



Análisis de comparación fractal de la Sagrada Familia con las Catedrales Góticas

Fractal analysis comparison between “Sagrada Familia” Temple and Gothic Cathedrals

A. Samper (*), B. Herrera (*)

RESUMEN

El Templo de la Sagrada Familia es considerado construcción no gótica. Esta negación, en parte, es debida por el conocido hecho de que la distribución de fuerzas, en el Gótico, queda contrarrestada estructuralmente con elementos de apoyo laterales. Sin embargo, en el Templo la distribución de fuerzas se contrarresta estructuralmente «de manera orgánica»; o sea, se neutraliza con la construcción de superficies cuádricas que de manera natural genera tal distribución. Sin negar lo anterior, aquí, con técnicas de Geometría fractal, descriptiva y computacional, aplicadas a las proyecciones básicas del proyecto del Templo, parametrizamos la característica consistente en la efectividad de ocupar espacio, la escabrosidad de sus elementos. Concluiremos que tal característica sí es gótica, con semejanza general a las catedrales góticas, y en especial con las catedrales de Burgos, París, Amiens y Chartres.

Palabras Clave: Sagrada Familia; Antoni Gaudí; parámetros fractales y arquitectura; Catedrales Góticas.

ABSTRACT

The “Sagrada Familia” is considered to be a no-gothic temple. This negation is due to the known fact that the force distribution in the Gothic style is structurally counteracted by means of support elements. In this temple, however, the force distribution is structurally counteracted “in an organic fashion”, i.e., it is neutralised through the construction of quadric surfaces which naturally generate such distribution. Without denying that the “Sagrada Familia” is a no-gothic building, in this paper we use fractal, descriptive and computational Geometry techniques and we apply them to the basic projections of the temple in order to parameterize the characteristic which describes the space-filling effectiveness of the design, the roughness of its elements. We conclude that such characteristic is indeed gothic and matches the Gothic style, particularly the cathedrals in Burgos, Paris, Amiens and Chartres.

Keywords: Sagrada Familia; Antoni Gaudí; fractal parameters and architecture; Gothic Cathedrals.

(*) Universitat Rovira i Virgili. Tarragona (España).

Persona de contacto/Corresponding author: blas.herrera@urv.net (B. Herrera)

Cómo citar este artículo/Citation: Samper, A., Herrera, B. (2015). Análisis de comparación fractal de la Sagrada Familia con las Catedrales Góticas. *Informes de la Construcción*, 67(538): e072, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.13.119>.

Licencia / License: Salvo indicación contraria, todos los contenidos de la edición electrónica de **Informes de la Construcción** se distribuyen bajo una licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento no Comercial 3.0. España (cc-by-nc).

1. INTRODUCCIÓN

Presentamos un análisis de geometría fractal de la obra más relevante de Antoni Gaudí: la Sagrada Familia. Este templo no es solamente su construcción más conocida, en la cual trabajó más tiempo (1883-1926), sino que es el proyecto que explica mejor la evolución de su obra y en el cual concentra los ideales espirituales, artísticos y técnicos del autor.

Ahora bien, un concepto del legado gaudiniano no se ha considerado con suficiente rigor geométrico, eliminando subjetividad, hasta este estudio: efectividad de ocupar espacio, rugosidad, escabrosidad de los elementos que constituyen sus estructuras. Las tres, son expresiones sinónimas y que concisamente llamaremos «escabrosidad» –en la Sección 2 mostraremos con rigor la teoría y generación de medida a tal concepto–.

La mejor herramienta para describirlo la ofrece la Geometría fractal a través del ratio llamado «dimensión fractal». Esta herramienta geométrica nos permite generar parámetros –parámetros fractales– que ofrecen medidas de tal concepto estructural de capacidad de ocupar espacio; que no es atribuible únicamente a elementos euclídeos, sino que además viene generada por el resultado arquitectónico de composición del diseño constructivo. Aquí mostraremos que la Sagrada Familia no sólo se rige por patrones euclídeos, sino que además su estructura posee semejanzas geométricas con las catedrales góticas, que vienen determinadas por su parametrización fractal.

1.1. Precedentes arquitectónicos con la teoría fractal

El creador de la Geometría Fractal fue Benoit Mandelbrot, exponiendo su teoría en *The Fractal Geometry of Nature*, en 1982. Además de las definiciones matemáticas de los elementos fractales presentaba una descripción de la estructura irregular de la naturaleza. Con esta nueva geometría, que superaba las limitaciones de la geometría Euclídea, explicaba cómo generar una medida para entes similares al contorno de nubes, líneas de costas, conductos de pulmones, etc.

Las teorías de esta geometría han evolucionado y se han aplicando en distintas disciplinas como el análisis de construcciones arquitectónicas. Inspirado por Mandelbrot, Bovill (1996) desarrolló un método de cálculo de un cierto parámetro fractal aplicado a dibujos arquitectónicos (1). Posteriormente, numerosos autores (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) usaron ideas similares para analizar cuestiones sobre el diseño de arquitectos como Le Corbusier, Wright, Eisenman, etc. Esas cuestiones se centran en la relación entre la estructura de las creaciones de tales arquitectos y el ambiente en el cual se proyectaron.

Mandelbrot (M) y Max Seitz (M.S.):

M.S.: La obra del arquitecto catalán Antoni Gaudí también podría considerarse un ejemplo de lo que usted dice. ¿No?

M.: ¡Claro! He ido a Barcelona a ver las obras de Gaudí y debo decir que él entendía este punto muy bien. Él llamaba orgánica a esta arquitectura; él trataba de imitar muchas de las formas de la naturaleza, como los árboles, que tienen naturaleza fractal. Orgánico y fractal son términos muy cercanos.

Mandelbrot y la belleza del caos.
Entrevista Max Seitz. BBC Mundo, 2005.

1.2. Diseños del estudio

Gaudí dedicó 43 años en proyectar y dejar pautas constructivas de la Sagrada Familia. Como remarcan los técnicos del Templo, lo hizo combinando formas geométricas elegidas por sus cualidades formales, estructurales, lumínicas, acústicas y constructivas: hiperboloides, paraboloides, helicoides y elipsoides. Estas leyes constructivas, que configuran el aspecto del templo y resumen el trabajo de la obra de Gaudí, provienen de la geometría euclídea. Sin embargo, como hemos dicho anteriormente, la mejor herramienta para describir la escabrosidad de sus estructuras la ofrece la Geometría fractal. La presente investigación no sólo la aplicamos al diseño final del Templo sino que hacemos un recorrido cronológico para observar la relación geométrica fractal que tiene el diseño definitivo con sus precedentes.

Nuestro análisis incorpora (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17):

1. Los diseños, en planta y alzado (Figura 1), de Francisco de Paula del Villar. En 1877 recibió el encargo por parte de la Asociación de Devotos de San José de construir el Templo de la Sagrada Familia. Pero del proyecto concebido por Villar sólo se construyó la cripta.
2. Los diseños iniciales de la planta de la Sagrada Familia de Gaudí (Figura 1). En 1883 Villar abandonó el proyecto. Ofrecido el encargo a Martorell, rehusó su realización y recomendó en cambio a Gaudí. Estos diseños sólo se encuentran en planta, no existe ningún documento en alzado y sección que las relacione geoméricamente.
3. Los diseños en planta, alzado y sección (Figura 1) de 15 catedrales góticas (Ávila, León, Burgos, Toledo, Barcelona, Santa María del Mar, Gerona, Reims, Chartres, Amiens, Laon, Estrasburgo, Colonia y Westminster) que se compararon con el diseño definitivo de Gaudí. Estas comparaciones fueron publicadas por la «Asociación Espiritual de Devotos de San José» a lo largo de 1917 en diferentes ediciones del *Propagador* y que en ese mismo año se recopilaron en un álbum explicativo de lo que era y sería el Templo de la Sagrada Familia. Era la expresión de un programa que mostraba lo que estaba realizado y que, mediante unos dibujos y modelos de yeso, presentaba lo que se convertiría en el futuro. Gaudí fue construyendo encima de estos esquemas toda una plástica inspirada en su observación de la naturaleza, que se concretó en el uso de formas alabeadas, ligeras y más resistentes.
4. Los diseños en planta, sección y alzados laterales (fachada del Nacimiento y fachada de la Pasión) actuales del Templo. La fachada principal no ha sido considerada para realizar los cálculos ya que, es la parte de la Sagrada Familia que menos información original hay y que se encuentra menos desarrollada.

Con toda esta información –redibujada y analizada según los criterios que explicaremos en los apartados 2, 3 y 4– formada por 53 documentos gráficos mostraremos que las catedrales góticas y la Sagrada Familia tienen relación paramétrica fractal común, desconocida hasta el momento, en su cualidad estética y constructiva.

1.3. Catedrales góticas y la sagrada familia

Gaudí conocía bien el Gótico (16) (17): trabajó en la restauración de la catedral de Mallorca, realizó para Joan Martorell el

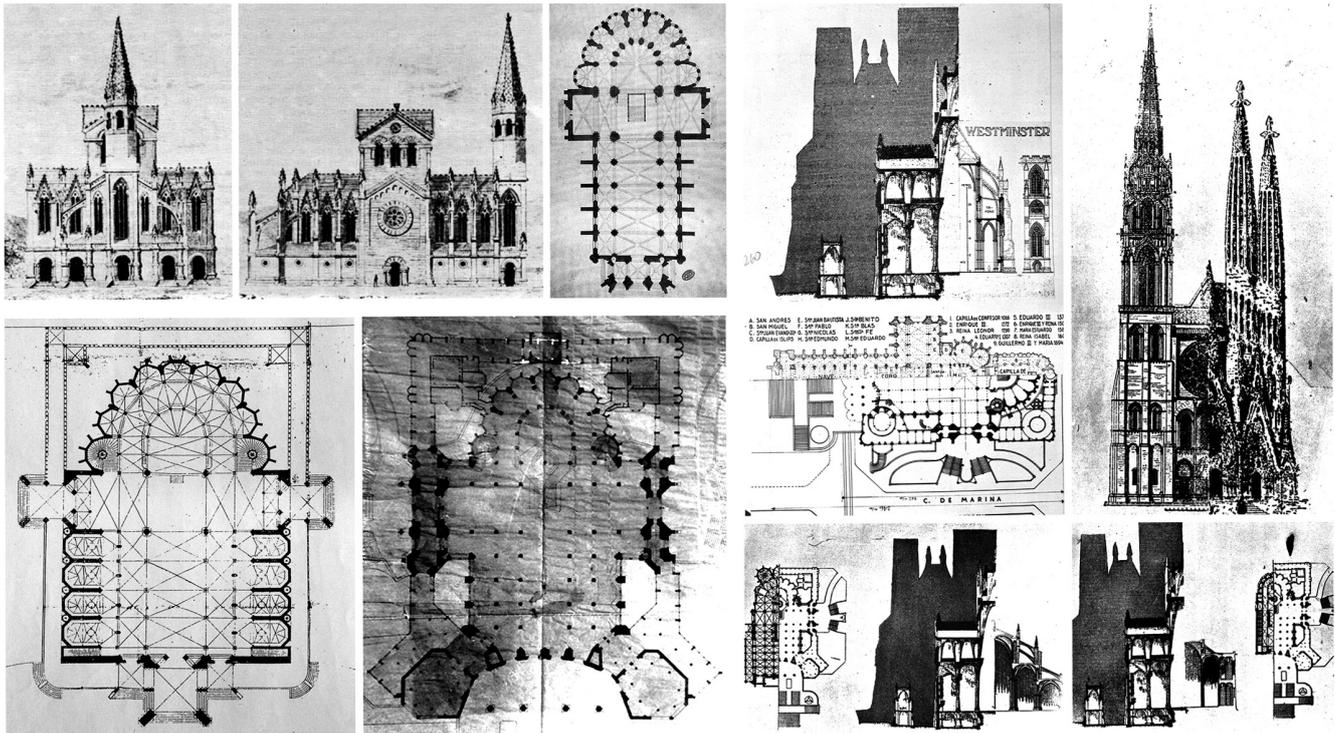


Figura 1. Arriba a la izquierda documentación referente al diseño de Villar. Debajo, plantas esquemáticas previas al diseño definitivo de Gaudí. A la derecha, selección representativa de cuatro catedrales (Westminster, Chartres, Toledo y Barcelona) que aparecen en el citado Álbum a modo de comparación.

proyecto para el concurso de la nueva fachada de la Catedral de Barcelona, y además junto con Rubió, uno de sus colaboradores técnicos más destacables, hizo estudios comparativos de las secciones de una buena colección de las mayores catedrales. Analizó esas edificaciones maestras del Gótico con el fin de aportar a al diseño del Templo sus virtudes y de subsanar las carencias de ese estilo con los mecanismos que ofrecían las técnicas y los sistemas constructivos contemporáneos.

Los técnicos responsables de la Sagrada Familia concluyen que Gaudí estudió los defectos en el sistema estructural gótico, que son los siguientes:

- a) Disgregación de cargas hacia elementos exteriores (contrafuertes, arbotantes), más expuestos y vulnerables.
- b) Entramado estructural excesivamente complejo y frágil. El derribo de una parte podría comportar la ruina de todo el edificio.
- c) Cubiertas ligeras de madera, vulnerables al fuego, humedades e insectos xilófagos.

Las aportaciones de Gaudí para perfeccionar el gótico, los técnicos las resumen en las siguientes:

- a) Doble cubierta de piedra, para dar larga vida al edificio.
- b) Verticalización de los esfuerzos y reducción de los empujes horizontales. Así consigue la supresión de los elementos estructurales que estaban expuestos en el exterior.
- c) Columnas inclinadas y ramificadas en forma de árbol.

Estas consideraciones constructivas le permitieron afinar y superar el estilo gótico (12): las bóvedas de hiperboloides tienen su centro donde las góticas tenían la clave, con la salvedad de que el hiperboloide permite crear un hueco en ese espacio,

dejando pasar la luz. Asimismo, en la intersección entre las bóvedas, donde las góticas tenían los nervios, el hiperboloide permite nuevamente la apertura de pequeños vanos. Esta visión orgánica de la arquitectura se complementó en Gaudí con una singular visión espacial que le permitía concebir sus diseños arquitectónicos de forma tridimensional, contrariamente a la bidimensionalidad del diseño en plano de la arquitectura tradicional. Finalmente, junto con la modulación del espacio, que lo subdividió en pequeños módulos independientes y auto-sustentantes, creó una estructura que soporta perfectamente los esfuerzos mecánicos de tracción sin la necesidad de utilizar contrafuertes, como requería el estilo gótico. Gaudí logró así una solución racional y estructurada, creando al mismo tiempo un nuevo estilo arquitectónico.

El citado Álbum evidenció el interés del equipo constructivo de Gaudí en explicar a la sociedad que la Sagrada Familia se estaba concibiendo siguiendo unos rasgos góticos que pautaban formalmente y compositivamente el conjunto. Con la presente investigación queremos analizar si el estudio realizado por Gaudí trasciende más allá de la geometría euclídea e incorpora parámetros fractales similares a los de las catedrales góticas que escogió en su momento como punto de partida para elaborar sus diseños. Además de aportar una descripción geométrica nueva, queremos comprobar si los resultados matemáticos ofrecen relación del estilo gótico con el diseño final de Gaudí. No compararemos los procesos constructivos entre las diferentes catedrales en las que se inspiró Gaudí; sino que calcularemos parámetros geométricos fractales, individuales y colectivos, asociados a la geometría de sus composiciones aportando los valores al estudio comparativo de la Sagrada Familia.

Señalamos que en el trabajo comparativo recopilado en el Álbum, aparecían 14 catedrales españolas, 6 francesas, una alemana y una inglesa. Sin embargo, para realizar el análisis

presentado en este artículo, hemos seleccionado, las 15 catedrales que son de estilo arquitectónico predominantemente gótico. Con esta muestra de catedrales góticas, significativa a nivel estilístico, temporal y geográfico, compararemos geoméricamente la Sagrada Familia con nuevos parámetros hasta el momento ignorados; analizar la geometría que ordena estas construcciones es el objetivo.

2. PARÁMETRO FRACTAL Y MÉTODO

Como resumen y a modo de explicación conceptual e intuitiva que aclare la técnica que seguidamente presentaremos, decimos:

La escabrosidad de un objeto, sea o no sea objeto fractal, geoméricamente se expresa como «su capacidad de ocupar espacio». La misma queda medida vía los llamados parámetros fractales. Los parámetros fractales son generados –como explicaremos en esta sección– a través de cálculos extrapolados de las medidas geométricas teóricas de la escabrosidad de los objetos fractales; y estas medidas teóricas son las diferentes dimensiones geométricas de los fractales –las cuales mostraremos también seguidamente–. Dicho intuitivamente: la escabrosidad es el comportamiento de infiltración en varias escalas que perpetra el objeto en el espacio; y un parámetro fractal es un valor que ofrece una medida de tal infiltración que marca cuánto parece tal objeto llenar el espacio conforme se amplía a escalas cada vez más finas.

Este concepto geométrico, como hemos dicho, es aplicado en diferentes ámbitos de la ciencia. Así por ejemplo, en la Medicina: al considerar las redes neuronales y sus patologías o al considerar qué rugosidad tienen los diferentes pólenes para así saber cuáles son más o menos malignos para los alvéolos de los pulmones, etc; en la Electrónica: al considerar cómo se comportan físicamente los circuitos en escalas de fabricación más pequeñas, etc; en la Química: al obtener diferentes propiedades de las sustancias en función de su escabrosidad. Y así podríamos seguir con diferentes ámbitos; y como hemos dicho en la introducción del presente artículo, también se ha aplicado en la Arquitectura, con trabajos como: obtener evidencia sobre la influencia objetiva entre diferentes obras de arquitectos de renombre (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8); u obtener evidencia matemática relativa de si ciertos arquitectos importantes diseñaron sus obras respetando o no la continuidad visual y compositiva del ambiente artificial o natural en el cual proyectaron la construcción.

En el caso concreto del estudio presente, el ámbito es la Arquitectura y los objetos que tratamos son estructuras arquitectónicas –las cuales no son objetos fractales– y sobre ellas aplicamos la técnica geométrica de cálculo para generar los parámetros fractales que explicaremos seguidamente. De forma intuitiva resumimos el proceso de la manera siguiente: Primero se consideran las secciones que mejor representan la edificación (planta, alzado y sección). Seguidamente y para cada una de estas secciones, se aplica un primer mallado cuadrangular de un cierto tamaño de arista. Se prosigue con el cómputo de celdas que contienen líneas que configuran tales secciones arquitectónicas. Se continúa aplicando un segundo mallado de regiones cuadradas con aristas de tamaño la mitad que el primero y se procede de nuevo al cálculo del número de celdas que contienen información gráfica arquitectónica. Estos pasos se repiten seguidamente dos veces más hasta aplicar una malla de arista dieciséis veces más pequeña que la

primera. Finalmente con todas estas cantidades de regiones de diferentes escalas, en las que se ha infiltrado la estructura arquitectónica, se procede al cómputo que genera el parámetro fractal. Tal cómputo final del parámetro de escabrosidad de la estructura, como veremos, queda determinado por la teoría geométrica de las dimensiones de los objetos fractales –el por qué cuatro mallados de los planos y cuál es el tamaño de los mismos, se explica en la presente sección–.

Finalmente con todos los datos anteriores generados para las diferentes estructuras analizadas, se procede a un robusto estudio estadístico sobre todos los valores obtenidos para alcanzar, en consecuencia, resultados geométricos no subjetivos, a la vez que expresables en lenguaje arquitectónico, como presentaremos en las conclusiones del presente trabajo.

2.1. Dimensión fractal

Fijaremos algunos conceptos básicos, si el lector desea ver referencias matemáticas y demostraciones puede acudir a (18).

En Geometría fractal podemos considerar un par de objetos (M, N) tal que:

$$M = h_r(N) \text{ y } M = \coprod_{i=1}^{i=m} g_i(N) \quad [1]$$

(M es homotético a N por una homotecia h_r de radio r) donde $g_i(N)$ es un desplazamiento de N –en [1] la unión es disjunta–. Entonces se dice que posee estructura homotética y su dimensión de homotecia es:

$$H(M) = \log_r(m) \quad [2]$$

Los objetos homotéticos son casos particulares de los denominados auto-similares. Sea M un objeto acotado no vacío del espacio euclídeo A^n , tal que $M = \coprod_{i=1}^{i=m} S_i(M)$ donde S_i es una semejanza contractiva, o sea, $S_i: A^n \rightarrow A^n$ tal que $\forall (x, y) \in A^n \times A^n \Rightarrow d(S_i(x), S_i(y)) = k_i d(x, y)$ con $0 < k_i < 1$. Entonces M es llamado objeto auto-similar, y su dimensión de auto-similitud es el valor $S(M)$ tal que $\sum_{i=1}^{i=m} k_i^{S(M)} = 1$. Si un objeto auto-similar M es homotético entonces $S(M) = H(M)$.

Además, los objetos M del espacio A^n poseen su dimensión topológica $T(M)$, donde $T(M)$ 1, 2 o 3 si M es línea, superficie o cuerpo tridimensional, respectivamente.

Aunque M sea auto-similar, si $S(M) = T(M)$ entonces se dice que M es objeto auto-similar no fractal. Pero, cuando M es auto-similar, y además $S(M) \neq T(M)$ se dice que el objeto auto-similar M es fractal. Sin embargo, en general los objetos M no tienen estructura homotética ni estructura auto-similar, por consiguiente no poseen dimensión homotética $H(M)$ ni de auto-similitud $S(M)$. Aún así, existe una generalización de la dimensión de auto-similitud $S(M)$ llamada dimensión de Hausdorff-Besicovich, la notaremos $D(M)$. Si M , con o sin estructura homotética o auto-similar, verifica que $D(M) \neq T(M)$ entonces a M se le llama objeto fractal.

La definición de $D(M)$ usa conceptos geométrico-matemáticos que están fuera del objetivo del presente trabajo. Intuitivamente puede decirse que un objeto es un fractal cuando en una cantidad infinita de sus puntos no posee espacio tangente, o dicho de otra forma, que posee una cantidad infinita de pun-

tos donde se visualiza como quebrado. En cualquier caso, dado que el cálculo de $D(M)$ está fuera de este trabajo, consideramos otro valor $\bar{F}(M)$ que consiste en una cota superior de $D(M)$. Esta cota, $\bar{F}(M) \geq D(M)$, es llamada dimensión de Minkowski-Bouligand de M , también llamada dimensión fractal superior de M . El objeto M puede ser fractal o no; pero, independientemente de esta condición, $\bar{F}(M)$ ofrece una medida de su irregularidad, efectividad de ocupar espacio, de escabrosidad.

Existe un teorema que afirma: para calcular $\bar{F}(M)$ se consideran mallas del espacio formadas por cubos, la dimensión de la arista de los mismos es $a_m = 2^{-m}$; al ir variando las mallas con la dimensión de la arista, se procede al cálculo del límite [3], el cual es $\bar{F}(M)$, donde s_m es el número de cubos intersecados en cada malla por M ,

$$\bar{F}(M) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln(s_m)}{\ln(2^m)} \quad [3]$$

Por ello a $\bar{F}(M)$ también se le llama dimensión fractal superior de conteo de cajas. Se tiene que si $\bar{F}(M)$ coincide con

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \inf \frac{\ln(s_m)}{\ln(2^m)},$$

entonces existe

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln(s_m)}{\ln(2^m)} = F(M) \text{ y } \bar{F}(M) = F(M).$$

Este límite $F(M)$, si existe, es llamado dimensión fractal de M o dimensión fractal de conteo de cajas de M .

En (18) se encuentra que:

- 1) $T(M) \leq D(M) \leq \bar{F}(M) \leq n$.
- 2) Si M es objeto auto-similar entonces $D(M) = F(M) = S(M)$.

El límite [3] es un límite teórico de un objeto geométrico M ; sin embargo, en los casos reales como estructuras arquitectónicas, el límite teórico [3] siempre es cambiado por un cálculo finito extrapolado del mismo. Este cálculo extrapolado es el que genera un parámetro que llamamos parámetro fractal $P(M)$, y ofrece una medida de la escabrosidad de M .

2.2. Parámetros fractales y método de cálculo

Tras plasmar la base teórica de $\bar{F}(M)$, explicamos el proceso de generación de parámetros fractales $P(M)$.

Las estructuras arquitectónicas M no son objetos fractales, sin embargo podemos considerar su efectividad de ocupar espacio, su escabrosidad. Y podemos generar parámetros que midan esta característica.

Dado que la estructura arquitectónica M es un objeto real no fractal, el parámetro generado no puede ser el valor teórico $D(M)$ ni $\bar{F}(M)$. La estructura arquitectónica M , aunque posea repeticiones en algunas escalas, realmente no tiene estructura homotética ni auto-similar. Por ello, extrapolaremos los cálculos teóricos de $\bar{F}(M)$ y $S(M)$ para generar parámetros que den medidas de la escabrosidad, que llamaremos $P_s(M)$ y $P_r(M)$.

Serán parámetros que considerarán dos aspectos: el parámetro $P_s(M)$ medirá la escabrosidad sin tener en cuenta el aspecto de auto-similitud, provendrá directamente del proceso teórico descrito en [3] para $\bar{F}(M)$; y el parámetro $P_r(M)$

medirá la escabrosidad pero teniendo en cuenta el aspecto de auto-similitud. Como estos parámetros provienen de extrapolaciones teóricas no aplicables a la estructura real M , no son separables del proceso de generación. En consecuencia, cualquier estudio con tales parámetros requiere dos condiciones: una consiste en fijar el proceso de generación de los parámetros, y la segunda consiste en que los resultados de tal estudio no son los parámetros sino las conclusiones generales que se extraen de los mismos con independencia de sus valores concretos.

2.2.1. Resumen de generación de parámetros fractales de una estructura arquitectónica (M)

Previamente recogemos toda la información gráfica necesaria, para ello damos las gracias a: La Oficina Técnica de la Sagrada Familia y a uno de sus responsables el arquitecto Dr. Jaume Serrallonga, la Cátedra Gaudí de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura, el Archivo del Colegio Oficial de Arquitectos de Catalunya, el Archivo Oficial del Templo y las Archidiócesis de las catedrales de estudio.

Seguidamente generamos una imagen redibujada. Este redibujado es ineludible para la investigación por los siguientes motivos: las técnicas de geometría fractal, descriptiva y computacional necesitan eliminar todo el «ruido» (sombras, manchas, brillos, defectos, etc.) que poseen las imágenes originales; los gráficos iniciales suelen tener diferentes estilos e inadecuada resolución para poder aplicar cálculos; y se requiere alto nivel de objetividad, criterio gráfico homogéneo y mismo nivel de detalle sin tener en cuenta las texturas (19). Sobre las tres secciones básicas más representativas (planta, elevación frontal y sección transversal) haremos los correspondientes cálculos matemáticos. En la Figura 2 mostramos el nivel de detalle de los redibujados, siguiendo estrictamente las líneas que mejor representan la geometría de las proyecciones.

El resumen del proceso de generación de los parámetros $P_s(M)$ es:

1. Dada la estructura arquitectónica, generamos su diseño en formato vectorial de AutoCad, generamos su diseño en formato vectorial de AutoCad en color negro y anchura de línea 0,00 mm (o sea, mínimo grosor de la herramienta informática CAD). Con él obtenemos su formato vectorial pdf.
2. Desde el formato pdf generamos un fichero digital N , de tipo blanco-negro en mapa de bits, con tamaño $1024 \times v$ píxeles, ajustando la imagen de M al total del ancho y alto.
3. $P_s(M)$.- Usando nuestro propio programa informático calculamos el parámetro fractal $P_s(M)$ basado en el cálculo de la pendiente en el último punto de un gráfico continuo $\ln - \ln$ o sea el cálculo de la tangente del ángulo formado por la recta tangente a la gráfica de la función en el punto, o sea, la derivada en tal punto-.

Creamos nuestro propio programa porque así tenemos control total de los cálculos, aseguramos su corrección, y porque los programas comerciales, como el llamado Benoit 1.31 de TruSoft Int'I Inc, no calculan la pendiente en el último punto del gráfico continuo $\ln - \ln$ que, como veremos más adelante, es precisamente la extrapolación del límite teórico de [3] por tanto es un parámetro $P_s(M)$.

Ahora, cambiando el paso 3 generamos los parámetros $P_r(M)$:

3. $P_r(M)$.- Usando nuestro programa, calculamos el parámetro fractal $P_r(M)$ basado en el cálculo de la pendiente de la recta de regresión correspondiente a un conjunto discreto de puntos del gráfico continuo $ln - ln$.

Para no dejar lugar a dudas, generaremos otros parámetros de tipo $P_r(M)$, que consideran la recta de regresión, con el uso del programa comercial Benoit, y con las variables que tal programa usa por defecto. A estos parámetros los llamaremos $P_b(M)$, y sustituyendo el paso 3 queda:

3. $P_b(M)$.- Usando el programa Benoit, calculamos el parámetro fractal $P_b(M)$ basado en el cálculo de la pendiente de la recta de regresión correspondiente a un conjunto discreto de puntos del gráfico continuo $ln - ln$.

Con todo, obtenemos los parámetros $P_s(M)$, $P_r(M)$ y $P_b(M)$.

2.2.2. Método de cálculo

Con la base teórica y del resumen anterior, procedemos a explicar con detalle la generación de los parámetros fractales. En la Figura 3 mostramos un ejemplo que consiste en la baldosa, diseñada por Antoni Gaudí, para el Paseo de Gracia de Barcelona.

Como N es un fichero de imagen pixelada, el proceso de cálculo tendrá un número finito de pasos. Así (Figura 3), extrapolando el cálculo teórico [3], siguiendo las mallas teóricas mencionadas en la sección 2.1 para el cálculo de $\bar{F}(M)$, usaremos la malla cuadrada más fina de $2^2 \times 2^2$ píxeles –los cuadrados de 4×4 píxeles son los más pequeños que tienen a la vez puntos interiores y puntos de frontera–. Por tanto, usaremos cuatro mallas cuadradas, las cuales tienen 4, 8, 16 y 32 píxeles de longitud de arista. La razón de usar cuatro mallas es que, como veremos más adelante, $P_s(M)$ lo generaremos con la pendiente de una función continua $ln - ln$ (Figura 3), y con métodos clásicos de interpolación, 4 puntos de una función son suficientes para tener una buena aproximación de tal pendiente. No usaremos más de 4 puntos de interpolación por el Fenómeno de Runge en el cálculo numérico.

Entonces, nuestro programa informático procede a generar la malla, que hemos llamado g_5 con $32 \times h_5$ cajas cuadradas cuya dimensión de arista es $a^5 = 1024 \times 2^{-5} = 32$ píxeles, y la aplica sobre N . Calcula entonces el logaritmo neperiano $ln(s_5)$ donde s_5 es el número de cajas de g_5 con píxeles negros.

Seguidamente se repite el proceso con otras mallas, g_6, g_7 y g_8 sobre N con $64 \times h_6, 128 \times h_7, 256 \times h_8$ cajas cuadradas, respectivamente. La dimensión de las aristas es $a_6 = 1024 \times 2^{-6} = 16, a_7 = 1024 \times 2^{-7} = 8$ y $a_8 = 1024 \times 2^{-8} = 4$, respectivamente. Consecutivamente procede al cálculo $ln(s_6), ln(s_7)$ y $ln(s_8)$ donde s_6, s_7 y s_8 son las cantidades de cajas con píxeles negros en cada malla g_6, g_7 y g_8 . Por ejemplo, los vectores del ejemplo son: $(h_5, h_6, h_7, h_8) = (31, 63, 127, 254), (s_5, s_6, s_7, s_8) = (898, 2807, 8293, 26960)$. Con lo anterior se obtienen cuatro puntos de coordenadas $(ln(2^5), ln(s_5)), (ln(2^6), ln(s_6)), (ln(2^7), ln(s_7)), (ln(2^8), ln(s_8))$, de una gráfica logarítmica $ln - ln$.

Parámetro $P_s(M)$:

Seguidamente, nuestro programa procede a calcular la pendiente de la gráfica continua $ln - ln$ en el cuarto punto $(ln(2^8), ln(s_8))$, la cual es la medida $P_s(M)$, es una aproximación del límite teórico [3]. Esta afirmación es cierta ya que puede considerarse [4] y la regla de l'Hôpital. Para proceder al cálculo de esta pendiente, el programa implementa la fórmula clásica de cuatro puntos [5], donde $h = ln(2)$ y $y_i = ln(s_{i+5})$. En el ejemplo se obtiene $P_s(M) \approx 1,84$.

$$ln(2^n) = x, ln(s_n) = f(x), \frac{ln(s_n)}{ln(2^n)} = \frac{f(x)}{x} \quad [4]$$

$$y'_3 \approx \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) = P_s(M) \quad [5]$$

Parámetro $P_r(M)$:

Consideramos ahora el aspecto de auto-similitud. En los casos teóricos, tal condición hace que el gráfico continuo $ln - ln$ sea una línea recta y su pendiente es la dimensión teórica $S(M)$. Por tanto, para generar un parámetro $P_r(M)$ nuestro programa procede al cálculo de la pendiente de la recta de regresión del conjunto discreto de los cuatro puntos pertenecientes al gráfico $ln - ln$. Así, calcula el cociente de covariancias $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}$ donde:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{i=4} (y_i - \bar{y})((5+i)ln(2) - \bar{x}) \quad [6]$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{i=4} ((5+i)ln(2) - \bar{x})^2 \quad [7]$$

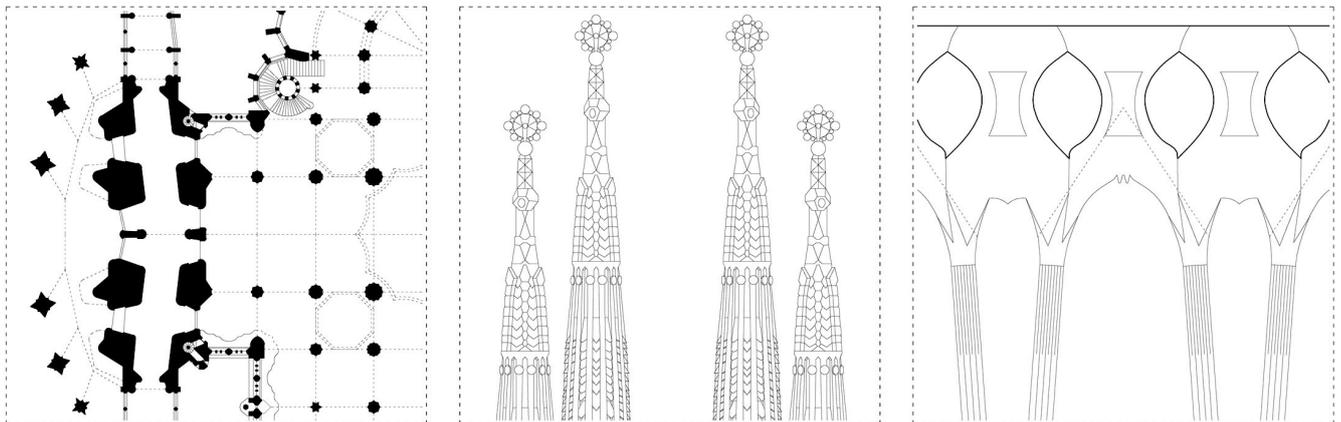


Figura 2. Ejemplo gráfico del nivel de redibujado. Aquí, muestra de la planta, el alzado y la sección de la Sagrada Familia.

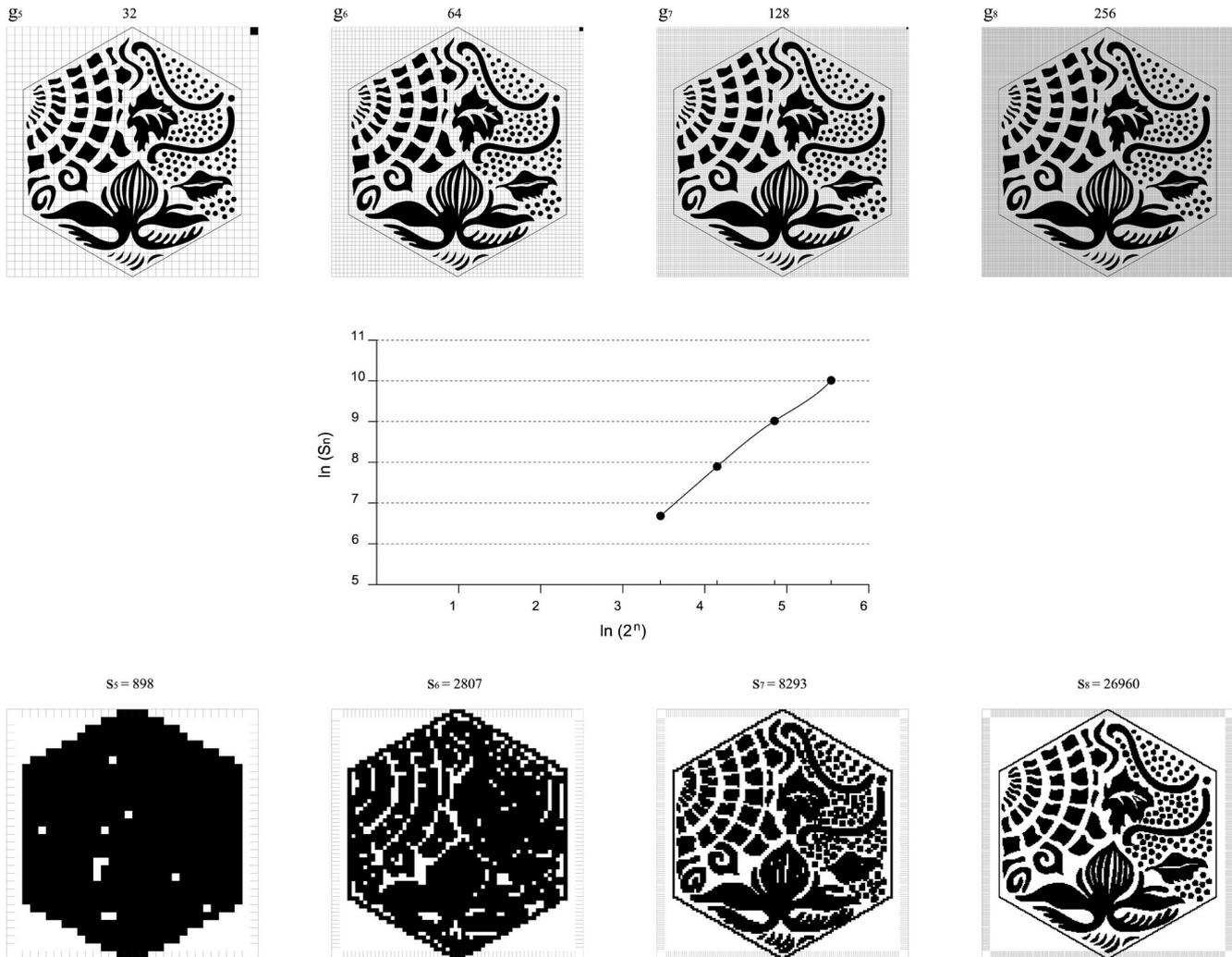


Figura 3. Mallas en el cálculo de parámetros fractales de la baldosa. Al centro, gráfica continua correspondiente al mismo ejemplo.

$$\bar{x} = \frac{5+6+7+8}{4} \ln(2), \bar{y} = \frac{y_0 + y_1 + y_2 + y_3}{4} \quad [8]$$

Este cociente es el parámetro fractal $P_r(M)$. En el ejemplo se obtiene $P_r(M) \approx 1,63$.

Parámetro $P_b(M)$:

El programa Benoit permite la generación de un parámetro similar al $P_r(M)$, a partir del fichero N . Usa 22 mallas como variables por defecto; la más gruesa es de cuadrados con 256 píxeles de arista; cada una de las siguientes formada por cuadrados con un número de píxeles de arista igual al número de la anterior dividido por 1,3. Obtiene 22 puntos del gráfico $\ln - \ln$ y procede a calcular la pendiente de su recta de regresión. El valor obtenido será un parámetro fractal de tipo similar a $P_r(M)$ –basado en el aspecto de auto-similitud– que llamaremos parámetro $P_b(M)$. En el ejemplo se obtiene $P_b(M) \approx 1,72$.

3. MATERIAL REDIBUJADO REQUERIDO PARA EL CÁLCULO Y ANÁLISIS

En este capítulo mostraremos parte de todo el material redibujado y utilizado para realizar los cálculos de parametrización fractal. Para no extender el artículo, el redibujado del proyecto de Villar y los diseños preliminares en planta de la Sagrada Fa-

milia no los mostraremos directamente. No obstante, ambos dibujos aparecen en versión original en la Figura 1.

Quisiéramos puntualizar que en la Figura 4, además de mostrar, a modo de ejemplo, siete de las quince catedrales redibujadas, se compara la Sagrada Familia con las catedrales Góticas de forma similar a cómo las mostraron Gaudí y sus discípulos en el Álbum de 1917. Esta forma de presentar el redibujado –comparación de medias plantas– no es vinculante al método y resolución de cálculo; es solamente ilustrativa. Para el cálculo se han introducido, de forma completa y por separado, cada una de las 15 plantas, 15 alzados y 15 secciones.

3.1. La sagrada familia y las catedrales góticas (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30)

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Resultados

Aplicando el método de cálculo de 2.2.2 al proyecto de construcción de la Sagrada Familia (Figuras 4 y Figura 5) obtenemos los vectores (s_5, s_6, s_7, s_8) y los $P_s(M)$, $P_r(M)$ y $P_b(M)$ de las proyecciones del Templo, recogidos en la Tabla 1. Igualmente, para las proyecciones de las 15 Catedrales góticas (Figura 4) obtenemos los vectores y parámetros, recogidos en la Tabla 2.

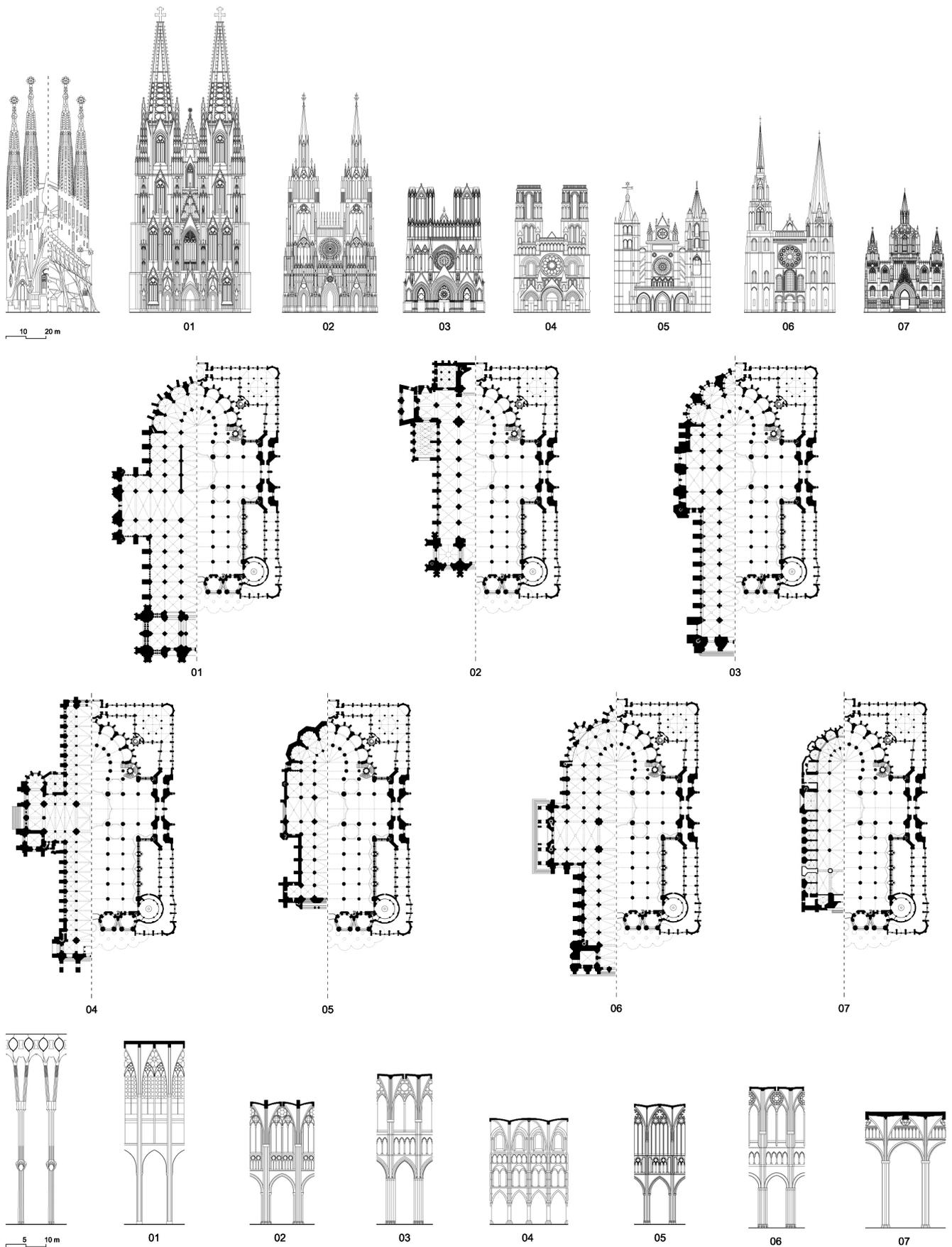


Figura 4. Parte del redibujado comparativo con el diseño final: 01-Colonia, 02-Estrasburgo, 03- Reims, 04-Laon, 05- León, 06- Chartres y 07- Barcelona.

Tabla 1.

	(S_5, S_6, S_7, S_8)	P_s	P_r	P_b	Criterio de comparación global
Alzado F.Villar	(766,2241,5816,13812)	1,20	1,39	1,40	$\xi \lesssim E = 16\% \lesssim \xi + \frac{\xi}{2}$; $\xi = 10\%$, Casi representativo
Planta F.Villar	(1101,3444,9826,27441)	1,50	1,54	1,60	$E = 1\% \lesssim \xi - \frac{\xi}{2}$; $\xi = 7\%$, Muy representativo
Alzado del Nacimiento	(2126,7054,20541,54517)	1,36	1,56	1,56	$E = 3\% \lesssim \xi - \frac{\xi}{2}$; $\xi = 10\%$, Muy representativo
Alzado de la Pasión	(1481,4987,14931,38948)	1,27	1,57	1,55	$E = 3\% \lesssim \xi - \frac{\xi}{2}$; $\xi = 10\%$, Muy representativo
Planta preliminar 1	(915,2701,7173,17887)	1,29	1,43	1,48	$\xi + \frac{\xi}{2} < E = 16\%$; $\xi = 7\%$, No representativo
Planta preliminar 2	(693,1791,4433,10847)	1,30	1,32	1,42	$\xi + \frac{\xi}{2} < E = 21\%$; $\xi = 7\%$, No representativo
Planta diseño final	(1010,2754,7387,19969)	1,45	1,43	1,52	$E = 8\% \lesssim \xi$; $\xi = 7\%$, Representativo
Sección diseño final	(1054,3106,8339,19681)	1,13	1,41	1,39	$\xi \lesssim E = 14\% \lesssim \xi + \frac{\xi}{2}$; $\xi = 11\%$, Casi representativo

Tabla 2.

Catedral de:	Alzado			Planta			Sección		
	P_s	P_r	P_b	P_s	P_r	P_b	P_s	P_r	P_b
Amiens	(1128,3866,11656,29874)			(1449,4292,11624,30418)			(1788,6127,18364,50930)		
	1,22	1,58	1,54	1,39	1,46	1,56	1,44	1,61	1,56
	15% AN, 5% AP			8%			51%		
Ávila	(973,2745,7659,18673)			(1299,4034,11432,32904)			(916,2941,8335,20759)		
	1,13	1,43	1,41	1,59	1,55	1,63	1,22	1,50	1,47
	36% AN, 29% AP			21%			18%		
Barcelona	(954,3480,11335,33243)			(1825,5505,15720,43876)			(666,1990,5551,13865)		
	1,48	1,71	1,60	1,48	1,53	1,62	1,22	1,46	1,44
	27% AN, 34% AP			12%			15%		
Burgos	(1550,5058,15102,41365)			(946,2918,7951,21983)			(1324,4157,10362,25183)		
	1,39	1,58	1,55	1,54	1,51	1,59	1,36	1,41	1,44
	5% AN, 12% AP			16%			24%		
Chartres	(1237,3916,10939,28075)			(1128,3654,10658,28952)			(1571,4888,12944,30644)		
	1,32	1,50	1,48	1,41	1,56	1,59	1,19	1,43	1,46
	10% AN, 12% AP			17%			7%		
Colonia	(1913,6832,22214,64990)			(1233,3821,10531,29012)			(1672,4754,12089,31434)		
	1,47	1,70	1,65	1,52	1,51	1,60	1,46	1,40	1,45
	25% AN, 36% AP			15%			34%		
Estrasburgo	(1532,5414,17073,44325)			(955,2957,8256,23092)			(1323,4386,12034,29699)		
	1,20	1,62	1,58	1,54	1,53	1,61	1,27	1,49	1,50
	23% AN, 13% AP			18%			22%		
Gerona	(882,2468,6880,17865)			(1389,4459,13307,40815)			(957,2997,8879,22966)		
	1,29	1,45	1,43	1,68	1,62	1,64	1,23	1,53	1,46
	17% AN, 14% AP			42%			23%		
Laon	(1384,4716,13904,35030)			(1121,3726,10948,30914)			(1033,3253,8551,18751)		
	1,21	1,55	1,53	1,51	1,59	1,63	1,00	1,39	1,42
	15% AN, 8% AP			21%			14%		
León	(987,3138,8982,22500)			(1516,4463,12517,36997)			(1596,5028,14706,42798)		
	1,22	1,50	1,47	1,65	1,53	1,62	1,57	1,58	1,55
	20% AN, 13% AP			30%			61%		
Mar	(863,2700,8363,23576)			(1590,4686,12394,33689)			(412,1385,4011,11008)		
	1,39	1,59	1,54	1,53	1,46	1,55	1,46	1,58	1,39
	7% AN, 13% AP			11%			50%		
París	(1151,3805,12038,32454)			(2083,6427,17992,50208)			(1241,3673,9682,23367)		
	1,26	1,61	1,56	1,52	1,53	1,63	1,22	1,41	1,40
	15% AN, 5% AP			10%			10%		
Reims	(1374,4592,14584,40203)			(1720,5023,14585,41123)			(1579,4911,13876,37304)		
	1,32	1,63	1,59	1,46	1,53	1,61	1,41	1,52	1,50
	11% AN, 10% AP			10%			39%		
Toledo	(687,2460,7868,23826)			(1752,5512,15396,42101)			(1191,3842,10491,29132)		
	1,59	1,70	1,59	1,48	1,52	1,62	1,57	1,53	1,52
	37% AN, 44% AP			21%			56%		
Westminster	(1564,5641,17214,45319)			(882,3113,9535,25907)			(1581,4724,11259,27319)		
	1,30	1,62	1,58	1,37	1,62	1,63	1,41	1,36	1,42
	12% AN, 7% AP			28%			33%		

Seguidamente, mostraremos que podemos eliminar del estudio los parámetros comerciales $P_b(M)$. Para ello exponemos que $P_r(M)$ y $P_b(M)$ de las Tablas 1 y 2, poseen una muy alta correlación lineal; en consecuencia sólo consideramos $P_s(M)$ y $P_r(M)$. De la Tabla 1 se obtiene la media $m_r \approx 1,46$ de los 8 parámetros $P_r(M)$; y la media $m_b \approx 1,49$ de los $P_b(M)$. La desviación típica de los 8 resultados $P_r(M)$ es $\sigma_r \approx 0,085$, y $\sigma_b \approx 0,074$ para los $P_b(M)$. La covarianza entre los datos $P_r(M)$ y $P_b(M)$ es $\sigma_{rb} \approx 0,0053$. En consecuencia, el coeficiente de correlación de Pearson entre los dos conjuntos de parámetros es

$$R_{rb} = \frac{\sigma_{rb}}{\sigma_r \sigma_b} \approx 0,85$$

y el coeficiente de determinación de Pearson es $R_{rb}^2 \approx 0,72$. Aplicando el t-test de Student con 8-2 grados de libertad y 8 dígitos decimales rechazamos la hipótesis nula de «no correlación entre los dos conjuntos de parámetros» con probabilidad $P_{rb} \approx 0,99644359$. Repetimos el proceso de análisis con los 45 parámetros $P_r(M)$ (tres documentos por catedral) y $P_b(M)$ de la Tabla 2 obteniendo:

$$\begin{aligned} m_r &\approx 1,53 \\ m_b &\approx 1,54 \\ \sigma_r &\approx 0,082 \\ \sigma_b &\approx 0,077 \\ \sigma_{rb} &\approx 0,042 \\ R_{rb} &= \frac{\sigma_{rb}}{\sigma_r \sigma_b} \approx 0,67 \\ R_{rb}^2 &\approx 0,45 \end{aligned}$$

Aplicando el t-test de Student con 45-2 grados de libertad se rechaza la «no correlación» con probabilidad $P_{rb} \approx 0,9999998$. En consecuencia, los parámetros comerciales $P_b(M)$ son redundantes.

Probaremos que los 15 valores de la Tabla 2, correspondientes a $P_s(M)$ de alzado, están muy concentrados en torno a su media total $m_s \approx 1,32$. Para ello, vemos que su desviación típica es $\sigma_s \approx 0,12$, su variancia es $\sigma_s^2 \approx 0,014$; el coeficiente de variación de Pearson σ_s/m_s es el 9%. Concluimos que m_s es altamente representativa de estos valores $P_s(M)$ con muy baja dispersión entorno a la misma, ya que es inferior al 25%. Repitiendo procesos similares obtenemos para los $P_r(M)$ de alzado, los $P_s(M)$ y $P_r(M)$ de planta y de sección los siguientes coeficientes: 5%, 6%, 3%, 12% y 5% respectivamente. En consecuencia todas las medias son altamente representativas y con muy baja dispersión.

4.2. Discusión

La alta representatividad de las medias nos permite hacer una comparación global entre las 15 Catedrales góticas y la Sagrada Familia. Con ellas tendremos un valor de «error global» de comparación, en concreto: llamaremos error global s de M a $|m_s - P_s(M)|$, tal error lo notaremos como $eg_s(M)$; llamaremos error global r de M a $|m_r - P_r(M)|$ que notaremos $eg_r(M)$; con ello tendremos el «error global» de M como

$$eg(M) = \frac{eg_s(M) + eg_r(M)}{2}$$

Para mejor visualización consideramos el tanto por ciento $E = eg(M) \times 100\%$. Con este error porcentual, más la media porcentual de las desviaciones típicas

$$\xi = \frac{\sigma_s + \sigma_r}{2} \times 100\%$$

tenemos el siguiente criterio de «comparación gótica»:

1. es parámetro «**muy representativo**» de la comparación gótica si $E \lesssim \xi - \frac{\xi}{2}$.
2. es parámetro «**representativo**» de la comparación gótica si $\xi - \frac{\xi}{2} \lesssim E \lesssim \xi$.
3. es parámetro «**casi representativo**» de la comparación gótica si $\xi \lesssim E \lesssim \xi + \frac{\xi}{2}$.
4. es parámetro «**no representativo**» de la comparación gótica si $\xi + \frac{\xi}{2} < E$.

La aproximación \approx en las anteriores desigualdades es considerada si la diferencia es sólo del 1%.

Calculando, obtenemos la última columna de la Tabla 1 que nos marca el criterio de «comparación gótica» a lo largo del proyecto del Templo.

Los resultados dejan patente que la capacidad de ocupar espacio del proyecto del Templo, su escabrosidad, es claramente de estilo gótico. Más aún, Gaudí transforma el alzado de proyecto de Villar en un alzado mucho más gótico, pasando de un error global de 16% al 3%, de un alzado casi representativo a un alzado muy representativo. En cuanto a la planta, Gaudí ensaya proyectos intermedios que no son representativos del gótico, para acabar con un proyecto representativo. Y en cuanto a la sección central, no se aleja demasiado del gótico como para no ser representativa. Queda demostrado que la comparación estilística que hizo Gaudí con las catedrales góticas repercutió en la escabrosidad de las estructuras del Templo.

Veremos ahora cuál de las 15 catedrales posee mayor representación con las diferentes partes del Templo. Para ello, fijamos el siguiente error porcentual de cada una de ellas:

$$eCat(M) = \left(|P_s(Cat) - P_s(M)| + |P_r(Cat) - P_r(M)| \right) \times 100\% \quad [9]$$

Aplicándolo al Alzado del Nacimiento el mínimo error se obtiene con $eBurgos(AlzadoNacimiento) = 5,4\%$; y en el Alzado de la Pasión el mínimo error es $eParís(AlzadoPasión) = 5,3\%$. En cuanto a los errores de la Planta, el mínimo aparece con $eAmiens(Planta) = 8,9\%$. Finalmente, sobre los errores de la Sección, encontramos que los mínimos los ofrecen $eChartres(Sección) = 7\%$ y $eParís(Sección) = 10\%$. Igualmente puede hacerse con las proyecciones de Villar y las plantas intermedias de Gaudí, pero no haremos comentarios dado que no corresponden al proyecto construido. En la Tabla 2 mostramos todos los valores obtenidos de los errores de la comparación en la tercera fila correspondiente a cada catedral; marcados con AN para el Alzado del Nacimiento, y con AP para el Alzado de la Pasión.

En consecuencia, los cálculos ofrecen que las «catedrales maestras» de comparación e inspiración de Gaudí fueron:

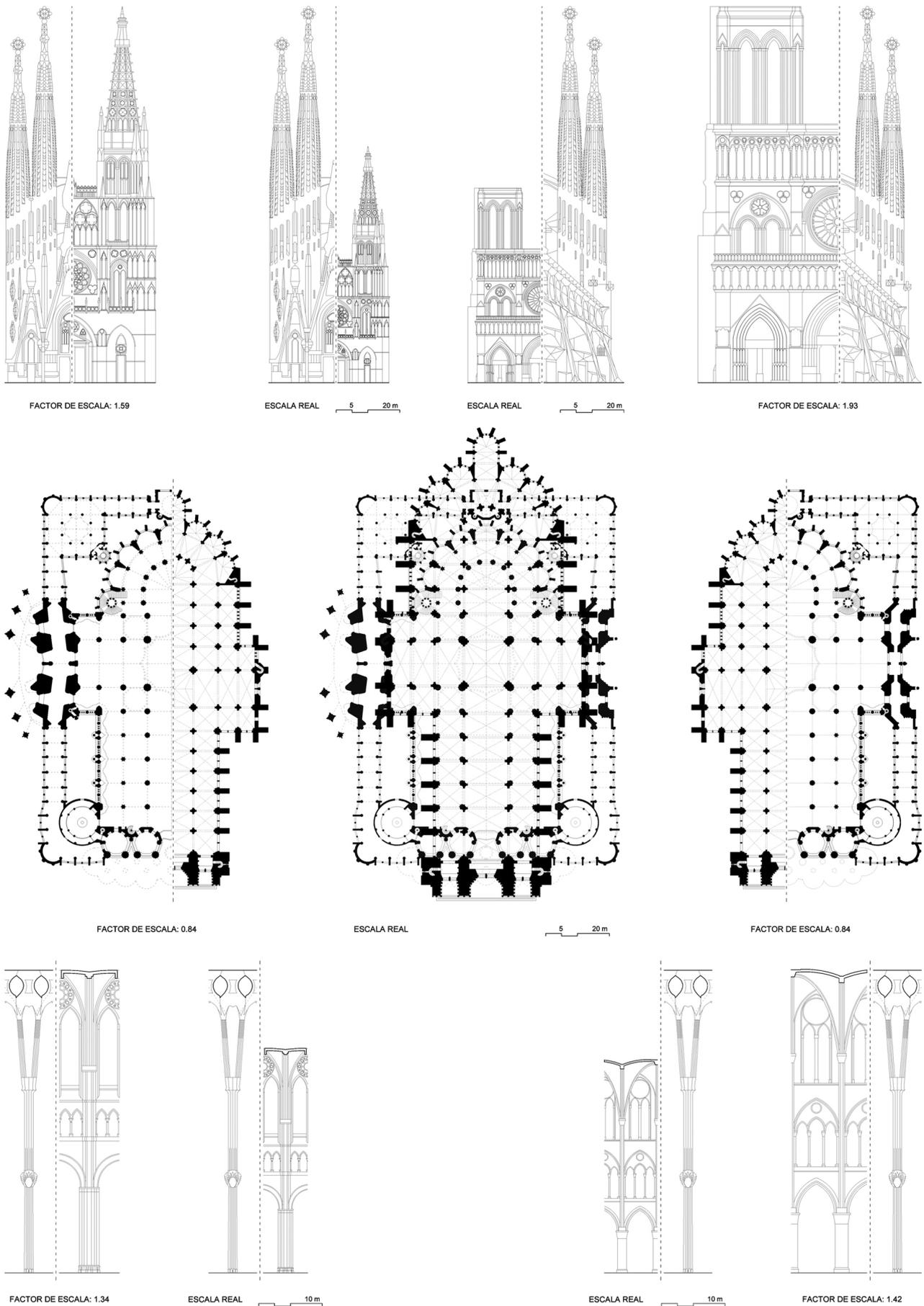


Figura 5 Comparación en alzados: Nacimiento con Burgos; Pasión con París. Comparación en planta: Planta del Templo con planta de Amiens. Comparación en sección: sección del Templo con Chartres y París. Los dibujos están a escala real y también ajustados al más grande con el valor indicado.

Burgos, París, Amiens y Chartres. En la Figura 5 mostramos gráficamente los resultados y observamos que, tanto en la misma escala como ajustando los dibujos arquitectónicos al más grande, hay una clara inspiración compositiva y estructural. En los alzados y la sección de Gaudí, apreciamos que desdobra las torres, enmascara los rosetones y cambia las líneas rectas clásicas por curvas más naturales. En la planta del Templo, por una parte vemos que existe una coherencia estructural que modula las dimensiones de la nave central, las laterales, el crucero y el ábside; y por otra parte la longitud y anchura de la planta de Amiens tiene una correlación gráfica con las mismas medidas del Templo. Estos símiles gráficos son recogidos por los cálculos matemáticos del estudio aquí presentado a través de la generación de parámetros fractales.

Finalmente condensamos el trabajo, resultados y discusión de esta investigación en la siguiente conclusión.

5. CONCLUSIÓN

El Templo de la Sagrada Familia es considerado construcción no gótica. Esta negación es bien conocida, y se basa en que la metodología de resolución estructural del Templo no es gótica. Las construcciones góticas resuelven la distribución de fuerzas sobre elementos verticales planos y linealmente rectos, mediante una estructura de apoyo laterales y exteriores a ellos. Sin embargo, en el Templo la distribución de fuerzas se contrarresta estructuralmente «de manera orgánica»; o sea, se neutraliza con la construcción de superficies cuádricas que de manera natural genera la distribución de fuerzas eliminando así la necesidad de apoyos laterales. Así, Gaudí modifica completamente en estructura el proyecto inicial del Templo presentado por Villar, de estructura neogótica con apoyos laterales a elementos lineales verticales. Ahora bien,

aunque la solución estructural no es gótica, sí lo es su composición y estilo. Esta afirmación, que a veces hacen analistas históricos (elevación de agujas, entrada de luz, etc.), nosotros en la presente investigación la demostramos con técnicas geométricas precisas. Con técnicas de Geometría fractal, descriptiva y computacional, aplicadas a las proyecciones básicas del proyecto del Templo, parametrizamos la característica consistente en la efectividad de ocupar espacio, la escabrosidad de sus elementos. Concluimos que tal característica sí es gótica, con una muy alta semejanza a las catedrales góticas en general; y mostramos además que Gaudí tiene entre ellas como catedrales maestras de inspiración las de Burgos, París, Amiens y Chartres.

Además de las conclusiones anteriormente citadas de forma muy directa, concisa y resumida –catedrales maestras del Templo y afirmación de que su escabrosidad es gótica–; a lo largo de todo el presente trabajo mostramos al lector: método de comparación general con el estilo gótico, método de comparación por secciones, varios métodos de generación de parámetros fractales, tablas de valores de parámetros en conjunto altamente representativo del gótico, comprobación gráfica de resultados, breve descripción de cómo Gaudí transforma las catedrales para llegar a su proyecto del Templo, y especialmente una descripción precisa y pormenorizada de la técnica geométrico-computacional empleada.

Los parámetros fractales generados nos han ofrecido una clara conexión geométrica con los esquemas góticos con los que Gaudí partió para diseñar su obra más trascendental, dando más sentido al trabajo recopilado en el Álbum de 1917. Afirmamos que Gaudí con la Sagrada Familia, mejora técnicamente el Gótico clásico y transforma su proyecto en una construcción que incorpora la esencia fractal contenida en las mejores catedrales góticas de Europa.

REFERENCIAS

- (1) Bovill, C. (1996) *Fractal Geometry in Architecture and Design*. Boston: Birkhäuser. Doi: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0843-3>.
- (2) Bovill, C. (2008). The Doric Order as a Fractal. *Nexus Network Journal*, 10(2): 283-290, doi: <http://dx.doi.org/10.1007/s00004-007-0070-x>.
- (3) Brown, C. (2003). The fractal geometry of ancient Maya settlement. *Journal of Archaeological Science*, 30(12): 1619-1632, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0305-4403\(03\)00063-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0305-4403(03)00063-3).
- (4) Rian, I. M., Park, J., Chanfg, D. (2007). Fractal geometry as the synthesis of Hindu cosmology in Kandariya Mahadev temple, Khajuraho. *Building and Environment*, 42(12): 4093-4107, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.buildenv.2007.01.028>.
- (5) Vaughan, J., Ostwald, M. (2009). A Quantitative Comparison between the Formal Complexity of Le Corbusier's Pre-Modern (1905-1912) and Early Modern (1922-1928) Architecture. *Design Principles and Practices: An International Journal*, 3: 359-372.
- (6) Ostwald, M., Vaughan, J. (2009). *Calculating Visual Complexity In Eisenman's Architecture: a computational fractal analysis of five houses (1968-1976)*. Australia: NOVA - The University of Newcastle's Digital Repository.
- (7) Vaughan, J., Ostwald, M. (2011). The Relationship between the Fractal Dimension of Plans and Elevations in the Architecture of Frank Lloyd Wright: Comparing The Prairie Style, Textile Block and Usonian Periods. *Architecture Science ArS*, 4: 21-44. <http://hdl.handle.net/1959.13/1052372>.
- (8) Sala, N. (2006). Fractal geometry and architecture: Some interesting connections. *WIT Trans. Built. Environ.*, 86: 163-173, doi: <http://dx.doi.org/10.2495/ARCO60171>.
- (9) Espel, R., Gómez, J., Grima, R., Aguado, A. (2009). La evolución de la construcción del Templo de la Sagrada Familia. *Informes de la Construcción*, 61(516): 5-20, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.08.057>.
- (10) Ráfols, J. (1928). *Antoni Gaudí*. Barcelona: Editorial Canosa.
- (11) Puig Boada, I. (1929). *El temple de la Sagrada Familia*. Barcelona: Editorial Barcino.
- (12) Puig Boada, I. (1952). *El templo de la sagrada familia, síntesis del arte de Gaudí*. Barcelona: Ediciones Omega.
- (13) Martinell, C. (1952). *La Sagrada Familia*. Barcelona: Editorial AYMA.

- (14) Puig Boada, I. (1979). *El temple de la sagrada familia*. Barcelona: Ediciones nuevo arte, Thor.
- (15) Bassegoda, J. (1989). *El gran Gaudi*. Sabadell: Editorial AUSA.
- (16) Puig Boada, I. (2002). *Arquitectes de Gaudí: Berenguer/Rubió/Jujol/Sugrañes/Ràfols/Martinell/Bergós/Bonet/Boada*. Barcelona: COAC.
- (17) Bonet, J., Casanova, M., Faulí, J., Giralt-Miracle, D. (2011). *Sagrada Familia de Gaudí, el templo expiatorio desde sus orígenes hasta hoy*. Barcelona: Editorial Lunwerg.
- (18) Falconer, K. J. (1990). *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. Chichester : John Wiley.
- (19) Ostwald, M., Vaughan, J. (2012). Significant Lines: Measuring and Representing Architecture for Computational Analysis. En *46th Conference of Architectural Science Association, ANZAScA 2012*. Griffith University.
- (20) Garrido, J.M. (1983). *Documentación de la Catedral de Burgos*. (pp. 804-1183). Burgos: Fuentes medievales castellano-leonesas.
- (21) Álvarez-Alonso, M., Cámara-Gómez, A., Alonso-Álvarez, M. D.: (1991). Levantamiento planimétrico de la catedral de Ávila. *Informes de la construcción*, 43(416): 29-37, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.1991.v43.i416.1361>.
- (22) Puente, R. (1975). *La Catedral de Santa María de León*. León: Imprenta Moderna.
- (23) Bonet, M. (1957). *La Catedral de Barcelona*. Barcelona: Escudo Oro SA y Archivo Diocesano de Barcelona.
- (24) Nadal, J. F. (2002). *La Catedral de Girona*. Girona: Lunwerg Editores.
- (25) Bassegoda, J. (1987). *Guia de Santa Maria de la Mar*. Barcelona: Caixa de Barcelona.
- (26) Colombier, P. (1973). *Les chantiers des cathedrales*. París: Editorial Picard.
- (27) Kurmann, P. (1987). *La façade de la cathédrale de reims*. París : Éditions du CNRS.
- (28) Murray, S. (1996). *Notre dame, Cathedral of Amiens*. Cambridge: Cambridge University Press.
- (29) Recht, R. (1971). *La cathedrale de Strasbourg*. Stuttgart: Editions Müller & Schindler.
- (30) Wolff, A. (1986). *Der gotische Dom in Köln*. Köln: Vista point.

* * *