  $\tau_1$ :

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{CD}{BC} = \frac{a+2b}{a} \quad ; \quad \tau_2 = \tau_1 \cdot \frac{a+2b}{a} \quad ; \quad k'_a = k_a \cdot \frac{a+2b}{a} = \frac{6(a+b)^2 \cdot (a+2b)}{a(a+4b)^2}$$

Los valores de  $k'_a$  y  $k'_b$  varían muy poco con  $b/a$  por lo que no se tabulan; excepto para soportes cuadrados, los valores de  $k'_a$  son algo menores que los correspondientes a  $k'_b$  pero, con objeto de simplificar los problemas, se adopta el valor  $k'_a = k'_b = 2,90$ .

c) En el caso excepcional de que sean, simultáneamente,  $M_a/N_d < e_o$  y  $M_b/N_d < e_o$ , el valor más desfavorable de la tensión tangencial corresponde a uno de los puntos *A* ó *D* de la sección crítica (fig. 4-b). Por ello, será necesario efectuar una doble comprobación para determinar el mayor de los valores:

$$\frac{N_d}{A_c} - \tau_1 + \tau_2 \quad \text{y} \quad \frac{N_d}{A_c} + \tau_2 - \tau_1$$

o sea, la mayor de las dos tensiones:

$$\frac{N_d}{A_c} \left( 1 - k_a \frac{|e_a|}{a} + 2,90 \frac{|e_b|}{b} \right) \quad \text{y} \quad \frac{N_d}{A_c} \left( 1 + 2,90 \frac{|e_a|}{a} - k_b \frac{|e_b|}{b} \right)$$

en donde  $k_a$  y  $k_b$  tienen los valores determinados en el apartado a) anterior.

No obstante, se puede simplificar el problema haciendo  $k_a = k_b = 0$ , en favor de la seguridad, dado que las excentricidades son muy pequeñas en este caso. De esta forma la comprobación puede efectuarse con:

$$\begin{aligned} k_a = 2,90 \quad \text{y} \quad k_b = 0, & \quad \text{para} \quad \frac{|e_a|}{a} \geq \frac{|e_b|}{b} \\ k_a = 0 \quad \text{y} \quad k_b = 2,90, & \quad \text{para} \quad \frac{|e_a|}{a} < \frac{|e_b|}{b} \end{aligned}$$

Los errores que se cometen al determinar la máxima tensión tangencial empleando los valores aproximados de  $k$ , en los soportes de esquina, son, como en los casos anteriores, completamente aceptables.

Por último, es conveniente señalar que en el caso de soportes de borde o de esquina con excentricidades de las fuerzas exteriores menores que  $e_o$ , los valores obtenidos para  $k$  resultan bastante mayores que los que corresponden a los casos normales, lo que no está muy de acuerdo con los ensayos existentes. No obstante, se recomienda adoptar los valores calculados, que conducen a tensiones tangenciales del lado de la seguridad.

### 3. Limitaciones del método

La aplicación del método de comprobación a punzonamiento, desarrollado anteriormente, está sujeto a unas limitaciones respecto a las dimensiones relativas de la sección del soporte y al espesor de la placa; estas limitaciones varían de unas normas a otras.

1.º Según la Instrucción española EH-80 (comentarios al artículo 55.5), en el caso de soportes interiores de sección muy alargada ( $c_1 > c_2$ ), o soportes muy gruesos respecto al espesor de la placa, podrá considerarse como perímetro de la sección eficaz el indicado con trazo grueso en la figura 5.

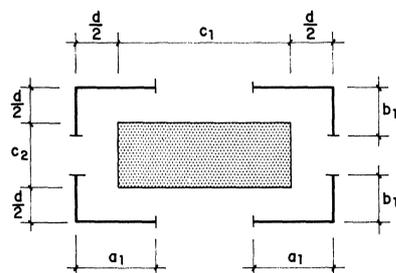


Fig.—5

$$2a_1 \leq \begin{cases} c_1 + d \\ 2c_2 + d \\ 7,6 \cdot d - 2b_1 \end{cases}$$

$$2b_1 \leq \begin{cases} c_2 + d \\ 3,8 \cdot d \end{cases}$$

De estas limitaciones se deduce que, como perímetro de la sección eficaz en soportes interiores, debe tomarse (1):

$$u = 2(a + b) \geq 15 \cdot d$$

$$\text{con } c_1 \geq 2 \cdot c_2$$

(1) Según el Código Modelo CEB-FIP,  $u \geq 11 \cdot d$ .

Para el resto del perímetro se considerará como resistencia a cortante,  $f_{cv}$ , en lugar de  $2 \cdot f_{cv}$ .

2.º Las principales normas no consideran la limitación del perímetro crítico en soportes alargados o gruesos situados en el contorno de la placa. Siguiendo análogos criterios a los indicados en el apartado anterior, para soportes interiores, se proponen las siguientes limitaciones:

**soportes de borde**

$$u = 2a + b \geq 10 \cdot d$$

$$0,5 \cdot c_2 \geq c_1 \geq 2 \cdot c_2$$

**soportes de esquina**

$$u = a + b \geq 6 \cdot d$$

$$c_1 \geq 2 \cdot c_2$$

3.º Dado que en el caso de soportes de borde o de esquina la determinación de los momentos flectores es más imprecisa, juntamente con la incertidumbre que existe en la determinación de  $\alpha$  y  $e_o$ , se ha creído conveniente establecer las siguientes limitaciones:

**soportes de borde**

$$k_a \cdot \frac{e_a}{a} \leq 0,2$$

**soportes de esquina**

$$k_a \cdot \frac{e_a}{a} \leq 0,3$$

$$k_b \cdot \frac{e_b}{b} \leq 0,3$$

## 4. Resumen y aplicación de las fórmulas simplificadas que se proponen

1.º En el caso de placas sin armadura de esfuerzo cortante, apoyadas sobre soportes de sección rectangular, la condición de punzonamiento es:

$$\tau_{\max.} = \frac{N_d}{A_c} \left( 1 + k_a \cdot \frac{|e_a|}{a} + k_b \cdot \frac{|e_b|}{b} \right) \leq f_{pd}$$

con los siguientes significados (fig. 6):

$N_d$  = Reacción del soporte menos la parte que carga en la zona de punzonamiento; valor de cálculo.

$A_c$  = Area resistente de la sección crítica a comprobar; igual al perímetro crítico por el canto útil medio.

$e_a, e_b$  = Excentricidades de  $N_d$  respecto a los ejes que pasan por el c.d.g. de  $A_c$  y son paralelos a los del soporte.

$k_a, k_b$  = Parámetros con los valores indicados en la tabla 1.

$f_{pd}$  = Resistencia virtual del hormigón a punzonamiento;  $f_{pd} = 2 \cdot f_{cv} = \sqrt{f_{cd}}$ , expresadas en  $\text{kp/cm}^2$ .

a) En los soportes interiores, el centro de gravedad de la sección crítica coincide con el correspondiente a la sección del pilar. Las excentricidades de  $N_d$  son, en este caso (fig. 6-a):

$$e_a = \frac{M_a}{N_d} \quad ; \quad e_b = \frac{M_b}{N_d}$$

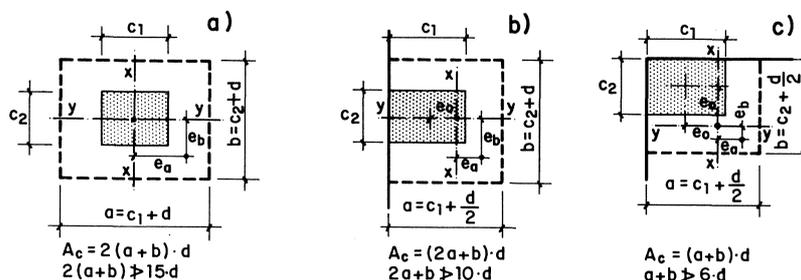


Fig.—6

en donde  $M_a$  y  $M_b$  son, respectivamente, las diferencias de los momentos flectores de cálculo a ambos lados de los ejes de la sección, en valor absoluto.

Cuando se utilice el método de cálculo basado en los pórticos virtuales, los momentos flectores que se consideran, tanto en este caso como en los siguientes, son los correspondientes a la banda de soportes.

b) En los soportes de borde, uno de los ejes de la sección crítica coincide con uno de la del soporte, pero los otros no (fig. 6-b). Las excentricidades de  $N_d$  son:

$$e_a = \frac{M_a}{N_d} - e_o, \quad e_b = \frac{M_b}{N_d}, \quad \text{con} \quad e_o = \frac{d}{4} \left( 1 + \frac{2ab}{A_c} \right)$$

en donde  $M_a$  es el momento flector de cálculo en la sección x-x, en valor absoluto;  $M_b$ , la diferencia de momentos flectores de cálculo a ambos lados de la sección y-y, siempre en valor absoluto; y  $e_o$  la distancia entre los ejes no coincidentes de las secciones críticas y del soporte.

En los soportes de borde debe tomarse  $k_a \cdot e_a/a \leq 0,20$ .

c) Por último, en los soportes de esquina, las distancias entre los ejes x e y de la sección crítica a los correspondientes de la sección del pilar, son iguales ( $e_{oa} = e_{ob} = e_o$ ). Las excentricidades de  $N_d$ , referidas a los ejes de la sección crítica, son (fig. 6-c):

$$e_a = \frac{M_a}{N_d} - e_o, \quad e_b = \frac{M_b}{N_d} - e_o, \quad \text{con} \quad e_o = \frac{d}{4} \left( 1 + \frac{2ab}{A_c} \right)$$

en donde  $M_a$  y  $M_b$  son, respectivamente, los momentos flectores de cálculo en las secciones x-x e y-y, en valor absoluto.

En los soportes de esquina deben cumplirse las limitaciones siguientes:

$$k_a \cdot \frac{e_a}{a} \leq 0,3 \quad \text{y} \quad k_b \cdot \frac{e_b}{b} \leq 0,3$$

**TABLA 1**  
Valores de k

TIPO DE SOPORTE	k	VALORES DE b/a																		
		0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
Interior	$k_a$	1,61	1,54	1,47	1,41	1,36	1,31	1,27	1,23	1,20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	$k_b$	0,93	0,96	1,00	1,03	1,07	1,10	1,13	1,17	1,20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
De borde (1)	$k_a$	1,67	1,58	1,51	1,44	1,38	1,33	1,28	1,24	1,20	1,13	1,07	1,02	0,98	0,94	0,90	0,87	0,85	0,82	0,80
	$k_b$	0,82	0,85	0,87	0,90	0,93	0,95	0,98	1,00	1,03	1,08	1,13	1,18	1,23	1,27	1,32	1,37	1,41	1,46	1,50
De esquina (2)	$k_a$	1,33	1,26	1,20	1,15	1,10	1,06	1,02	0,99	0,96	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	$k_b$	0,73	0,76	0,78	0,81	0,84	0,87	0,90	0,93	0,96	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

(1) El lado  $b$  es el paralelo al borde. Si  $e_a$  resulta negativa se tomará  $k_a = 2,50$  cualquiera que sea  $b/a$ .  
 (2) Para  $e_a$  ó  $e_b$  negativa, se tomará  $k_a = 2,90$  ó  $k_b = 2,90$ . Si  $e_a$  y  $e_b$  resultan negativas, se tomará  $k_a = 2,90$  y  $k_b = 0$  para  $|e_a|/a \geq |e_b|/b$ ; y  $k_a = 0$  y  $k_b = 2,90$  en caso contrario.

2.º Las fórmulas que se proponen son válidas para soportes de sección cuadrada o rectangular,  $c_1 \cdot c_2$ , cuyo lado mayor no supere al doble del menor. Por otra parte, el *perímetro de la sección crítica*,  $u$ , debe limitarse a los valores:

<b>soportes interiores</b>	<b>soportes de borde</b>	<b>soportes de esquina</b>
$u = 2(a + b) \geq 15 \cdot d$	$u = 2a + b \geq 10 \cdot d$	$u = a + b \geq 6 \cdot d$

en donde  $d$  es el canto útil medio de la placa.

3.º *Placas con armadura de punzonamiento.*—En general es conveniente dimensionar la estructura de forma que se cumpla la condición de punzonamiento,  $\tau_{max} \leq f_{pd}$ , aumentando, si es necesario, las dimensiones de los soportes o el espesor de la placa, disponiendo ábacos o capiteles, e incluso mejorando la calidad del hormigón. De no ser posible, se dispondrá una armadura de punzonamiento con la limitación:

$$f_{pd} < \tau_{max} \leq 1,5 \cdot f_{pd}, \quad \text{o bien} \quad 2 \cdot f_{cv} < \tau_{max} \leq 3 \cdot f_{cv}$$

en donde  $f_{cv} = 0,5 \sqrt{f_{cd}}$  ( $kp/cm^2$ ) es la resistencia virtual de cálculo del hormigón a esfuerzo cortante.

Las armaduras de punzonamiento se determinan, como en el caso de elementos lineales, para un esfuerzo cortante:

$$v_{su} = v_u - v_{cu} = (\tau_{\max} - f_{cv}) \cdot d \quad \text{por unidad de longitud;}$$

$$V_{su} = V_u - V_{cu} = (\tau_{\max} - f_{cv}) \cdot A_c \quad \text{total;}$$

es decir, admitiendo que en todos los puntos de la sección crítica actúa una tensión tangencial igual a la máxima,  $\tau_{\max}$ , y que el hormigón resiste un cortante igual a  $f_{cv}$ . Para la disposición de la armadura transversal debe consultarse la Instrucción española o los Complementos al Código Modelo CEB-FIP.

La Instrucción española no impone ninguna limitación especial al límite elástico de la armadura de punzonamiento (es decir, sólo la general de esfuerzos cortantes;  $f_{yd} > 4.200 \text{ kp/cm}^2$ ). Sin embargo, el Código Modelo limita el valor de  $f_{yd}$  a  $300 \text{ MPa}$  ( $3.060 \text{ kp/cm}^2$ ) debido a un doble motivo: por una parte, dadas las pequeñas deformaciones de la placa en las proximidades del soporte, la armadura no puede alcanzar tensiones elevadas; por otra parte, la inseguridad que tienen los anclajes para tensiones elevadas del acero, sobre todo, en algunos tipos de armadura transversal. Por último, es conveniente recordar que, según algunos autores, la armadura de punzonamiento es de muy dudosa eficacia para placas de cantos pequeños (menores de 25 centímetros).

**EJEMPLO 1.** Comprobación a punzonamiento de una placa de canto útil  $d = 0,20 \text{ m}$ , apoyada en un soporte interior de sección  $0,25 \times 0,25 \text{ m}^2$ , con las resistencias y solicitaciones que se indican a continuación:

$c_1 = 0,25 \text{ m}$	$N_d = 32,0 \text{ t}$	$f_{ck} = 200 \text{ kp/cm}^2$
$c_2 = 0,25 \text{ m}$	$M_a = 1,92 \text{ t} \cdot \text{m}$	$f_{pd} = 2 \cdot f_{cv} = \sqrt{f_{cd}} =$
$d = 0,20 \text{ m}$	$M_b = 1,28 \text{ t} \cdot \text{m}$	$= 11,5 \text{ kp/cm}^2 = 115 \text{ t/m}^2$

Se determinan, previamente, los valores de la sección crítica y las excentricidades:

$$a = c_1 + d = 0,45 \text{ m,}$$

$$b = c_2 + d = 0,45 \text{ m,}$$

$$A_c = 2(a + b) \cdot d = 0,36 \text{ m}^2,$$

$$e_a = \frac{M_a}{N_d} = 0,06 \text{ m,}$$

$$e_b = \frac{M_b}{N_d} = 0,04 \text{ m.}$$

Con el valor  $b/a = 1,00$  se entra en la tabla 1, encontrándose  $k_a = 1,20$  y  $k_b = 1,20$ . La máxima tensión tangencial es:

$$\tau_{\max} = \frac{N_d}{A_c} \cdot \left(1 + k_a \frac{|e_a|}{a} + k_b \frac{|e_b|}{b}\right) = 112,6 \text{ t/m}^2 < 115,0 \text{ t/m}^2$$

luego la placa se encuentra en buenas condiciones de punzonamiento. Si en lugar de utilizar la tabla simplificada se determinan los valores exactos de  $k$  mediante las fórmulas, se obtiene  $k_a = k_b = 1,144$  y  $\tau_{\max} = 111,5 \text{ t/m}$ , es decir, con la tabla se comete un error del uno por ciento, en favor de la seguridad.

**EJEMPLO 2.** Comprobar a punzonamiento la placa apoyada sobre un soporte de borde cuyos datos se indican a continuación (fig. 7):

$c_1 = 0,40 \text{ m}$	$N_d = 25,0 \text{ t}$	$f_{ck} = 200 \text{ kp/cm}^2$
$c_2 = 0,30 \text{ m}$	$M_a = 6,0 \text{ t} \cdot \text{m}$	$f_{pd} = 2 \cdot f_{cv} = \sqrt{f_{cd}} =$
$d = 0,20 \text{ m}$	$M_b = 1,0 \text{ t} \cdot \text{m}$	$= 11,5 \text{ kp/cm}^2 = 115 \text{ t/m}^2$

Primeramente se determina la sección crítica:

$$a = c_1 + \frac{d}{2} = 0,50 \text{ m,}$$

$$b = c_2 + d = 0,50 \text{ m,}$$

$$A_c = (2a + b) \cdot d = 0,30 \text{ m}^2$$

y a continuación se determinan las excentricidades:

$$e_o = \frac{d}{4} \left( 1 + \frac{2ab}{A_c} \right) = 0,133 \text{ m}$$

$$e_a = \frac{M_a}{N_d} - e_o = 0,107 \text{ m}$$

$$e_b = \frac{M_b}{N_d} = 0,040 \text{ m}$$

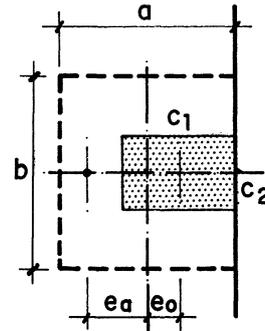


Fig.—7

Entrando en la tabla 1 con  $b/a = 1,00$  se obtiene, para el caso de soportes de borde,  $k_a = 1,20$  y  $k_b = 1,03$ . La tensión tangencial máxima es:

$$\tau_{\max} = \frac{N_d}{A_c} \cdot \left( 1 + k_a \frac{|e_a|}{a} + k_b \frac{|e_b|}{b} \right) = 111,6 \text{ t/m}^2$$

que al ser menor que la admisible, la placa se encuentra en buenas condiciones de punzonamiento. Error, 1,6 % en favor de la seguridad.

**EJEMPLO 3.** Comprobar a punzonamiento la placa apoyada sobre un soporte de esquina cuyos datos son los siguientes (fig. 8):

$$c_1 = 0,40 \text{ m,}$$

$$N_d = 12,0 \text{ t}$$

$$f_{ck} = 200 \text{ kp/cm}^2$$

$$c_2 = 0,30 \text{ m,}$$

$$M_a = 4,5 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$f_{cp} = 2 \cdot f_{cv} = \sqrt{f_{cd}} =$$

$$d = 0,20 \text{ m,}$$

$$M_b = 3,0 \text{ t} \cdot \text{m}$$

$$= 11,5 \text{ kp/cm}^2 = 115 \text{ t/m}^2$$

Primeramente se determina la sección crítica:

$$a = c_1 + \frac{d}{2} = 0,50 \text{ m,}$$

$$b = c_2 + \frac{d}{2} = 0,40 \text{ m,}$$

$$A_c = (a + b) \cdot d = 0,18 \text{ m}^2$$

y a continuación se determinan las excentricidades:

$$e_o = \frac{d}{4} \left( 1 + \frac{2ab}{A_c} \right) = 0,161 \text{ m}$$

$$e_a = \frac{M_a}{N_d} - e_o = 0,214 \text{ m}$$

$$e_b = \frac{M_b}{N_d} - e_o = 0,089 \text{ m}$$

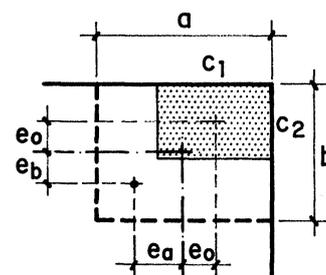


Fig.—8

Entrando en la tabla 1 con  $b/a = 0,80$ , para el caso de soportes de esquina, se encuentra  $k_a = 1,10$  y  $k_b = 0,84$ . La máxima tensión tangencial es:

$$\tau_{\max} = \frac{N_d}{A_c} \cdot \left(1 + k_a \frac{|e_a|}{a} + k_b \frac{|e_b|}{b}\right) = \frac{N_d}{A_c} \cdot (1 + 0,47 + 0,19)$$

pero teniendo en cuenta la limitación,  $k_b \cdot e_b/a \leq 0,30$ , indicada en el apartado 3.3, debe tomarse:

$$\tau_{\max} = \frac{N_d}{A_c} \cdot (1 + 0,47 + 0,30) = 118,0 \text{ t/m}^2$$

que al ser superior a la admisible,  $f_{pd} = 115,0 \text{ t/m}^2$ , la placa no se encuentra en buenas condiciones de punzonamiento.

## 5. Otras fórmulas simplificadas

Existen otras fórmulas simplificadas para la comprobación a punzonamiento, basadas en ensayos, de las que se indican a continuación las dos más importantes: la preconizada por el Código Modelo CEB-FIP, y la propuesta en la revisión del Código ACI 318-77. La comparación de los resultados obtenidos, mediante estos procedimientos, presenta ciertas dificultades debido a la gran diferencia existente entre los valores admitidos para la resistencia del hormigón a cortante, así como por la distinta forma de introducir la seguridad.

1.º El Código Modelo CEB-FIP preconiza para la comprobación a punzonamiento de las placas apoyadas sobre soportes de sección rectangular, la limitación:

$$\tau_{\max} = \frac{N_d}{A_c} \cdot \left(1 + 1,5 \frac{|e_a| + |e_b|}{\sqrt{a \cdot b}}\right) \leq f_{pd}$$

$$f_{pd} = 1,6 \cdot f_{vd} = 0,12 \cdot \alpha \cdot (1 + 50 \cdot \rho) \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (\text{kp/cm}^2)$$

con los mismos significados indicados anteriormente y, en donde, además,  $\alpha = 1,6 - d \leq 1,0$  ( $d$  en metros),  $\rho = \sqrt{\rho_x \cdot \rho_y} \geq 0,008$  ( $\rho_x$  y  $\rho_y$ , cuantías geométricas de las armaduras longitudinales, en ambas direcciones), y con la limitación,  $a \geq b \geq 0,7 \cdot a$  (1).

Fácilmente se comprueba que este valor de  $f_{pd}$  es bastante inferior al admitido por la Instrucción española; por otra parte el Código Modelo admite, para las combinaciones fundamentales de las cargas, valores de  $\gamma_f$  iguales a 1,35 para las cargas permanentes y 1,50 para las variables, mientras que la Instrucción española preconiza, en los casos normales,  $\gamma_f = 1,60$  para ambos tipos de carga.

2.º La fórmula propuesta en la revisión del Código ACI 318, para placas apoyadas sobre soportes interiores de sección rectangular, es:

$$\tau_{\max} = \frac{N_d}{A_c} \cdot \left(1 + 2,6 \frac{|e_a| + |e_b|}{a + b}\right) \leq f_{pd}$$

$$f_{pd} = 0,9 \sqrt{f'_c}$$

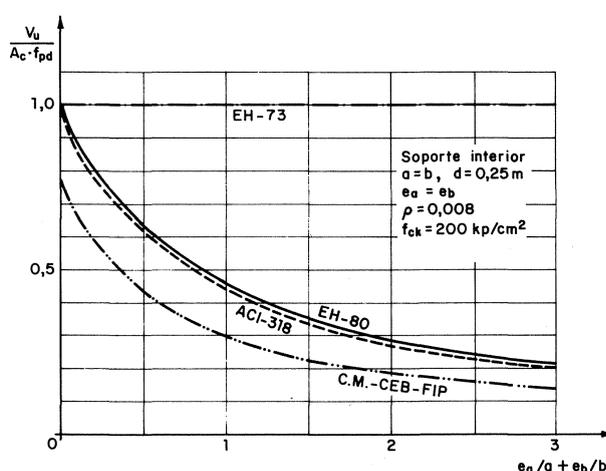


Fig.—9

(1) Esta fórmula es también aplicable a los soportes de borde y de esquina, con ciertas limitaciones.

en donde  $f'_c$  es la resistencia del hormigón a compresión, en  $kp/cm^2$ , según ACI 318. Los valores normales admitidos por este Código para  $\gamma_f$  son, 1,4 para las cargas permanentes y 1,7 para las variables.

3.º Un estudio comparativo general entre estas fórmulas y las españolas presentan serias dificultades. Por ello, a continuación se efectúa la comparación para un caso concreto: una placa de canto útil medio  $d = 0,25 m$ , apoyada sobre un soporte interior de sección cuadrada; cuantía media  $\rho = 0,008$ ; hormigón de resistencia característica  $f_{ck} = 200 kp/cm^2$ ; excentricidades,  $e_a = e_b$ .

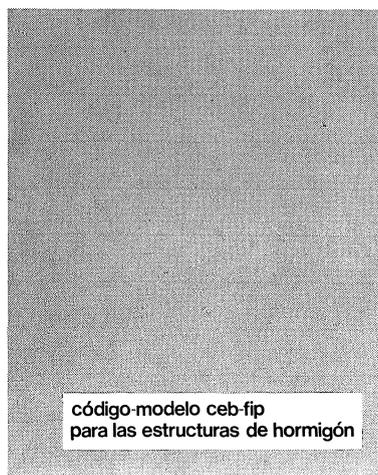
Para este caso concreto, en la figura 9 se han dibujado las curvas de variación del esfuerzo relativo de agotamiento,  $V_u/(A_c \cdot f_{pd})$ , en función de la excentricidad  $e_a + e_b$ , según las distintas normas. Para ello ha sido necesario afectar a  $V_u$  de un coeficiente de adaptación adecuado para tener en cuenta, tanto los diferentes coeficientes de seguridad, como la resistencia a punzonamiento del hormigón, preconizados por cada norma.

Del estudio de estas curvas se deduce que, en el caso estudiado, la Instrucción española EH-80 es concordante con el Código ACI americano; que la antigua Instrucción EH-73 era muy poco segura para soportes interiores con momentos importantes; y, por último, que el Código Modelo CEB-FIP es muy exigente.

## 6. Bibliografía consultada

1. ACI 318-77, «Building Code Requirements for Reinforced Concrete». American Concrete Institute.
2. ACI-ASCE Committee 426, «Suggested revisions to Building Code Requirements for Reinforced Concrete». ACI Journal, septiembre 1977.
3. Código Modelo CEB-FIP para las Estructuras de Hormigón, 1978. Traducción española. Instituto Eduardo Torroja, 1978.
4. M. P. Nielsen, «Punching shear resistance according to the CEB Model Code». Boletín de Información CEB núm. 113, febrero 1979.
5. E. P. Holland, «Comparison of design for shear slabs by the ACI and CEB Codes». Boletín de Información CEB núm. 113, febrero 1979.
6. P. E. Regan, «Tests of reinforced concrete flat slabs». Report to Construction Industry Research and Information Association, Londres, 1979.
7. CEB, «Etat-limite ultime de resistance au poinçonnement». Boletín de Información CEB núm. 137, junio 1980.
8. P. E. Regan, «Behaviour of reinforced concrete flat slabs». Report 89. Construction Industry Research and Information Association, Londres, febrero 1981.
9. CEB, «Compléments au Code Modèle CEB-FIP 1978». Boletín de Información CEB núm. 139-F, julio 1981.
10. EH-80, «Instrucción para el proyecto y la ejecución de las obras de hormigón en masa o armado».
11. J. Calavera, «Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación». INTEMAC, Madrid 1981.
12. P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer y F. Morán Cabré, «Hormigón armado», 11.ª edición. Editorial Gustavo Gili, Barcelona.
13. F. Morán Cabré, «Tablas para la comprobación a punzonamiento por el método de la EH-80». Informes de la Construcción núm. 340, Madrid, mayo 1982.

### publicación del i.e.t.c.c.



código modelo ceb-fip  
para las estructuras de hormigón

El Instituto Eduardo Torroja, miembro activo tanto del Comité Eurointernacional del Hormigón (CEB), como de la Federación Internacional del Pretensado (FIP), ha tomado a su cargo la traducción y edición de esta importante normativa.

Aunque presentado con el título de «Código Modelo CEB/FIP 1978» este documento incorpora los dos primeros volúmenes de este «Sistema Unificado Internacional de Reglamentación Técnica de Ingeniería Civil». El primer volumen de este «Sistema Unificado» es el denominado «Reglas comunes Unificadas para los diferentes tipos de obras y materiales», donde se exponen los criterios y formatos de seguridad a que han de ajustarse los diferentes Códigos (estructuras de hormigón, estructuras metálicas, estructuras mixtas, estructuras de albañilería y estructuras de madera), que han de configurar la totalidad del antedicho sistema.

El segundo volumen es propiamente el Código Modelo para las Estructuras de Hormigón. Fruto de la colaboración de dos asociaciones del prestigio del CEB y la FIP, desde mediados de los 60, incorpora los avances científicos y tecnológicos producidos en los últimos años sin detrimento alguno de la claridad y operatividad que deben presidir un código que pretende ser, ante todo, un auxiliar práctico para los técnicos de la construcción.

El Código sigue en su estructura las reglas más o menos clásicas: una primera parte dedicada a los datos generales para el cálculo (propiedades de los materiales, datos relativos al pretensado, tolerancias); en segundo lugar se presentan las reglas de proyecto estructural (acciones, sollicitaciones, estados límites últimos y de utilización, reglas de detalle para el armado); y, por último, ejecución, mantenimiento y control de calidad.

También incluye reglas para estructuras con elementos prefabricados y estructuras de hormigón con áridos ligeros. Los Anejos del Código se refieren a: terminología, proyecto mediante la experimentación, resistencia al fuego, tecnología del hormigón, comportamiento en el tiempo del hormigón y fatiga.

Un volumen encuadernado en cartón, de 21 x 30 cm, compuesto de 340 páginas, Madrid, mayo 1982.

Precios: España 2.500 ptas. Extranjero 36 \$ USA.