Informes de la Construcción Vol. 24, nº 239
Abril de 1972

un método directo para imponer coacciones en cualquier dirección, en el análisis matricial de una estructura

A. RECUERO, Ingeniero de Caminos

sinopsis 450-11

Al analizar una estructura por métodos matriciales es frecuente encontrarse con el problema de imponer coacciones en varias direcciones, de forma que es imposible elegir un sistema de ejes cartesianos para que las direcciones de dichos ejes coincidan con las direcciones en las que hay que imponer las coacciones.

El presente trabajo describe un método general para imponer de forma matemáticamente exacta y directa coacciones en cualquier dirección modificando la matriz de rigidez en la zona correspondiente a los nudos en que se imponen tales coacciones, siendo la nueva matriz de rigidez igualmente simétrica y no presentándose direcciones singulares.

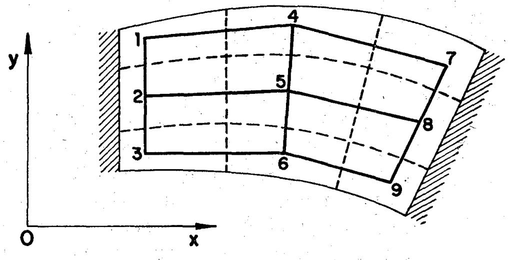
Introducción

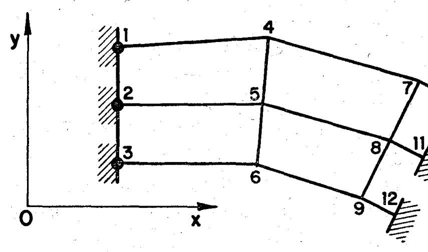
En el análisis de una estructura por métodos matriciales es frecuente encontrarse con coacciones en varias direcciones de manera que no es posible elegir un sistema de ejes de referencia para que todas las coacciones sean paralelas a planos o ejes coordenados, de modo que tales coacciones equivalgan simplemente a imponer soluciones nulas al sistema de ecuaciones.

Dichas coacciones pueden aparecer como condiciones de contorno reales de la estructura, como en el ejemplo indicado en la figura 1: una losa de puente simplemente apoyada en dos bordes no paralelos; o bien al intentar aprovechar las condiciones de simetría y analizar sólo una parte de la estructura, como en el ejemplo de la figura 2: un pórtico espacial de forma regular.

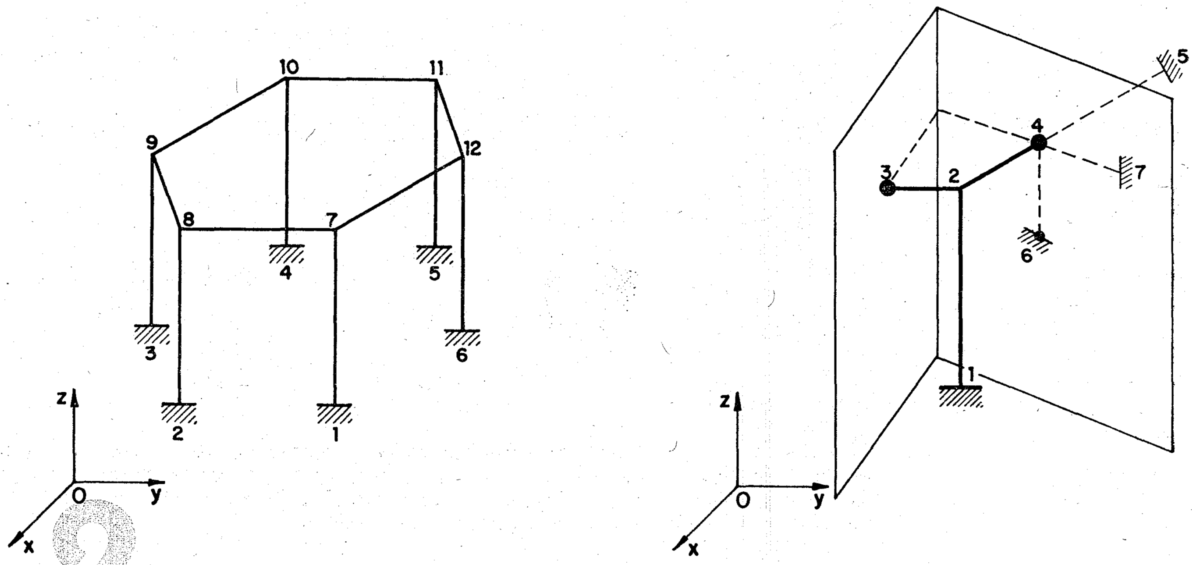
El método que se viene usando en tales situaciones es el de introducir cierto número de elementos ficticios con características mecánicas (área, momento de inercia, módulo de torsión) ideales, nulas unas, infinitamente grandes otras, para que su efecto en la estructura reproduzca la coacción que deseamos representar.

Así, en el caso de la losa de la figura 1, supondremos dicha losa idealizada por el emparrillado indicado. Si elegimos los ejes de referencia de manera que Oy sea paralelo al borde





1



2

apoyado izquierdo 1-2-3, la imposición de tal condición de apoyo consiste en obligar a que el descenso y el giro de eje paralelo a *Ox* en los nudos 1, 2 y 3 sean nulos. Pero el borde apoyado derecho no es paralelo a ningún eje coordenado. La condición que hay que imponer en este caso equivale a anular el descenso y el giro según un eje normal al borde en los nudos 7, 8 y 9. Podemos imponer fácilmente la anulación del descenso, pero para anular los giros hemos de introducir algunos elementos ficticios. Una posible forma de hacerlo es introducir unas barras, 7-10, 8-11 y 9-12, empotradas en 10, 11 y 12, de dirección perpendicular a 7-8-9, y con un momento de inercia nulo y un módulo de torsión infinito.

En el ejemplo de la figura 2 se considera un pórtico espacial de planta hexagonal del que por las condiciones mecánicas y de carga podemos analizar sólo una sexta parte: la destacada en la parte derecha de la figura. En este caso las condiciones de contorno son que el nudo 1 esté empotrado y los nudos 3 y 4 se muevan manteniéndose en los planos indicados en la figura, que forman un diedro de 60º, e incidiendo las barras 2-3 y 2-4 normalmente a dichos planos. Eligiendo el sistema de ejes indicado, podemos imponer fácilmente estas condiciones en el nudo 3, anulando la componente y del desplazamiento y las componentes x y z del giro de 3.

Pero para conseguir este mismo efecto en el nudo 4 podemos introducir las barras 4-5, 4-6 y 4-7 con el fin de coartar 4-5, el corrimiento normal al plano, y 4-6 y 4-7, los giros de eje contenido en el plano; para lo cual 4-5 tendrá un área infinita y unos momentos de inercia y módulo de torsión nulos, mientras que 4-6 y 4-7 tendrán área nula, uno de los momentos principales de inercia nulo y el otro infinito y un módulo de torsión nulo. Aunque el ejemplo es un caso bastante extremo por la pequeñez de la estructura, conviene resaltar que, con la simplificación indicada en la figura 2, el ahorro en el tiempo de resolución del sistema es de 1 a 7 y en la memoria precisa para almacenar la matriz de rigidez de la estructura de 1 a 3,5, mientras que con la imposición directa de las condiciones de contorno del nudo 4 las cifras anteriores serían de 1 a 27 y de 1 a 9, respectivamente.

Sin embargo, la imposición de las coacciones introduciendo estos elementos ficticios presenta algunos inconvenientes:

a) Da lugar a sistemas de ecuaciones mayores como consecuencia de tener que introducir más nudos, pudiendo hacer aumentar no sólo el número de ecuaciones, sino incluso el ancho de banda. Teniendo en cuenta que el tiempo de resolución del sistema de ecuaciones varía aproximadamente en la relación: (relación de anchos de banda)^2 $\times$ (relación del número de ecuaciones), y que la memoria mínima requerida, en los métodos habituales de eliminación, para almacenar coeficientes del sistema varía con el cuadrado de la relación de anchos de banda, aproximadamente, este inconveniente puede ser importante. En los ejemplos citados, el tiempo de resolución del sistema aumenta en un 33 % en el primer ejemplo, y en un casi 400 % en el segundo; si bien en estructuras mayores estos porcentajes deben ser bastante menores.

b) La idealización matemática del modelo no es perfecta, ya que las características mecánicas de los elementos ficticios no pueden introducirse en el computador como cero o infinito. La utilización de ceros puede dar lugar a «overflow» al tratar de dividir por cero. Infinito no puede introducirse, pues el computador admite un número máximo, e incluso algunos computadores dan como condición de error, «underflow», el dividir teniendo como resultados números muy pequeños. Esto lleva a usar características mecánicas del orden de 10^4 mayores o menores que las reales de las estructuras.

c) Aun tomando las precauciones indicadas en *b)*, la introducción de estos elementos ficticios origina en ocasiones problemas en el funcionamiento del computador produciendo «overflow», o sistemas de ecuaciones mal condicionados, obteniendo soluciones poco exactas.

Estos inconvenientes marcan la conveniencia de introducir de un modo directo las coacciones.

Método

El método descrito consiste en expresar los desplazamientos y giros de los nudos sometidos a coacciones no paralelas a los ejes de referencia globales de la estructura, no por sus componentes en tales ejes globales sino en unos ejes locales, a los cuales sí sean paralelas las coacciones y, por consiguiente, su imposición equivalga nuevamente a imponer soluciones nulas al sistema de ecuaciones. Resuelto el sistema será conveniente expresar todos los resultados en ejes globales para proceder al cálculo de las tensiones.

Llamaremos d_i al vector cuyas componentes son las proyecciones del desplazamiento y giro del nudo i, en ejes globales.

p_i es el vector de acciones exteriores actuando sobre el nudo i, en ejes globales.

d es el vector de desplazamientos y giros y p el de acciones exteriores sobre toda la estructura, en ejes globales.

Tendremos que:

$$d = \left\{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{matrix} \right\} \quad \text{y} \quad p = \left\{ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} \right\} \qquad [1]$$

K es la matriz de rigidez de la estructura en ejes globales, con lo que el sistema de ecuaciones quedará expresado en la forma:

$$K \cdot d = p \ . \qquad [2]$$

Si ahora expresamos el desplazamiento y giro del nudo i, y las acciones exteriores actuantes sobre el nudo en un nuevo sistema de referencia, y llamamos d'_i y p'_i, respectivamente, a los vectores cuyas componentes son tales proyecciones. Si A es la matriz de cambio de ejes se verificará que:

$$d_i = A \cdot d'_i \qquad [3]$$

y

$$p_i = A \cdot p'_i \ . \qquad [4]$$

Si llamamos d' y p', respectivamente, a los vectores cuyas componentes son las proyecciones de los desplazamientos y giros, y de las acciones exteriores a toda la estructura en ejes globales, salvo en el nudo i, que se proyectan en los ejes locales, se obtiene:

$$d' = \left\{ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d'_i \\ \vdots \\ d_n \end{matrix} \right\} \quad \text{y} \quad p' = \left\{ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p'_i \\ \vdots \\ p_n \end{matrix} \right\} . \qquad [5]$$

Teniendo en cuenta [3]:

$$d = \left[\begin{array}{c:c:c} I & \Omega & \Omega \\ \hdashline \Omega & A & \Omega \\ \hdashline \Omega & \Omega & I \end{array}\right] \cdot d' = T \cdot d' \; ; \qquad [6]$$

donde I y Ω son, respectivamente, matrices unidad y nulas de las dimensiones adecuadas.

Análogamente:

$$p = T_{p'} \; . \qquad [7]$$

Entrando con [6] y [7] en [2]:

$$K \cdot T \cdot d' = T_{p'} \qquad [8]$$

y si A es invertible:

$$T^{-1} \cdot K \cdot T \cdot d' = p' \; ; \qquad [9]$$

donde $T^{-1} \cdot K \cdot T$ es la nueva matriz de rigidez correspondiente a los sistemas de ejes usados.

Si usamos solamente sistemas cartesianos rectangulares, la matriz A es ortogonal y la ecuación [9] nos queda:

$$T^T \cdot K \cdot T \cdot d' = p' \; ; \qquad [10]$$

con lo que la nueva matriz de rigidez conserva la simetría, y en este sistema la imposición de las coacciones equivale simplemente a imponer soluciones nulas.

Esta imposición de soluciones nulas suele hacerse bien anulando los coeficientes de la fila y columna de la solución a imponer, salvo el elemento de la diagonal, o bien imponiendo en la diagonal un valor muy grande, frente al cual los restantes elementos de la fila y columna sean despreciables.

El efecto de las multiplicaciones de T^T y T por la matriz K podemos ponerlo de modo más explícito como sigue:

Si partimos K en submatrices

$$K = \left[\begin{array}{c:c:c} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ \hdashline K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ \hdashline K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{array}\right] \leftarrow \text{Nudo } i \qquad [11]$$

$$T^T \cdot K \cdot T = \left[\begin{array}{c:c:c} K_{11} & K_{12}\,A & K_{13} \\ \hdashline A^T K_{21} & A^T K_{22}\,A & A^T K_{23} \\ \hdashline K_{31} & K_{32}\,A & K_{33} \end{array}\right] \leftarrow \text{Nudo } i \qquad [12]$$

Vemos que sólo quedan alteradas las filas y columnas correspondientes al nudo i. Basta, por consiguiente, modificar adecuadamente las matrices de rigidez de los elementos en los que interviene el nudo i, antes de ensamblarlas para formar la matriz de rigidez de la estructura.

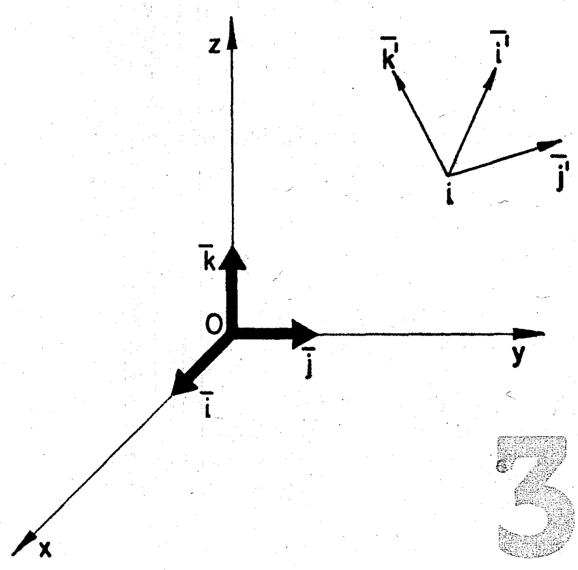
Una vez resuelto el sistema, calcularemos d mediante la expresión [6], con lo que el cálculo de las tensiones sigue el método normal.

Algunos casos particulares

Estructuras espaciales

La matriz de cambio de ejes es en este caso:

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos ii' & \cos ij' & \cos iK' \\ \cos ji' & \cos jj' & \cos jK' \\ \cos Ki' & \cos Kj' & \cos KK' \end{bmatrix} \qquad [13]$$



Si se trata de una estructura articulada espacial:

$$d_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}, \qquad [14]$$

y la matriz A será:

$$A = A_3 \,. \qquad [15]$$

Si se trata de una estructura espacial general, con seis grados de libertad por nudo:

$$d_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix}, \qquad [16]$$

y la matriz A es:

$$A = \left[\begin{array}{c:c} A_3 & \Omega \\ \hdashline \Omega & A_3 \end{array}\right]. \qquad [17]$$

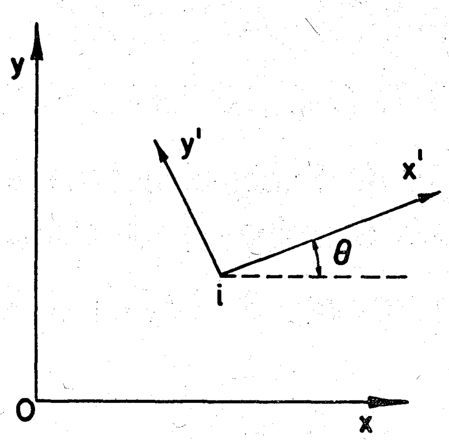
Estructuras planas

La matriz de cambio de ejes es:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad [18]$$

Si se trata de una estructura articulada:

$$d_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}, \qquad [19]$$



y la matriz A nos queda:

$$A = A_2 \,. \qquad [20]$$

Si se trata de un pórtico plano:

$$d_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix}, \qquad [21]$$

y la matriz A resulta:

$$A = \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} & \\ & A_2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hdashline 0\;0 & 1 \end{array}\right]. \qquad [22]$$

Si se trata de un emparrillado:

$$d_i = \begin{Bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ z_i \end{Bmatrix}, \qquad [23]$$

y la matriz A nos queda:

$$A = \left[\begin{array}{c:c} \begin{matrix} & \\ & A_2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hdashline 0\;0 & 1 \end{array}\right]. \qquad [24]$$

Conclusión

El método descrito es totalmente general y permite la representación matemáticamente exacta de las condiciones de apoyo buscadas.

Es un método totalmente sistemático, por lo que su inclusión en los programas en uso puede ser fácilmente realizada y hay que modificar tan sólo las rutinas de formación de la matriz de rigidez de un elemento, dejar intacta la zona de ensamble de los elementos y solución del sistema, y modificar de modo simple la solución una vez calculada antes de pasar a calcular las tensiones.

Mantiene la simetría de los coeficientes, no aumenta el tamaño del sistema y no presenta dirección singular alguna y permite así imponer cualquier tipo de coacción.

Puede asimismo emplearse el método para imponer apoyos elásticos o corrimientos impuestos en cualquier dirección según un sistema más natural, adecuado a cada nudo.

résumé

Une méthode directe pour exercer des contraintes en n'importe quelle direction, dans l'analyse matricielle d'une structure

A. Recuero, Dr. Ingénieurs des Ponts et Chaussées

Lors de l'analyse d'une structure par des méthodes matricielles, il est fréquent de rencontrer le problème d'exercer des contraintes en plusieurs directions, de telle façon qu'il est impossible de choisir un système d'axes cartésiens pour que les directions de ces axes coïncident avec les directions dans lesquelles il faut exercer les contraintes.

Dans ce travail est présentée une méthode générale pour exercer, d'une manière mathématiquement exacte et directe, des contraintes en n'importe quelle direction, modifiant la matrice de rigidité dans la zone correspondante aux noeuds où ces contraintes sont exercées, la nouvelle matrice de rigidité étant également symétrique et ne présentant pas de directions singulières.

summary

A direct method for imposing restrictions in any direction, in matrix analysis of structures

A. Recuero, Civil Engineer

When analysing a structure by matrix methods, it is common to come up against the problem of imposing restrictions in various directions, so that it is impossible to choose a system of Cartesian axes that will make the directions of these axes coincide with those along which restrictions are to be imposed.

This work presents a general method for imposing restrictions in any direction, in a mathematically exact and direct form, modifying the stiffness matrix in the area corresponding to the nodes in which such restrictions are imposed, being the new stiffness matrix, equally symmetrical, and having singular directions.

zusammenfassung

Eine direkte Methode um Lagerungsbedingungen in irgend einer Richtung in der Matrizenrechnung in der Baustatik aufzustellen

A. Recuero, Tiefbauningenieur

Wenn man in der Baustatik die Matrizenrechnungsmethoden anwendet steht man oft vor dem Problem, dass man Lagerungsbedingungen mit verschiedenen Richtungen aufstellen muss, so dass es praktisch unmöglich ist ein Coordinaten-System zu finden, in dem die Richtungen der Axen mit den Richtungen der Lagerungsbendingungen zusammenfallen.

Dieses werk stellt eine allgemeingültige Methode vor, um die Lagerungsbedingungen in mathematisch genauer und direkter Form in jeglicher Richtung aufzustellen, indem man die Steifigkeitsmatrize in den Abschnitten verändert die den Knotenpunkte, in denen die betreffenden Lagerungsbedingungen auftreten, entsprechen, und eine neue ebenfalls simetrische und ohne singular Richtungen aufstellt.