cálculo directo del coeficiente de mayoración

PIMPO HERNANDEZ, ingeniero
Dpto. de Estructuras - Universidad de La Habana

sinopsis

Se obtienen fórmulas explícitas para el cálculo del coeficiente de mayoración en estructuras de hormigón armado. Dichas fórmulas se basan en el principio del coste generalizado mínimo, al igual que el método propuesto en la «Instrucción H.A. 61 para el Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado» (2.ª y 3.ª partes), del Instituto Eduardo Torroja, Madrid (1961), y permiten, por tanto, llegar a resultados similares a los de este último, sin necesidad de tanteos. Para deducir las fórmulas, se obtienen previamente expresiones analíticas aproximadas del coste de la estructura resistente y de su probabilidad de hundimiento, como funciones del coeficiente de seguridad. Se resuelven ejemplos numéricos ilustrativos. Este trabajo es un resumen revisado del artículo «El Coeficiente de Seguridad en Estructuras de Hormigón Armado», por J. E. Hernández, Revista Ingeniería Civil, La Habana (1965).

450-10

notación

Se ha seguido la notación de la Instrucción H.A. 61; la única excepción es v_p , que allí se denomina k_2 (ver fórmula [6 a]).

C	= coeficiente de seguridad.
C_M	= coeficiente de mayoración de las cargas.
C_0	= valor particular de C .
P	= probabilidad de hundimiento.
V_D	= coste de los daños causados por el colapso de una estructura, adicionales al coste V_I de la construcción.
V_H	= coste total del hundimiento, igual a V_I más V_D .
V_I	= coste inicial de una construcción, igual a V_p más V_m .
V_m	= coste de la parte de la construcción que no coopera a resistir las cargas.
V_p	= coste de una estructura, calculada con un coeficiente de seguridad C .
V_s	= volumen de hormigón equivalente a las sobrecargas.
V_T	= coste generalizado de una construcción, definido por la fórmula [1].
V_0	= coste de una estructura, calculada con un coeficiente de seguridad C_0 .
a, b	= parámetros adimensionales que aparecen en las fórmulas [20].
k_3	= relación carga total/sobrecarga.
n	= número total de observaciones.
r	= error residuo.
v_d, v_m, v_p	= cocientes de dividir V_D, V_m , y V_p , respectivamente, por V_0 .
x, y	= variables usadas en el Anejo 2, y definidas por las [21].
y_m	= media de los valores observados de y .
z	= suma de los cuadrados de los errores residuos.
Δ	= diferencia entre dos valores de v_p que corresponden a valores de C que difieren una décima entre sí.
λ	= parámetro adimensional que aparece en la [9].
σ	= desviación típica relativa.

Introducción

El coeficiente de mayoración puede definirse como la componente del coeficiente de seguridad que tiene en cuenta las causas de este último relativas a cálculo y construcción, en condiciones típicas de ambos, y que además pesa la importancia relativa del improbable, pero posible, hundimiento de la estructura. La Instrucción H.A. 61 ⁽¹⁾, del Instituto Eduardo Torroja, permite tomar directamente valores del coeficiente de mayoración, comprendidos entre 1,25 y 1,65; sin embargo, la propia Instrucción recomienda efectuar el cálculo, y en un Apéndice proporciona los gráficos y tablas necesarias para ello. En el método allí propuesto es necesario trabajar por tanteos; ello presenta dos inconvenientes: en primer lugar, el proceso es bastante laborioso; en segundo, su comprensión se dificulta, pues no se dispone de fórmulas que relacionen explícitamente las variables que en él intervienen.

En este trabajo, que es un resumen revisado del artículo ⁽²⁾, se presentará la deducción de fórmulas que permiten salvar los inconvenientes anteriores, y que se basan, al igual que el método de la Instrucción H.A. 61, en el principio del coste generalizado mínimo.

1

Planteamiento analítico del principio del coste generalizado mínimo

Este principio, debido a los ingenieros E. Torroja y A. Páez ⁽³⁾, permite obtener el coeficiente de mayoración C_M , calculando previamente el coeficiente de seguridad C . Este último debe escogerse, según el principio, de modo que sea mínimo el coste generalizado de la estructura, definido como la suma del coste inicial de la misma con el producto de la probabilidad de hundimiento por el coste de este último. El coste generalizado V_T puede expresarse, pues, mediante la fórmula:

$$V_T = V_I + P \cdot V_H, \quad [1]$$

donde:

V_I es el coste inicial de la construcción, y V_H , el coste del hundimiento, siendo P la probabilidad de que el mismo ocurra. Los costes deben expresarse en la misma unidad, por ejemplo, el valor de 1 m³ de hormigón armado y colocado, en condiciones promedio; de esta manera vendrán dados en m³, como volúmenes equivalentes de hormigón.

Analizando el segundo miembro de la [1], se observa que el primer sumando V_I es función creciente del coeficiente de seguridad, mientras que el segundo sumando $P \cdot V_H$ es función decreciente del mismo: al aumentar el coeficiente de seguridad aumenta el coste inicial de la estructura, y disminuye su probabilidad de hundimiento. Se comprende que exista un valor intermedio de C para el cual V_T sea un mínimo.

Por otra parte, el coste inicial V_I viene dado por:

$$V_I = V_p + V_m, \quad [2]$$

donde:

V_p es el coste de la estructura resistente (función de C), y V_m , el coste del resto de la construcción (independiente de C). Asimismo, el coste total del hundimiento V_H puede expresarse por:

$$V_H = V_I + V_D = V_p + V_m + V_D, \quad [3]$$

es decir, la suma del coste inicial de la construcción V_I con el valor V_D de los daños que causaría el colapso de la misma. Sustituyendo las [2] y [3] en [1], se obtiene:

$$V_T = (V_p + V_m)(1 + P) + P \cdot V_D \quad [4]$$

y muy aproximadamente, ya que en la práctica P es siempre despreciable frente a la unidad:

$$V_T = V_p + V_m + P \cdot V_D. \quad [5]$$

Si se introducen los costes relativos

$$v_p = \frac{V_p}{V_0} (*), \quad [6 a]$$

$$v_m = \frac{V_m}{V_0}, \quad [6 b]$$

$$v_d = \frac{V_D}{V_0}, \quad [6 c]$$

siendo V_0 un valor arbitrario del coste de la estructura resistente, tomado como referencia, la [5] se transforma en:

$$V_T = V_0(v_p + v_m + P \cdot v_d); \quad [7]$$

y en esta última fórmula, todas las variables dentro del paréntesis son adimensionales.

Puede ahora aplicarse el principio del coste generalizado mínimo. Derivando V_T con respecto a C en la [7], e igualando a cero esta derivada, se obtiene:

$$\frac{d v_p}{d C} = -v_d \cdot \frac{d P}{d C}. \quad [8]$$

La [8] permitirá calcular el valor de C que corresponde a un coste generalizado mínimo, una vez obtenidas las expresiones analíticas de v_p y P como funciones de C . De ello se trata en el párrafo siguiente.

Obtención del coste de la estructura y de su probabilidad de hundimiento como funciones del coeficiente de seguridad

El coste de una estructura de hormigón armado puede expresarse aproximadamente como una función lineal del coeficiente de seguridad, para los valores de este último más frecuentes en la práctica. Ello se demuestra fácilmente, a partir de los datos presentados en la Instrucción H.A. 61 (ver Anejo 1). Puede, por tanto, ponerse:

$$V_p = V_0 [1 + \lambda (C - C_0)] \quad , \quad 1,5 \leq C \leq 3,0, \quad [9]$$

(*) La variable v_p se denomina k_2 en la Instrucción H.A. 61; no hemos conservado dicha notación para mantener la consistencia de la nuestra, en la cual todos los costes relativos se denotan por v con el correspondiente subíndice.

donde:

λ es un coeficiente adimensional, que depende del tipo de estructura, y del valor C_0 del coeficiente de seguridad que corresponde a V_0 . Algunos valores de λ , para $C_0 = 3$, se calculan en el Anejo 1, y se reúnen en la tabla 1 (*); los mismos oscilan entre 0,22 y 0,27. Recordando la [6 a] se obtiene, pues:

$$v_p = 1 + \lambda(C - C_0) \quad , \quad 1,5 \leq C \leq 3,0, \quad [10]$$

que da el coste relativo de la estructura resistente, en función del coeficiente de seguridad.

En el caso de la probabilidad de hundimiento P , el problema es algo más complejo, ya que los trabajos de Torroja y Páez, (1) y (2), demuestran que P es función, no solamente de C , sino también de la relación

$$k_3 = \frac{V_s + V_m + V_p}{V_s} \quad [11]$$

entre la carga total $V_s + V_m + V_p$ y la sobrecarga V_s , expresadas ambas como volúmenes equivalentes de hormigón. La relación funcional entre P , C y k_3 se expresa en la Instrucción H.A. 61 mediante un gráfico; adaptando al mismo una expresión analítica, por el método de los mínimos cuadrados, en el Anejo 2 se encuentra la fórmula:

$$\log P = f(k_3) \cdot (1 - C), \quad [12]$$

siendo:

$$f(k_3) = 3,80 - 0,19 \left(1 - \frac{k_3 - 1}{2} \right)^2 \quad , \quad 1 \leq k_3 \leq 3, \quad [13 a]$$

$$f(k_3) = f(3) = 3,80, \quad k_3 \geq 3. \quad [13 b]$$

La forma de la expresión [12] fue sugerida porque ella da en todo caso, para $C = 1$, $P = 1$, lo cual está de acuerdo con la intuición de que una estructura con ese precario coeficiente de seguridad marcharía hacia una segura destrucción. Por otra parte, las [13] se adaptan notablemente al gráfico de la Instrucción H.A. 61; la desviación típica relativa es solamente 1,4 % (ver Anejo 2).

Fórmulas para calcular el coeficiente de mayoración según el principio del coste generalizado mínimo

Teniendo en cuenta las [10] y [12], la [8] permite obtener (**):

$$C = 1 + \frac{1}{f(k_3)} \cdot \log \frac{2,30 f(k_3)}{\lambda} v_d; \quad [14]$$

y como, para las estructuras utilizadas en la obtención del gráfico P - C - k_3 de la Instrucción H.A. 61, se verifica

$$C = 1,5 C_M, \quad [15]$$

(*) Ver tablas y gráfico al final del artículo.

(**) Al efectuar la derivación de P con respecto a C indicada en la [8], se ha considerado k_3 constante, es decir, independiente de C . Ello no es rigurosamente cierto, ya que en el numerador del segundo miembro de la [11] aparece V_p , que depende de C según la [9]. Considerar la variabilidad de k_3 es, por tanto, posible; pero complicaría innecesariamente el desarrollo teórico, sin afectar prácticamente sus resultados; véase nota (*) al final del ejemplo I (párrafo 5).

se tiene:

$$C_M = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{1}{f(k_3)} \cdot \log \frac{2,30 f(k_3)}{\lambda} v_d \right]. \quad [16]$$

La [16] es la fórmula exacta para el cálculo del coeficiente de mayoración, según el principio del coste generalizado mínimo. La misma puede simplificarse; para ello, debe ponerse primeramente en la forma:

$$C_M = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{1}{f(k_3)} \cdot \log \frac{2,30 f(k_3)}{\lambda} + \frac{1}{f(k_3)} \cdot \log v_d \right].$$

Analizando por separado los términos

$$\frac{1}{f(k_3)} \cdot \log \frac{2,30 f(k_3)}{\lambda},$$

$$\frac{1}{f(k_3)} \cdot \log v_d,$$

y evaluando los mismos para distintos valores de k_3 y λ (tabla 2) y k_3 y v_d (tabla 3), respectivamente, se comprueba que puede sustituirse

$$\frac{1}{f(k_3)} \cdot \log \frac{2,30 f(k_3)}{\lambda} = 0,40$$

y

$$\frac{1}{f(k_3)} \cdot \log v_d = \frac{1}{3,70} \cdot \log v_d,$$

y ello, alterando en pocas centésimas el coeficiente de mayoración. Entonces la [16], se convierte en la fórmula aproximada:

$$C_M = 0,933 + \frac{1}{5,55} \cdot \log v_d. \quad [16']$$

En fin, la [16] puede sustituirse a su vez por la fórmula práctica:

$$C_M = 0,95 + \frac{1}{6} \cdot \log v_d, \quad [16'']$$

que es más fácil de recordar y de aplicar, y da prácticamente los mismos resultados para los valores más frecuentes de v_d (tabla 4).

Para terminar este párrafo, se comprobarán las fórmulas propuestas, como sigue. En su anejo al comentario 3.7, la Instrucción H.A. 61 propone que las comprobaciones a fisuración se realicen con un coeficiente de mayoración igual a la unidad. Ello se ha deducido suponiendo que el valor de los daños producidos por la fisuración es de tres veces el coste del elemento (es decir, $v_d = 3$), y calculando el valor de C_M en gran número de casos, por el método de tanteos. El promedio de todos estos cálculos ha dado $C_M = 1$. Ahora bien, las fórmulas propuestas permiten obtener directamente este resultado. En efecto, sustituyendo en la [16'] v_d por su valor 3, se obtiene:

$$C_M = 0,933 + \frac{1}{5,55} \cdot \log 3 = 1,02 \approx 1,0.$$

La [16''] daría también:

$$C_M = 0,95 + \frac{1}{6} \cdot \log 3 = 1,03 \approx 1,0.$$

4

Fórmulas para calcular el coeficiente de mayoración en función de la probabilidad de hundimiento

Si, por cualquier motivo, no es deseable o factible aplicar el principio del coste generalizado mínimo, y puede en cambio fijarse de entrada la probabilidad de hundimiento de la estructura, esta última condición permite obtener C_M . En efecto, las fórmulas [12] y [15] dan:

$$C_M = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{f(k_3)} \cdot \log P \right]. \quad [17]$$

La [17] es la fórmula «exacta» para calcular C_M en función de P . Procediendo en forma análoga al párrafo anterior, se encuentra la fórmula aproximada:

$$C_M = 0,667 - \frac{1}{5,55} \cdot \log P, \quad [17']$$

y la práctica:

$$C_M = 0,70 - \frac{1}{6} \cdot \log P. \quad [17'']$$

Todas estas fórmulas se comparan entre sí en la tabla 5; se comprueba que sus resultados son prácticamente concordantes.

5

Ejemplos numéricos

Ejemplo I

Estructura para nave industrial. Módulos de 18 por 6 m². Características de los elementos:

- Losa nervada de cubierta, de 6 por 1,5 m². Volumen: 0,5 m³.
- Viga de cubierta, de 18 m de luz. Volumen: 4,0 m³.
- Columna de 5 m de puntal. Volumen: 1,0 m³.

Según ⁽¹⁾, en naves industriales el valor de los daños causados por el colapso puede estimarse a razón de 50 m³/m². Por tanto, para la losa de cubierta:

$$V_D = 6 \times 1,50 \times 50 = 450 \text{ m}^3,$$

y aplicando la [6 c]:

$$v_d = \frac{450}{0,5} = 900.$$

Sustituyendo en la [16'']:

$$C_M = 0,95 + \frac{1}{6} \cdot \log 900 = 1,44 \approx 1,4.$$

Análogamente, para la viga:

$$C_M = 0,95 + \frac{1}{6} \cdot \log \frac{6 \times 18 \times 50}{4,0} = 1,47 \approx 1,5,$$

y para la columna:

$$C_M = 0,95 + \frac{1}{6} \cdot \log \frac{6 \times 9 \times 50}{1,0} = 1,56 \approx 1,6 .$$

Ejemplo II

Este ejemplo se tomará de la Instrucción H.A. 61, lo cual permitirá comparar resultados. También, y como ilustración, se usarán, además de la fórmula práctica [16''], la exacta [16] y la aproximada [16']. El problema es el siguiente:

Un puente de carretera, de gran altura, con estructura de arco, tablero superior y tímpanos aligerados, arroja las siguientes cubicaciones estimadas:

— Soportes en tímpanos (8 m de altura máxima)... ..	130 m ³
— Tablero (400 m ² de área)	50 m ³
— Largueros	50 m ³
— Arcos gemelos	400 m ³
— Pavimento	68 m ³

La sobrecarga pesa tanto como 100 m³ de hormigón. Se pide calcular los coeficientes de mayoración para tablero, tímpano y arcos.

El coste de los daños causados por el colapso será, a razón de 100 m³/m² (1):

$$V_D = 400 \times 100 = 40.000 \text{ m}^3 .$$

Para el tablero, aplicando [16'']:

$$C_M = 0,95 + \frac{1}{6} \cdot \log \frac{40.000}{50} = 1,43 .$$

Por la fórmula aproximada [16']:

$$C_M = 0,933 + \frac{1}{5,55} \cdot \log \frac{40.000}{50} = 1,45 .$$

Para aplicar la fórmula exacta [16] debe obtenerse, previamente, por la [11]:

$$k_3 = \frac{100 + 68 + 50}{100} = 2,18 ,$$

y entonces, según la [13 a]:

$$f(k_3) = 3,80 - 0,19 \left(1 - \frac{1,18}{2} \right)^2 = 3,77 ,$$

y de acuerdo con la tabla 1:

$$\lambda = 0,25 .$$

Sustituyendo estos valores en la [16] se obtiene:

$$C_M = 1,45 (*) .$$

En la Instrucción H.A. 61 se obtiene, mediante tanteos:

$$C_M = 1,47 .$$

En la tabla 6 se reúnen estos resultados, así como los correspondientes tímpanos y arcos gemelos (**), cuya comprobación se propone al lector como ejercicio. Se observa la concordancia de los resultados.

Ejemplo III

Obtener el coeficiente de mayoración, para el cálculo de un tramo de la conductora principal para el acueducto de la Cuenca Sur, en La Habana. El volumen de cada tramo es aproximadamente 1,8 m³. En este caso es muy difícil estimar de entrada el valor de los daños, pero, dada la importancia indudable de los mismos, se tomará una probabilidad de hundimiento de uno en un millón. Sustituyendo en [17''] se obtiene:

$$C_M = 0,70 - \frac{1}{6} \cdot \log 10^{-6} = 1,70 .$$

Antes de aceptar definitivamente este valor de C_M , es interesante obtener a qué valor de V_D correspondería el mismo, para que se cumpla el principio del coste generalizado mínimo. Y ello interesa porque el valor de los daños causados por el colapso se relaciona más fácilmente con la experiencia cotidiana que la probabilidad de hundimiento. Por otra parte, el cálculo propuesto es simple, ya que basta eliminar C_M entre las [16''] y [17''] para obtener

$$P \cdot v_d = \frac{1}{32} \quad [18]$$

y, por tanto, la probabilidad de hundimiento asumida de 10^{-6} equivale a un coste relativo del colapso de:

$$v_d = \frac{10^6}{32} = 32.000 .$$

En fin, si se supone un coste de 6.000 ptas. para el m³ de hormigón, se obtiene, recorriendo la [6 c]:

$$V_D = 32.000 \times 1,8 \times 6.000 = 350.000.000 \text{ ptas.}$$

(*) Teóricamente, debía ahora revisarse el valor de $k_3 = 2,18$ arriba calculado, ya que, por ser $C = 1,5 \times 1,45 = 2,2$, el valor de V_p sería en realidad (tabla 7):

$$V_p = 50 \times 0,81 = 40,5 \text{ m}^3$$

y

$$k_3 = \frac{100 + 68 + 40,5}{100} = 2,09 .$$

Si se repite ahora el cálculo con este valor de k_3 , se obtiene $C_M = 1,45$, que coincide hasta la centésima con el resultado anterior. Se comprende que en la práctica puede excusarse el proceso iterativo esbozado, cuya necesidad teórica surge por la simplificación realizada en el párrafo 3 [ver nota (**) al principio del mismo].

(**) Prácticamente los coeficientes de mayoración se redondean a la décima, tal como se hizo en el ejemplo I. En la tabla 6 se ha preferido tomar una cifra más, para hacer más clara la comparación. Téngase en cuenta, sin embargo, que en los resultados tomados de la Instrucción H.A. 61, la cifra de las centésimas no es muy confiable, ya que los tanteos para obtener C se realizaron de décima en décima.

Es decir, que partiendo de un valor de los daños causados por el colapso igual a 350 millones de pesetas, y aplicando el principio del coste generalizado mínimo, se obtiene $C_M = 1,70$. Dados los notables inconvenientes que ocasionaría la paralización temporal de la conductora, causada por la rotura y reposición de uno de sus tramos, el valor anterior de V_D no es en modo alguno disparatado, y se acepta en definitiva el valor de 1,70 para C_M .

6

Conclusiones

a) La fórmula práctica

$$C_M = 0,95 + \frac{1}{6} \cdot \log v_d [16'']$$

permite calcular fácilmente el coeficiente de mayoración C_M en función del coste relativo del hundimiento v_d , y de modo que se cumple el principio del coste generalizado mínimo.

b) Las variaciones en la estimación de v_d , causadas por diferencias en los valores asumidos para V_D o V_0 , no afectan mucho relativamente a C_M . Por ejemplo, la [16''] permite comprobar que el aumento de v_d en un 50 % se traduce en un aumento de C_M igual a tres centésimas solamente.

c) La relación entre la probabilidad de hundimiento P y el coeficiente de mayoración, viene dada prácticamente por:

$$C_M = 0,70 - \frac{1}{6} \cdot \log P [17''] .$$

Anejo 1

Obtención del coste relativo de la estructura v_p como función del coeficiente de seguridad C .

Se justificará a continuación la fórmula

$$v_p = 1 + \lambda (C - C_0) \quad , \quad 1,5 \leq C \leq 3,0 [10] ,$$

en la cual los valores de λ correspondientes a $C_0 = 3$ vienen dados en la tabla 1.

En la tabla 7 se recogen los valores de v_p (k_2 , según la notación de la Instrucción H.A. 61) para distintos tipos de elementos; dichos valores han sido tomados del cuadro III, Apéndice 3.7, de la propia Instrucción. En la tabla 7 se incluyen también los incrementos Δ entre dos valores sucesivos de v_p , correspondientes a valores respectivos de C que difieren una décima entre sí. Se observa que para $1,5 \leq C \leq 3,0$ los valores de Δ , correspondientes a un mismo elemento, son prácticamente constantes; ello indica que, en este intervalo, la relación funcional $v_p - C$ es aproximadamente lineal (*). Como, por otra parte, la tabla 7 da, en todo caso, $v_p = 1$ para $C = 3$, queda justificada la forma de la [10], siempre que se considere $C_0 = 3$. Y esto último indica que, teóricamente, el valor de referencia V_0 del coste de la estructura debe corresponder a un coeficiente de seguridad tres; en la práctica, esta distinción no es importante [ver párrafo 6, inciso b)].

(*) Hay que advertir que esto no se verifica para valores de C superiores a 3. Una completa discusión de la relación funcional entre el coste de la estructura y el coeficiente de seguridad puede verse en (1).

Quedan ahora por justificar los valores de λ que aparecen en la tabla 1. Para ello, aplicando la [10] a dos valores sucesivos de v_p , y restando los resultados, se obtiene:

$$\Delta = [1 + \lambda(C + 0,1 - C_0)] - [1 + \lambda(C - C_0)],$$

es decir:

$$\Delta = 0,1 \lambda,$$

de donde:

$$\lambda = 10 \Delta. \quad [19]$$

Los valores de λ recogidos en la tabla 1 se obtienen sustituyendo en la [19] los valores promedio respectivos de Δ (tabla 7), y redondeando los resultados a la centésima.

Anejo 2

Obtención de la probabilidad de hundimiento P en función del coeficiente de seguridad C y de la relación carga total/sobrecarga k_3 .

Se incluye el gráfico presentado en (1), como representación, obtenida experimentalmente, de la función buscada.

Se trata de adaptar a este gráfico una expresión de la forma:

$$\log P = f(k_3) \cdot (1 - C) \quad [12],$$

donde:

$$f(k_3) = a + b \left(1 - \frac{k_3 - 1}{2} \right)^2, \quad 1 \leq k_3 \leq 3, \quad [20 a]$$

$$f(k_3) = f(3) = a, \quad k_3 \geq 3; \quad [20 b]$$

a y b son parámetros a determinar.

La forma de la [20 b] se justifica porque, en el gráfico presentado, las curvas se hacen prácticamente paralelas al eje de abscisas, para valores de $k_3 \geq 3$. Teniendo esto en cuenta, solamente es necesario considerar, en lo que sigue, valores de k_3 comprendidos entre uno y tres.

Si se definen dos nuevas variables x e y mediante las relaciones

$$x = \left(1 - \frac{k_3 - 1}{2} \right)^2, \quad [21 a]$$

$$y = \frac{\log P}{1 - C} = \frac{-\log P}{C - 1}, \quad [21 b]$$

las fórmulas [12] y [20 a] indican que entre ellas existe la dependencia lineal

$$y = a + b \cdot x, \quad [22]$$

y los parámetros a y b deben ser tales que la recta [22] sea la de mejor adaptación a los valores experimentales de x e y . Estos últimos valores se obtienen como sigue:

- 1.º Sustituyendo en la [21 a] distintos valores de k_3 se calculan los valores correspondientes de x . Por ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} k_3 = 1 \quad , \quad x = 1 \\ k_3 = 2 \quad , \quad x = 0,25 \\ k_3 = 3 \quad , \quad x = 0 \end{array} \right\} \quad [23]$$

- 2.º Para cada uno de los valores de k_3 dados por la [23], se asignan valores a C comprendidos entre 1,6 y 2,5, variando de décima en décima. El gráfico presentado permite entonces obtener los valores correspondientes de P .

- 3.º Los valores de y que corresponden a cada pareja de valores de C y P se calculan ahora por la [21 b].

El proceso anterior se realiza en la tabla 8. En la misma, las columnas (1), (2) y (3) se han obtenido del repetido gráfico de la Instrucción H.A. 61; las (4), (5) y (6) se explican por sí mismas, y la (7) recoge simplemente las igualdades de la [23].

Una vez obtenidos, de este modo, los valores experimentales de la x e y , la [22] permite plantear el error residuo:

$$r = y - a - b \cdot x,$$

y la suma de sus cuadrados:

$$z = \sum r^2 = \sum (y - a - b \cdot x)^2,$$

la cual debe ser un mínimo. Derivando sucesivamente z con respecto a a y a b , e igualando a cero estas derivadas, se obtienen las ecuaciones:

$$(n) a + (\sum x) b = (\sum y), \quad [24 a]$$

$$(\sum x) a + (\sum x^2) b = (\sum x y), \quad [24 b]$$

donde:

n es el número total de observaciones.

Las ecuaciones [24] resueltas simultáneamente dan:

$$a = \frac{(\sum y)(\sum x^2) - (\sum x)(\sum x y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}, \quad [25 a]$$

$$b = \frac{n(\sum x y) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}, \quad [25 b]$$

y la tabla 8 permite obtener fácilmente:

$$\begin{aligned} n = 30 \quad , \quad \sum x = 12,5 \quad , \quad \sum x^2 = 10,63 \quad , \quad \sum y = 111,42, \\ (\sum x)^2 = 156,25 \quad , \quad n(\sum x^2) = 318,9 \quad , \quad \sum x y = 45,39; \end{aligned}$$

valores que sustituidos en las [25] resultan por fin en:

$$a = 3,80,$$

$$b = 0,19,$$

lo cual justifica las fórmulas [13]. Por último, en la tabla 9 se obtiene la desviación típica relativa σ , que resulta ser igual a 1,4 %, según se adelantara en el párrafo 2.

10^5	1,38	1,33	1,31	1,35
10^4	1,11	1,07	1,05	1,08
10^3	0,83	0,80	0,79	0,81
10^2	0,55	0,53	0,53	0,54
v_d	Valores de $\frac{1}{f(k_3)} \cdot \log v_d$ para: $k_3 = 1$, $k_3 = 2$, $k_3 = 3$			
	$\frac{1}{3,70} \cdot \log v_d$			

$$y = \frac{1}{\frac{1}{3,70} \cdot \log v_d} \cdot \log v_d \cdot f(k_3)$$

Comparación entre:

TABLA 3

k_3	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
	0,37	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48
	0,36	0,37	0,39	0,41	0,43	0,45	0,47
	0,35	0,37	0,39	0,41	0,43	0,45	0,47

$$f(k_3) = f(3) = 3,80, \quad k_3 \geq 3, \\ f(k_3) = 3,80 - 0,19 \left(\frac{1}{2} k_3 - 1 \right), \quad 1 \leq k_3 \leq 3,$$

siendo:

$$\text{Valores de } \frac{1}{f(k_3)} \cdot \log \frac{1}{2,30 f(k_3)},$$

TABLA 2

Vigas	0,22
Forjados, bóvedas y arcos	0,25
Columnas hasta de 10 m	0,33
Columnas hasta de 20 m	0,35
Columnas hasta de 30 m	0,37

ELEMENTO

Valores de λ para $C_0 = 3$

TABLA 1

TABLA

Comparación entre:

$$C_M = 0,933 + \frac{1}{5,55} \cdot \log v_d [16']$$

y

$$C_M = 0,95 + \frac{1}{6} \cdot \log v_d [16''] .$$

v_d	C_M según [16']	C_M según [16'']
10^2	1,29	1,28
10^3	1,47	1,45
10^4	1,65	1,62
10^5	1,83	1,78

TABLA

Comparación entre:

$$C_M = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{f(k_3)} \cdot \log P \right] [17] ,$$

$$C_M = 0,667 - \frac{1}{5,55} \cdot \log P [17'] ,$$

y

$$C_M = 0,70 - \frac{1}{6} \cdot \log P [17''] .$$

P	C_M según [17]			C_M según [17']	C_M según [17'']
	$k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$k_3 = 3$		
10^{-3}	1,22	1,19	1,19	1,21	1,20
10^{-4}	1,40	1,38	1,37	1,39	1,37
10^{-5}	1,59	1,55	1,55	1,57	1,53
10^{-6}	1,77	1,73	1,72	1,75	1,70

TABLA

Comparación entre valores de C_M en el ejemplo II

Elemento	Fórmulas propuestas en este trabajo			Instrucción H.A. 61
	Práctica [16'']	Aproximada [16']	Exacta [16]	
Tablero	1,43	1,45	1,45	1,47
Tímpanos	1,36	1,38	1,35	1,40
Arcos gemelos	1,28	1,29	1,29	1,27

TABLA

Valores del coeficiente $k_2 = v_p$
(tomados de la Instrucción H.A. 61, 2.ª y 3.ª partes, pág. 368)

Valores de C	Valores del coeficiente $k_2 = v_p$					
	Forjados, bóvedas o arcos		Vigas		Soportes de altura h	
					$h = 10 \text{ m}$	
					$h = 20 \text{ m}$	
	v_p	Δ	v_p	Δ	v_p	Δ
1,5	0,629		0,660		0,500	
		0,026		0,024		0,033
1,6	0,655		0,684		0,533	
		0,026		0,024		0,034
1,7	0,681		0,708		0,567	
		0,026		0,024		0,033
1,8	0,707		0,732		0,600	
		0,026		0,024		0,033
1,9	0,733		0,756		0,633	
		0,026		0,024		0,034
2,0	0,759		0,780		0,667	
		0,026		0,024		0,033
2,1	0,785		0,804		0,700	
		0,025		0,023		0,033
2,2	0,810		0,827		0,733	
		0,025		0,023		0,034
2,3	0,835		0,850		0,767	
		0,024		0,022		0,033
2,4	0,859		0,872		0,800	
		0,025		0,023		0,033
2,5	0,884		0,895		0,833	
		0,024		0,022		0,034
2,6	0,908		0,917		0,867	
		0,025		0,022		0,033
2,7	0,933		0,939		0,900	
		0,023		0,020		0,033
2,8	0,956		0,959		0,933	
		0,024		0,018		0,034
2,9	0,980		0,981		0,967	
		0,020		0,019		0,033
3,0	1,000		1,000		1,000	
Δ Promedio		0,0247		0,0224		0,0333
						0,0353
						0,0370

TABLA

(1) k_3	(2) C	(3) $P \times 10^6$	(4) $-\log P$	(5) $C - 1$	(6) $y = \frac{(4)}{(5)}$	(7) x
1	1,6	6.500	2,19	0,6	3,65	1
1	1,7	3.000	2,52	0,7	3,60	1
1	1,8	1.500	2,92	0,8	3,66	1
1	1,9	650	3,19	0,9	3,54	1
1	2,0	300	3,52	1,0	3,52	1
1	2,1	130	3,89	1,1	3,52	1
1	2,2	47	4,33	1,2	3,60	1
1	2,3	22	4,66	1,3	3,58	1
1	2,4	8,5	5,17	1,4	3,68	1
1	2,5	3,0	5,52	1,5	3,69	1
2	1,6	5.600	2,25	0,6	3,75	0,25
2	1,7	2.500	2,60	0,7	3,72	0,25
2	1,8	1.200	2,02	0,8	3,65	0,25
2	1,9	460	3,34	0,9	3,71	0,25
2	2,0	195	3,71	1,0	3,71	0,25
2	2,1	85	4,07	1,1	3,71	0,25
2	2,2	32	4,49	1,2	3,74	0,25
2	2,3	13,5	4,87	1,3	3,75	0,25
2	2,4	4,5	5,35	1,4	3,82	0,25
2	2,5	1,65	5,72	1,5	3,82	0,25
3	1,6	5.000	2,30	0,6	3,83	0,00
3	1,7	2.300	2,64	0,7	3,78	0,00
3	1,8	1.000	3,00	0,8	3,75	0,00
3	1,9	420	3,38	0,9	3,76	0,00
3	2,0	170	3,77	1,0	3,77	0,00
3	2,1	70	4,15	1,1	3,77	0,00
3	2,2	26	4,58	1,2	3,82	0,00
3	2,3	10,5	4,92	1,3	3,78	0,00
3	2,4	3,7	5,43	1,4	3,82	0,00
3	2,5	1,3	5,89	1,5	3,92	0,00

TABLA

9

x	y observada	$y = 3,80 - 0,19 x$	r	r^2
1	3,65	3,61	+ 0,04	0,0016
1	3,60	—	— 0,01	0,0001
1	3,66	—	+ 0,05	0,0025
1	3,54	—	— 0,07	0,0049
1	3,52	—	— 0,09	0,0081
1	3,52	—	— 0,09	0,0081
1	3,60	—	— 0,01	0,0001
1	3,58	—	— 0,03	0,0009
1	3,68	—	+ 0,07	0,0049
1	3,69	—	+ 0,08	0,0064
0,25	3,75	3,75	0,00	0,0000
0,25	3,72	—	— 0,03	0,0009
0,25	3,65	—	— 0,10	0,0100
0,25	3,71	—	— 0,04	0,0016
0,25	3,71	—	— 0,04	0,0016
0,25	3,71	—	— 0,04	0,0016
0,25	3,74	—	— 0,01	0,0001
0,25	3,75	—	0,00	0,0000
0,25	3,82	—	+ 0,07	0,0049
0,25	3,82	—	+ 0,07	0,0049
0,00	3,83	3,80	+ 0,03	0,0009
0,00	3,78	—	— 0,02	0,0004
0,00	3,75	—	— 0,05	0,0025
0,00	3,76	—	— 0,04	0,0016
0,00	3,77	—	— 0,03	0,0009
0,00	3,77	—	— 0,03	0,0009
0,00	3,82	—	+ 0,02	0,0004
0,00	3,78	—	— 0,02	0,0004
0,00	3,82	—	+ 0,02	0,0004
0,00	3,72	—	+ 0,12	0,0144
Σ	111,42			0,0851

$$y_m = \frac{111,42}{30} = 3,71,$$

$$\sigma = \frac{1}{y_m} \sqrt{\frac{\Sigma r^2}{n}} = \frac{1}{3,71} \cdot \sqrt{\frac{0,0851}{30}} = \frac{0,0532}{3,71} = 0,014.$$

Referencias

- (1) Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento: «Instrucción H.A. 61 para el Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado» (2.ª y 3.ª partes). Madrid (1961).
- (2) Hernández, J. E.: «El Coeficiente de Seguridad en Estructuras de Hormigón Armado». Revista Ingeniería Civil. La Habana (enero de 1965).
- (3) Torroja, E., y Páez, A.: «La Determinación del Coeficiente de Seguridad en las Distintas Obras». Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento. Madrid.

Calcul direct du coefficient de majoration

Pimpo Hernández, ingénieur. Département de Structures, Université de La Havane

Des formules explicites sont obtenues pour le calcul du coefficient de majoration aux structures en béton armé. Ces formules sont basées sur le principe du coût généralisé minimal, à l'égal de la méthode proposée dans l'«Instrucción H.A. 61» pour le calcul des structures en béton armé (2e et 3e parties), publiée par l'Institut Eduardo Torroja, Madrid 1961, et permettent donc de parvenir à des résultats similaires à ceux obtenus par l'I.E.T., sans avoir à effectuer des essais. Pour la déduction des formules, des expressions analytiques approximatives sont préalablement obtenues du coût de la structure porteuse et de sa probabilité d'écroulement, comme des fonctions du coefficient de sécurité. L'auteur procède, en outre, à la résolution de quelques exemples numériques figurant dans ce travail qui est un résumé révisé de l'article intitulé: «El coeficiente de seguridad en estructuras de hormigón armado», par J. E. Hernández, revue «Ingeniería Civil», La Havane 1965.

Direct Calculation of the Safety Factor

Pimpo Hernández, engineer. Dept. of Structures, Havana University

In this paper explicit formulae are obtained for the calculation of the factor of safety in reinforced concrete structures. These formula are based on the principle of minimum generalised cost, in agreement with the method proposed in the «Instrucción H.A. 61 para el Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado» (2nd and 3rd parts), published by the Institute Eduardo Torroja, Madrid, 1961. Consequently they provide results similar to those of this H.A. 61 Instruction, avoiding the need to undertake trial and error methods. To obtain the formula, approximate analytical expressions of the cost of the structure, and of its probability of failure, are first worked out, as functions of the factor of safety. In the paper, numerical examples are also worked out. This paper is a revised summary of the article «The Factor of Safety in Reinforced Concrete Structures», by J. H. Hernández, «Revista de Ingeniería Civil», Havana, 1965.

Direkte Berechnung des Mehrwertkoeffizienten

Konstruktions-Abteilung. Universität La Habana. Pimpo Hernández, Ingenieur

Es werden ausdrückliche Formeln für die Berechnung des Mehrwertkoeffizienten bei Stahlbetonkonstruktionen demonstriert. Diese Formeln haben den untersten Kostenpunkt als Grundlage, sowie die in der «Norm H.A. 61 für die Berechnung der Stahlbetonkonstruktionen» (1961 2. u. 3. Teil) des «Instituto Eduardo Torroja», Madrid vorgeschlagene Methode. Sie ermöglichen in reakter Berechnung zu ähnlichen Ergebnissen wie Letzteres zu gelangen. Um die Formeln abzuleiten, werden erstmal annähernde analytische Kostenangaben für die Tragkonstruktion und ihr Senkungsrisiko als Funktionen des Sicherheitsfaktors berechnet. Dieser Beitrag ist eine bearbeitete Zusammenfassung des Aufsatzes «Der Sicherheitsfaktor bei Stahlbetonkonstruktionen», von J. E. Hernández.