teoría de la flexión antimétrica, en las láminas esféricas

YOSHIKATSU TSUBOI, Dr. Ingeniero de la Universidad de Tokio
KINJI AKINO, Investigador Asociado al Instituto de Investigaciones Nucleares del Japón

445 - 6

notación utilizada en este artículo

a	= Radio de curvatura de la superficie media (entre las dos exteriores).
θ	= Angulo según un plano meridiano de referencia.
φ	= Angulo entre la normal a la superficie en un punto y el eje de la rotación.
$N_\theta, N_{\theta\varphi}; N_\varphi, N_{\varphi\theta}$	= Fuerzas normales y tangenciales por unidad de longitud de las secciones correspondientes a $\theta = \text{constante}$ y $\varphi = \text{constante}$, respectivamente.
$M_\theta, M_{\theta\varphi}; M_\varphi, M_{\varphi\theta}$	= Momentos flectores y de torsión por unidad de longitud correspondientes a las secciones $\theta = \text{constante}$ y $\varphi = \text{constante}$, respectivamente.
Q_θ, Q_φ	= Fuerzas transversales tangenciales por unidad de longitud correspondientes a las secciones $\theta = \text{constante}$ y $\varphi = \text{constante}$, respectivamente.
u, v, w	= Componentes del desplazamiento de un punto de la superficie media según la dirección de los ejes X, Y y Z.
X, Y, Z	= 1) Ejes de coordenadas X e Y, de sentido dextrógiro, cuyo sentido es el que aumenta θ y φ , respectivamente. 2) Componentes de la intensidad de carga en las direcciones correspondientes a las de los ejes correspondientes.
$\varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \gamma_{\theta\varphi}$	= Deformaciones normales en las direcciones de θ y φ y deformación tangencial.
E, ν	= Módulo de Young y coeficiente de Poisson.
t	= Espesor de la lámina.
D	$= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$
$K^\pm$	$= 3(1-\nu^2)\alpha^2/t^2$
Φ, ψ	= Funciones de tensiones, $\psi = \frac{\alpha}{Et} \Phi$
$\cdot$	$= \frac{\partial}{\partial \theta}$
$\cdot$	$= \frac{\partial}{\partial \varphi}$
$H_0(\cdot)$	$= (\cdot)^{\cdot\cdot} + \operatorname{ctg} \varphi (\cdot)^{\cdot} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} (\cdot)^{\cdot\cdot}$
$H_2(\cdot)$	$= (\cdot)^{\cdot\cdot} + \operatorname{ctg} \varphi (\cdot)^{\cdot} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} (\cdot)^{\cdot\cdot} + 2(\cdot)$
α	= $\cos \varphi$.

bibliografía

- (1) W. Flügge: Statik u. Dynamik der Schalen, J. Springer, Berlín, 1934 y 1957.
- (2) E. Trefftz: Ableitung der Schalenbiegungs gleichungen mit dem Castiglianosen Prinzip, Z. A. M. M. Bd. 15, Ht. 1/2, 1935, S. 101.
- (3) A. Havers: Asymptotische Biege Theorie der unbelasteten Kugelschale, Ing. Arch. Bd. VI, 1935, S. 282.
- (4) W. Zerna: Beitrag zur allgemeinen Schalenbiegetheorie, Ing. Arch. Bd. XVII, 1949, S. 149.
- (5) Y. Tsuboi: Fundamental equations for thin shells, Journal of the Japan Society for App. Mech. Vol. 4, 1951, p. 19.
- (6) W. Zerna: Zur Berechnung der Randstörungen Kreiszyklinderischer Tonnenschalen, Ing. Arch. Bd. XX, 1952, S. 357.
- (7) H. Bateman Manuscript Project: Higher transcendental functions, Vol. I, Mc Graw-Hill, 1953.
- (8) Morse & Feshbach: Methods of theoretical physics, Part I, Mc Graw-Hill, 1953.
- (9) Y. Yokowo & O. Matsuoka: Approximation of the bending theory of a spherical shell, Proc. of the 4th J. N. C. of App. Mech. 1954, p. 177.
- (10) Y. Tsuboi & K. Akino: Design and construction of reinforced concrete shell structure of non-uniform thickness supported on roller system, Abh. Brückenbau u. Hochbau, Zürich, Bd. 15, 1955, S. 199.
- (11) P. P. Bijlaard: Computation of the stresses from local loads in spherical pressure vessels or pressure vessel heads, Weld. Research Council Bulletin Series, núm. 34, 1957.
- (12) P. M. Naghdi: On the theory of thin elastic shells, Q. App. Mechanics, Vol. XIV, 1957, p. 369.

Exposición y estudio, desarrollado analíticamente, de la teoría que conduce al cálculo de láminas esféricas sometidas a flexión y provocadas por fuerzas asimétricas, cuyo origen es debido a la acción del viento, efectos sísmicos o a la combinación de ambos.

Aunque el tema ha sido ya analizado anteriormente por otros autores, en este trabajo se pretende simplificar la compleja mecánica de la solución general.

Exposición

Existe un gran número de cubiertas en las que las láminas esféricas empleadas constituyen parte integrante de estos sistemas estructurales. También se han publicado muchos trabajos académicos tratando de láminas esféricas, en los cuales se exponen soluciones satisfactorias para el estado de tensiones de membrana y para cargas simétricas en la mayoría de los casos.

En el caso general, la acción del viento y los efectos sísmicos dan lugar a la flexión y cargas asimétricas en las estructuras. Los problemas de flexión asimétrica han sido ya tratados por muchos autores, aplicados al caso de láminas de pequeñas flechas, en las que $\sin \varphi \approx 1$ y $\cos \varphi \approx 1$ (ver cuadro de notaciones). Problemas similares han sido estudiados posteriormente por Bijlaard (11).

Sin embargo, recientemente, y con motivo del cálculo de tensiones en recipientes sometidos a presión en los reactores atómicos, los autores han podido comprobar que las soluciones en láminas de pequeña flecha sólo se podían aplicar a una parte limitada de la esfera, y han tenido que resolver problemas de flexión aplicables en toda la esfera, es decir, para: $0 \leq \varphi < \pi$ ó $0 < \varphi \leq \pi$.

Los problemas de flexión asimétrica en las láminas esféricas han sido ya discutidos por A. Havers (3) (ver bibliografía). Los autores tratan el problema de la flexión asimétrica en forma algo más simplificada.

Para la derivación de las ecuaciones de este trabajo, se ha tenido en cuenta el estudio de E. Trefftz (2) (ver también bibliografía) en las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, y las fórmulas de las relaciones entre tensiones y deformaciones para el caso general de formas esféricas han sido desarrolladas por uno de los autores, Tsuboi (5), y también se han considerado en este estudio los trabajos de W. Flügge (1) y A. Havers (3).

Para la aplicación de las fórmulas antes mencionadas al problema estudiado, se ha comprobado la rigurosidad de las soluciones cotejando con otros textos mencionados en la bibliografía (4), (9) y (12).

Los autores agradecen una vez más al profesor W. Flügge, la recomendación de consultar los trabajos del doctor A. Havers. También agradecen al profesor Seiichi Sueoka de I. I. S., de la Universidad de Tokio, por haberles ayudado extensamente en la solución del problema de la continuación analítica respecto al campo de aplicación de las funciones de Legendre y Gegenbauer.

1. Ecuaciones diferenciales básicas

1.1. Equilibrio de fuerzas.

Al considerar los problemas de flexión en las láminas esféricas, las fuerzas superficiales e interiores X, Y, Z (ver figura 1) se pueden considerar absorbidas por las tensiones de membrana, es decir, por $X, Y, Z = 0$.

Fig. 1

Las seis ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos respecto al eje Z se pueden expresar, en el caso de láminas esféricas (5) y dentro de un sentido estricto, por

$$N_{\varphi\theta} = N_{\theta\varphi} \quad , \quad M_{\varphi\theta} = M_{\theta\varphi} \quad , \quad \text{por un lado, y:}$$

$$N'_{\theta\varphi} + 2N_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} N'_{\theta} - Q_{\theta} = 0 \quad [1.1.a]$$

$$N'_{\varphi} + (N_{\varphi} - N_{\theta}) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} N'_{\theta\varphi} - Q_{\varphi} = 0 \quad [1.1.b]$$

$$Q'_{\varphi} + Q_{\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + (N_{\varphi} + N_{\theta}) + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} Q'_{\theta} = 0 \quad [1.1.c]$$

$$M'_{\varphi} + (M_{\varphi} - M_{\theta}) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} M'_{\theta\varphi} - \alpha Q_{\varphi} = 0 \quad [1.1.d]$$

$$M'_{\theta\varphi} + 2M_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} M'_{\theta} - \alpha Q_{\theta} = 0 \quad [1.1.e]$$

Las ecuaciones [1.1.a] y [1.1.b] se hayan automáticamente satisfechas al aplicar las funciones de fuerzas, que se definen así:

$$N_{\theta} = \Phi'' + \Phi + \operatorname{sen} \varphi \int Q_{\theta} d\theta \quad [1.2.a]$$

$$N_{\varphi} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \Phi'' + \operatorname{ctg} \varphi \Phi' + \Phi + \frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \left[\int \operatorname{sen} \varphi Q_{\varphi} d\varphi + \int \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \int Q_{\theta} d\theta d\varphi \right] \quad [1.2.b]$$

$$N_{\theta\varphi} = -\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \Phi'' + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \Phi' \quad [1.2.c]$$

Las relaciones elásticas entre momentos flectores y de torsión, y de los desplazamientos ω se expresan, teniendo en cuenta que los desplazamientos de u y v tienen tan pequeña importancia en los cambios de curvatura y torsión de la superficie de la lámina que han sido despreciados *, de la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} M_{\theta} &= -\frac{D}{a^2} \left(\operatorname{ctg} \varphi \omega' + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \omega'' + \omega + \nu(\omega'' + \omega) \right) \\ M_{\varphi} &= -\frac{D}{a^2} \left(\omega'' + \omega + \nu \left(\operatorname{ctg} \varphi \omega' + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \omega'' + \omega \right) \right) \\ M_{\theta\varphi} &= -(1-\nu) \frac{D}{a^2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi} \omega'' - \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} \omega' \right) \end{aligned} \right\} \quad [1.3]$$

* El efecto de despreciar M_{θ} , M_{φ} y $M_{\theta\varphi}$, expresado en tensión, sería:

$$-\frac{t^2}{12a} N_{\theta}, -\frac{t^2}{12a} N_{\varphi}, -\frac{t^2}{12a} N_{\theta\varphi}, \text{ respectivamente.}$$

Partiendo de las ecuaciones [1.1.d], [1.1.e] y [1.3], Q_θ y Q_φ se expresan en función del desplazamiento ω como sigue:

$$Q_\theta = -\frac{D}{a^3} \frac{1}{\sin \varphi} \left(H_2(\omega) \right)' \quad , , \quad Q_\varphi = -\frac{D}{a^3} \left(H_2(\omega) \right)' \quad [1.4]$$

donde $H_2(\omega) = \omega'' + \cot \varphi \omega' + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \omega'' + 2\omega$.

Entonces, la ecuación [1.2] se puede expresar:

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \Phi'' + \Phi - \frac{D}{a^3} H_2(\omega) \quad , , \quad N_\varphi = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \Phi'' + \cot \varphi \Phi' + \Phi - \frac{D}{a^3} H_2(\omega) \\ N_{\theta\varphi} &= -\frac{1}{\sin \varphi} \Phi' + \frac{\cot \varphi}{\sin \varphi} \Phi' \end{aligned} \right\} \quad [1.5]$$

Y, finalmente, sustituyendo las ecuaciones [1.4] y [1.5] en la ecuación [1.1 c], la ecuación de equilibrio es de la forma:

$$\frac{D}{a^3} H_2 H_2(\omega) - H_2(\Phi) = 0 \quad [1.6]$$

1.2. Compatibilidad de las ecuaciones.

Las relaciones que ligán las deformaciones y los desplazamientos en las láminas esféricas son:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sin \varphi} u' + \cot \varphi v - \omega \right) \quad [1.7 a]$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{a} (v' - \omega) \quad [1.7 b]$$

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{a} \left(u' - \cot \varphi u + \frac{1}{\sin \varphi} v' \right) \quad [1.7 c]$$

Eliminando u y v en las ecuaciones [1.7 a-c], la condición de compatibilidad es la siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sin \varphi} (\varepsilon_\theta \sin \varphi)'' - \frac{1}{\sin \varphi} (\varepsilon_\varphi \cos \varphi)' + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \varepsilon_\varphi'' \\ + (\varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi) - \frac{1}{\sin^2 \varphi} (\gamma_{\theta\varphi} \sin \varphi)' + \frac{1}{a} H_2(\omega) = 0 \end{aligned} \right\} \quad [1.8]$$

Las relaciones elásticas entre deformaciones y tensiones son:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{Et} (N_\theta - \nu N_\varphi) \quad , , \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{Et} (N_\varphi - \nu N_\theta) \quad , , \quad \gamma_{\theta\varphi} = \frac{2(1+\nu)}{Et} N_{\theta\varphi} \quad [1.9]$$

Al sustituir la [1.9] en la [1.8] y utilizar la ecuación [1.5], se puede obtener la ecuación de compatibilidad, expresada en función de la función Φ de tensiones y ω de desplazamiento, en la siguiente forma:

$$\frac{a}{Et} H_2 H_0(\Phi) + H_2(\omega) = 0$$

donde: [1.10]

$$H_0(\Phi) = \Phi'' + \operatorname{ctg} \varphi \Phi' + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \Phi''$$

1.3. Ecuaciones diferenciales básicas.

Con objeto de que la función de tensiones venga dada en las mismas dimensiones que la de los desplazamientos ω , transformaremos Φ en ψ con la relación:

$$\psi = \frac{a}{Et} \Phi$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio [1.6] y la ecuación [1.10] de compatibilidad se expresan así:

$$H_2[H_2(\omega) - 4K^4\psi] = 0 \quad , \quad H_2[H_0(\psi) + \omega] = 0 \quad [1.11]$$

donde:

$$K^4 = 3(1 - \nu^2) \frac{a^2}{l^2}$$

Si las funciones ζ_1 y ζ_2 dan soluciones lineales independientes de la ecuación diferencial,

$$H_2(\zeta) = 0,$$

la ecuación [1.11] se puede expresar:

$$H_2(\omega) - 4K^4\psi = K_1\zeta_1 + K_2\zeta_2 \equiv K_1^2\zeta_1^2 \quad , \quad H_0(\psi) + \omega = L_1\zeta_1 + L_2\zeta_2 \equiv L_1^2\zeta_1^2 \quad [1.12]$$

en las que K_1 y L_1 , son constantes arbitrarias.

Las soluciones ω y ψ de la ecuación [1.12] se obtienen como suma de soluciones particulares de ω^p y ψ^p y funciones complementarias ω^c y ψ^c , respectivamente, es decir:

$$\omega = \omega^p + \omega^c \quad , \quad \psi = \psi^p + \psi^c \quad [1.13]$$

Las soluciones particulares y funciones complementarias deben satisfacer las siguientes ecuaciones asociadas:

$$H_2(\omega^p) - 4K^4\psi^p = K_1^2\zeta_1^2 \quad [1.14 \text{ a}]$$

$$H_0(\psi^p) + \omega^p = L_1^2\zeta_1^2 \quad [1.14 \text{ b}]$$

en las que $H_2(\zeta_1^2) = 0$, y

$$H_2(\omega^c) - 4K^4\psi^c = 0 \quad [1.15 \text{ a}]$$

$$H_0(\psi^c) + \omega^c = 0 \quad [1.15 \text{ b}]$$

Con objeto de obtener las soluciones particulares ω^p y ψ^p en las ecuaciones [1.14 a] y [1.14 b], debe notarse que existen las siguientes igualdades:

$$H_2(\zeta) = 0 \quad , , \quad H_0(\zeta) = H_2(\zeta) - 2\zeta = -2\zeta$$

Considerando estas relaciones, fácilmente se puede ver que las ecuaciones [1.14 a] y [1.14 b] tienen soluciones particulares para ζ_1 y ζ_2 bajo la forma siguiente:

$$\omega^p = A_1 \zeta_1 + A_2 \zeta_2 \equiv A_1 \zeta_{1_2} \quad , , \quad \psi^p = B_1 \zeta_1 + B_2 \zeta_2 \equiv B_1 \zeta_{1_2} \quad [1.16]$$

Sustituyendo en las ecuaciones [1.14 a] y [1.14 b], se pueden determinar las constantes A_i y B_i en las igualdades:

$$A_1 = -\frac{1}{2K^4} K_{1_2} + L_{1_2} \quad , , \quad B_1 = -\frac{1}{4K^4} K_{1_2} \quad [1.17]$$

Debe observarse que también se satisfacen las expresiones siguientes:

$$H_2(\omega) = H_2(\omega^p + \omega^c) = 4K^4 \phi^c = 4K^4 \phi + K_{1_2} \zeta_{1_2}$$

o también

$$\frac{D}{a^3} H_2(\omega) = \Phi + \frac{D}{a^3} K_{1_2} \zeta_{1_2} \quad [1.18]$$

Para determinar las funciones complementarias es conveniente prescindir de 2ω en H_2 de la ecuación [1.15 a], considerando este valor como despreciable en comparación con los otros términos, ya que en la teoría de la flexión se puede esperar una rápida disminución de tensión con la distancia al límite. Por tanto, las ecuaciones [1.15 a] y [1.15 b] se transforman en:

$$H_0(\omega^c) - 4K^4 \phi^c = 0 \quad , , \quad H_0(\psi^c) + \omega^c = 0 \quad [1.19]$$

Y, finalmente, las dos ecuaciones diferenciales [1.19] en ω^c y ψ^c se unifican en la ecuación diferencial:

$$H_0(U) + 2iK^2 U = 0 \quad [1.20]$$

donde U es una función compleja (6):

$$U = \omega^c + 2iK^2 \psi^c \quad [1.21]$$

II Tensiones y desplazamientos

2.1. Tensiones.

Como resultado de lo anteriormente expuesto, las tensiones se expresan por las siguientes fórmulas simplificadas.

Referente a la ecuación [1.18], se puede obtener la [1.5]:

$$\left. \begin{aligned} N_0 &= \Phi'' - \frac{D}{a^3} K_{1_2} \zeta_{1_2} \quad , , \quad N_\varphi = \frac{1}{\text{sen}^2 \varphi} \Phi'' + \text{ctg} \varphi \Phi' - \frac{D}{a^3} K_{1_2} \zeta_{1_2} \\ N_{\theta\varphi} &= -\frac{1}{\text{sen} \varphi} \Phi' + \frac{\text{ctg} \varphi}{\text{sen} \varphi} \Phi' \end{aligned} \right\} \quad [2.1]$$

Y la ecuación [1.4] se transforma en:

$$Q_\theta = -\frac{1}{\sin \varphi} \left[\Phi' + \frac{D}{a^3} K_2 \zeta'_{1_1} \right] \quad , \quad Q_\varphi = -\Phi' - \frac{D}{a^3} K_2 \zeta'_{1_1} \quad [2.2]$$

Para los momentos flectores M_θ y M_φ , así como para el momento $M_{\theta\varphi}$ de torsión, se puede utilizar la ecuación [1.3] sin cambio alguno.

2.2. Desplazamientos.

Los desplazamientos u y v se obtienen integrando las relaciones entre deformaciones y desplazamientos [1.7 a, b], y llevando estos valores a la [1.7 c], considerando las [1.9], [2.1] y $H_2(\zeta_{1_1}) = 0$ como se indica a continuación, éstos introducen nuevas constantes a_1 , a_2 y a_3 .

$$\left. \begin{aligned} u &= -(1+\nu) \frac{1}{\sin \varphi} \phi' - (a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta) \cos \varphi + a_3 \sin \varphi \\ &\quad + [A_{1_2} - (1-\nu) B_{1_2}] \int [\sin \varphi \zeta_{1_2} - \cos \varphi \int \zeta_{1_2} d\varphi] d\theta \\ v &= -(1+\nu) \phi' + a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta + [A_{1_2} - (1+\nu) B_{1_2}] \int \zeta_{1_2} d\varphi \end{aligned} \right\} \quad [2.3]$$

donde

$$A_{1_2} - (1+\nu) B_{1_2} = L_{1_2} - \frac{1-\nu}{4K^4} K_{1_2}$$

En las ecuaciones anteriores, los términos que llevan a_1 , a_2 y a_3 significan las rotaciones alrededor de los tres ejes coordenados, respectivamente, es decir:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \theta = 0 \quad , \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

y el eje de rotación de la esfera.

Las translaciones se incluyen en los términos de ζ_{1_2} , como se explicará en el artículo 3.2.

III. Soluciones de la ecuación $H_2(\zeta) = 0$

3.1. Procedimiento matemático para la solución de $H_2(\zeta) = 0$.

He aquí la forma de proceder para obtener las soluciones particulares que denominaremos ζ_{1_1} .

La ecuación $H_2(\zeta) = 0$ se puede poner bajo la forma:

$$H_2(\zeta) = \zeta'' + \operatorname{ctg} \varphi \zeta' + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \zeta'' + 2\zeta = 0 \quad [3.1]$$

La función ζ se puede desarrollar en series de Fourier en θ de acuerdo con la expresión:

$$\zeta = \sum_m y^m \cos m\theta \quad , \quad \text{donde } m = 0, 1, 2, \dots \quad [3.2]$$

Sustituyendo la [3.2] en la [3.1] y poniendo $\cos \varphi = x$, la ecuación diferencial para el coeficiente $y^m \equiv y(x)$, se puede representar así:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad [3.3]$$

Esta es la expresión de la ecuación diferencial de Legendre, y las soluciones lineales independientes de esta ecuación y_1^m e y_2^m , que satisfacen dentro del campo $0 \leq \varphi < \pi$ para $m=0$ y 1, y $0 \leq \varphi < \pi$ y $0 < \varphi \leq \pi$ para $m \geq 2$, respectivamente, se obtienen como sigue:

$$y_{1,2}^0 = x; x \log \frac{1-x}{1+x} + 2 \quad \text{para } m=0 \quad [3.4 a]$$

$$y_{1,2}^1 = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}; (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1-x}{1+x} - \frac{2x}{1-x^2} \right) \quad \text{para } m=1 \quad [3.4 b]$$

$$y_{1,2}^m = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{m+x}{\Gamma(m+2)}; \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{m-x}{\Gamma(m+2)} \quad \text{para } m \geq 2 \quad [3.4 c]$$

Estas soluciones están bastante de acuerdo con la fórmula de A. Havers (3). Las soluciones de $H_2(\xi) = 0$, ξ_1 y ξ_2 se expresan de la siguiente forma:

$$\xi_{1,2} = y_{1,2}^m \cos m\theta \quad [3.5]$$

3.2. *Traslaciones.*

Si consideramos solamente la primera solución de [3.4 a] y la [3.4 b], obtendremos:

$$\xi_1 = \cos \varphi \quad , , \quad \xi_1 = \sin \varphi \cos \theta$$

Cuando el desplazamiento ω y la función ψ de tensiones tiene la siguiente forma en las soluciones [3.6],

$$\omega = \omega^p = A_1 \xi_1 \quad , , \quad \psi = \psi^p = B_1 \xi_1$$

todos los momentos y fuerzas desaparecerán.

Recordando que $A_1 = L_1 - \frac{1}{2K^*} K_1$, y $B_1 = -\frac{1}{4K^*} K_1$, los desplazamientos u y v , que expresan traslaciones de la fórmula [2.3], se obtienen como sigue, donde los términos de rotación con a_1 , a_2 y a_3 se escapan a toda consideración.

Para $\xi_1 = \cos \varphi$, se obtiene:

$$u = 0 \quad , , \quad v = A_1 \sin \varphi \quad , , \quad \omega = A_1 \cos \varphi \quad [3.7]$$

Lo que significa una traslación en la dirección del eje de rotación de la esfera.

Para $\xi_1 = \sin \varphi \cos \theta$ se tiene:

$$u = A_1 \sin \theta \quad , , \quad v = -A_1 \cos \varphi \cos \theta \quad , , \quad \omega = A_1 \sin \varphi \cos \theta \quad [3.8]$$

Esto también representa una traslación en la dirección de $\theta = 0$, $\varphi = \pi/2$.

IV. Procedimiento matemático para la solución de la ecuación $H_0(U) + 2iK^2U = 0$

4.1. Ecuación de la función anterior o de Gegenbauer.

Consideremos la siguiente ecuación (7):

$$(1-x^2) \frac{d^2V}{dx^2} - 2(1+\beta)x \frac{dV}{dx} + \alpha(\alpha+2\beta+1)V = 0 \quad [4.1]$$

La solución general de la ecuación [4.1] se puede poner:

$$V = aG_a^\beta(x) + bG_a^\beta(-x) \quad [4.2]$$

$G_a^\beta(x)$ y $G_a^\beta(-x)$ en esta solución son funciones de Gegenbauer expresadas por medio de series hipergeométricas de Fourier con $x=1$, así como $x=-1$, y tienen la siguiente forma, satisfecha en el campo $-1 < x < 1$, donde $0 \leq \varphi < \pi$ para $G_a^\beta(x)$, y $0 < \varphi \leq \pi$ para $G_a^\beta(-x)$:

$$G_a^\beta(x) = \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} F\left(\alpha+2\beta+1, -\alpha; 1+\beta; \frac{1-x}{2}\right) \quad [4.3a]$$

$$G_a^\beta(-x) = \frac{\Gamma(\alpha+2\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} F\left(\alpha+2\beta+1, -\alpha; 1+\beta; \frac{1+x}{2}\right) \quad [4.3b]$$

4.2. Funciones asociadas de Gegenbauer (8).

$$\text{Pongamos } U = U_m(x) \cos m\theta, x = \cos \varphi. \quad [4.4]$$

En la ecuación $H_0(U) + 2iK^2U = 0$ se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$(1-x^2) \frac{d^2U_m}{dx^2} - 2x \frac{dU_m}{dx} + \left(2iK^2 - \frac{m^2}{1-x^2}\right)U_m = 0 \quad [4.5]$$

La forma generalizada de esta ecuación diferencial es la siguiente:

$$(1-x^2) \frac{d^2U_m}{dx^2} - 2(1+\delta)x \frac{dU_m}{dx} + \left(\gamma(\gamma+2\delta+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)U_m = 0 \quad [4.6]$$

donde

$$\delta = 0, \quad \gamma(\gamma+2\delta+1) + 2iK^2 \quad [4.7]$$

La ecuación [4.6] es la asociada a la ecuación [4.1]. Entonces, si suponemos que una de las soluciones de la ecuación [4.6] toma la forma

$$U_m = (1-x^2)^\lambda V \quad [4.8]$$

podemos sustituir la supuesta solución de [4.8] en la [4.6].

Esta ecuación será equivalente a la ecuación [4.1], y, por tanto, se deducen las tres siguientes identidades:

$$\left. \begin{aligned} \gamma(\gamma+2\delta+1) - 2\lambda - m^2 &= \gamma(\gamma+2\delta+1) - 2\lambda(2\lambda+2\delta+1) \\ 1+\beta &= 2\lambda+1+\delta, \quad \alpha(\alpha+2\beta+1) = \gamma(\gamma+2\delta+1) - 2\lambda - m^2 \end{aligned} \right\} \quad [4.9]$$

De la [4.9] y de la [4.7] se pueden obtener los siguientes valores:

$$\lambda = \frac{m}{2} \quad , \quad \beta = m \quad , \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(-1 - 2m + \sqrt{1 + 8iK^2} \right) \approx -\frac{1}{2} - m + (1 + i)K \quad [4.10]$$

donde el signo $\pm$ no modifica en nada la forma de la serie.

Finalmente, se puede hallar la solución general de la ecuación [4.5] como indicamos a continuación:

$$U_m = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \left[A G_{-m-\frac{1}{2}+(1+i)K}^m(x) + B G_{-m-\frac{1}{2}+(1+i)K}^m(-x) \right] \quad [4.11]$$

En la forma [4.11], A y B son constantes complejas arbitrarias, y $G(x)$ y $G(-x)$ son funciones complejas.

4.3. Valores especiales de las funciones de Gegenbauer y método para los cálculos numéricos.

Las siguientes fórmulas de recurrencia en la diferenciación son prácticas en las aplicaciones de las funciones de Gegenbauer:

$$V = G_a^\beta(x) \quad , \quad \frac{dV}{dx} = (2\beta + 1)G_{a-1}^{\beta+1}(x) \quad , \quad \frac{d^2V}{dx^2} = (2\beta + 1)(2\beta + 3)G_{a-2}^{\beta+2}(x) \quad [4.12]$$

Los valores de las series hipergeométricas para valores especiales de la variable $\frac{1-x}{2}$ son:

$$\left. \begin{aligned} F(\alpha + 2\beta + 1, -\alpha; 1 + \beta; 0) &= 1 \\ F\left(\alpha + 2\beta + 1, -\alpha; 1 + \beta; \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \beta + 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned} \right\} \quad [4.13]$$

Con las ecuaciones [4.12] y [4.13] se pueden calcular los valores de V , $\frac{dV}{dx}$ y $\frac{d^2V}{dx^2}$ para valores especiales de x como sigue:

$$\left. \begin{aligned} V(1) &= \frac{\alpha + 2\beta}{2\alpha\beta} M_a^\beta \\ \frac{dV}{dx} \Big|_{x=1} &= \frac{(\alpha + 2\beta)(\alpha + 2\beta + 1)}{4\beta(\beta + 1)} M_a^\beta \\ \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x=1} &= \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha + 2\beta + 1)(\alpha + 2\beta + 2)}{4\beta(\beta + 1)(\beta + 2)} V(1) \\ V(0) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \beta + \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} M_a^\beta \\ \frac{dV}{dx} \Big|_{x=0} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta(\alpha + 2\beta)(\alpha + 2\beta + 1) \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \beta + 1\right)\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} M_a^\beta \\ \frac{d^2V}{dx^2} \Big|_{x=0} &= -\alpha(\alpha + 2\beta + 1)V(0) \end{aligned} \right\} \quad [4.14]$$

donde

$$M_{\alpha}^{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + 2\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} : \alpha = -m - \frac{1}{2} + (1+i)K \quad , , \quad \beta = m$$

Manifiestamente, la ecuación diferencial para $\frac{dV}{dx}$ es la ecuación diferencial de Gegenbauer, cambiando α por $\alpha - 1$ y β por $\beta + 1$.

$$(1 - x^2) \frac{d^3 V}{dx^3} - 2(2 + \beta) x \frac{d^2 V}{dx^2} + [\alpha(\alpha + 2\beta + 1) - 2(1 + \beta)] \frac{dV}{dx} = 0 \quad [4.15]$$

En los cálculos numéricos que deben realizarse para casos prácticos, V y $\frac{dV}{dx}$ se pueden obtener de la ecuación diferencial [4.1], y $\frac{dV}{dx}$ y $\frac{d^2 V}{dx^2}$ de la [4.15]. Al empezar este cálculo numérico, los valores iniciales necesarios, o valores específicos, se obtienen de la [4.14], y en el desarrollo se pueden comparar los dos valores numéricos correspondientes a $\frac{dV}{dx}$ calculados independientemente de las ecuaciones [4.1] y [4.15], para, finalmente, mejorarlos.

4.4. Relaciones de las funciones de Gegenbauer en las soluciones para láminas esféricas.

La función complementaria U_m se puede separar en parte real e imaginaria. Así, en la fórmula [4.11] se puede poner

$$\left. \begin{aligned} G^m(x) &= V_1^m + iV_2^m \quad , , \quad G^m(-x) = V_3^m + iV_4^m \\ -m - \frac{1}{2} + (1+i)K & \quad -m - \frac{1}{2} + (1+i)K \\ \xi_1^m &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} V_1^m \quad , , \quad \xi_3^m = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} V_3^m \\ A &= C_1^m + iC_2^m \quad , , \quad B = -(C_3^m + iC_4^m) \end{aligned} \right\} \quad [4.16]$$

donde $V_1 \sim V_4$, $\xi_1 \sim \xi_4$ son funciones reales y $C_1^m \sim C_4^m$ son constantes arbitrarias.

Por tanto:

$$U_m = [C_1^m \xi_1^m - C_2^m \xi_2^m - C_3^m \xi_3^m + C_4^m \xi_4^m] + i[C_1^m \xi_2^m + C_2^m \xi_1^m - C_3^m \xi_4^m - C_4^m \xi_3^m] \quad [4.17]$$

Recordando la relación entre las dos funciones independientes de Gegenbauer pueden obtenerse las siguientes relaciones de las funciones ξ :

$$\left. \begin{aligned} \xi_3^m(\cos \varphi) &= \xi_3^m(x) = -\xi_1^m(-x) = -\xi_1^m(-\cos \varphi) = -\xi_1^m(\cos \omega) \\ \xi_4^m(\cos \varphi) &= \xi_4^m(x) = -\xi_2^m(\cos \omega) \end{aligned} \right\} \quad [4.18]$$

en las que $\omega = \pi - \varphi$.

Entonces, la ecuación [4.17] se transforma en:

$$\begin{aligned} U_m &= [C_1^m \xi_1^m(\varphi) - C_2^m \xi_2^m(\varphi) + C_3^m \xi_1^m(\omega) - C_4^m \xi_2^m(\omega)] + i[C_1^m \xi_2^m(\varphi) + C_2^m \xi_1^m(\varphi) \\ &\quad + C_3^m \xi_2^m(\omega) + C_4^m \xi_1^m(\omega)] \end{aligned} \quad [4.19]$$

Las ecuaciones diferenciales correspondientes a las funciones ξ se obtienen de acuerdo con las relaciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^m &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} V_1^m \\ \xi_1^{m.} &= \frac{d\xi_1^m}{d\varphi} = -(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{dV_1^m}{dx} + mx(1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} V_1^m \\ \xi_1^{m..} &= \frac{d^2\xi_1^m}{d\varphi^2} = (1-x^2)^{\frac{m+3}{2}} \frac{d^2V_1^m}{dx^2} - (2m+1)x(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{dV_1^m}{dx} - \\ &\quad - m(1-x^2)^{\frac{m-2}{2}} (1-mx^2) V_1^m \end{aligned} \right\} \quad [4.20]$$

En estas fórmulas, ξ_i indica que se puede tomar cualquier subíndice. Si se toma, particularmente $m=1$, la ecuación [4.20] se transforma, con $\xi_i \equiv \xi^1_i$ y $V_i \equiv V^1_i$, en:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} V_1 \quad , \quad \xi_1^{\cdot} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dV_1}{dx} + x V_1 \\ \xi_1^{\cdot\cdot} &= (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{d^2V_1}{dx^2} - 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dV_1}{dx} - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} V_1 \end{aligned} \right\} \quad [4.21]$$

La ecuación [4.20] ó [4.21] es la relación diferencial entre las funciones de Gegenbauer y las ξ , mediante las cuales se pueden determinar las tensiones y desplazamientos en las láminas esféricas.

4.5. Tensiones y desplazamientos.

El desplazamiento ω^c corresponde a la parte real de la función complementaria $U = \sum_m U_m \cos m\theta$, y la función Φ^c o ψ^c de la tensión, a su parte imaginaria.

Refiriéndonos a $\psi = \frac{a}{Et} \Phi$ y $U = \omega^c + 2iK^2\psi^c$ [1.21], y multiplicando la función complementaria por el valor constante $\frac{a^2}{D}$, se pueden escribir como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \omega^c &= \sum_m \omega_m^c \cos m\theta = \frac{a^2}{D} \sum_m \left[C_1^m \xi_1^m(\varphi) - C_2^m \xi_2^m(\varphi) + C_3^m \xi_1^m(\omega) - \right. \\ &\quad \left. - C_4^m \xi_2^m(\omega) \right] \cos m\theta \\ \Phi^c &= \sum_m \Phi_m^c \cos m\theta = \frac{Et}{2K^2a} \sum_m \psi_m^c \cos m\theta = \frac{2K^2}{a} \sum_m \left[C_1^m \xi_2^m(\varphi) + \right. \\ &\quad \left. + C_2^m \xi_1^m(\varphi) + C_3^m \xi_2^m(\omega) + C_4^m \xi_1^m(\omega) \right] \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad [4.22]$$

V. Fórmulas para el cálculo de tensiones y desplazamientos

5.1. Flexión asimétrica de una lámina esférica sometida a fuerzas externas o momentos actuando solamente sobre un borde.

Las expresiones generales de los momentos, fuerzas y desplazamientos se obtendrán del desplazamiento $\omega = \omega^p + \omega^c$ y de la función $\Phi = \Phi^p + \Phi^c$ de las tensiones, en las que ω^p y Φ^p vienen dadas por la [1.16], y ω^c y Φ^c por la [4.22].

Para los momentos se pueden utilizar las fórmulas [1.3]; las [1.4] y [1.5], para las fuerzas, y la [2.3], para los desplazamientos.

Ahora consideraremos la flexión asimétrica de láminas esféricas debida a fuerzas externas y momentos actuando en un solo borde de la lámina, dando a m los valores 1, 2, 3, ..., y considerando ω y Φ en la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_m(\varphi) \cos m\theta, \quad \Phi = \Phi_m(\varphi) \cos m\theta \\ \omega_m(\varphi) &= \omega_m^p(\varphi) + \omega_m^c(\varphi) \\ \Phi_m(\varphi) &= \Phi_m^p(\varphi) + \Phi_m^c(\varphi) \end{aligned} \right\} \quad [5.1]$$

en las que $m = 1, 2, 3, \dots$

Para el rápido amortiguamiento de las fuerzas en el borde o momentos se puede, en general, despreciar los términos y_2^m en ω_m^p y Φ_m^p , así como los términos de $\xi_2^m(\omega)$ en ω_m^c y Φ_m^c .

Además, si sólo se considera $m = 1$, la solución $\omega_1^p = A_1 \xi_1 = A_1 y_1 \cos \theta$ significa la translación de la lámina, como se ha demostrado en el apartado [3.2], y las tensiones se calculan solamente partiendo de las funciones complementarias ω_1^c y ψ_1^c .

5.2. Fórmulas aproximadas para las tensiones y desplazamientos en el caso de $m = 1$.

Ahora obtendremos fórmulas para $m = 1$ como caso particular de flexión antisimétrica con respecto al eje $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$ con $m = 1, 3, 5, \dots$

$$\omega^c = \frac{a^2}{D} \left[C_1 \xi_1(\varphi) - C_2 \xi_2(\varphi) \right] \cos \theta, \quad \Phi^c = \frac{2K^2}{a} \left[C_1 \xi_2(\varphi) + C_2 \xi_1(\varphi) \right] \cos \theta \quad [5.2]$$

donde

$$C_2 \equiv C_2^1, \quad \xi_2 \equiv \xi_2^1$$

Al despreciar ω al compararlo con ω^c , se obtienen M_θ , M_φ y $M_{\theta\varphi}$ de la [1.3] de la forma:

$$\left. \begin{aligned} M_\theta &= \left[-C_1 \left(\operatorname{ctg} \varphi \xi_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \xi_1 + \nu \xi_1 \right) + C_2 \left(\operatorname{ctg} \varphi \xi_2 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \xi_2 + \nu \xi_2 \right) \right] \cos \theta \\ M_\varphi &= \left[-C_1 \left(\xi_1 + \nu \left(\operatorname{ctg} \varphi \xi_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \xi_1 \right) \right) + C_2 \left(\xi_2 + \nu \left(\operatorname{ctg} \varphi \xi_2 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \xi_2 \right) \right) \right] \cos \theta \\ M_{\theta\varphi} &= \frac{1-\nu}{\operatorname{sen} \varphi} \left[C_1 \left(\xi_1 - \operatorname{ctg} \varphi \xi_1 \right) - C_2 \left(\xi_2 - \operatorname{ctg} \varphi \xi_2 \right) \right] \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \right\} \quad [5.3]$$

en las que

$$\operatorname{ctg} \varphi \xi_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \xi_1 = -\operatorname{sen} \varphi \left(\cos \varphi \frac{dV_1}{dx} + V_1 \right) \text{ y } \frac{\xi_2 - \operatorname{ctg} \varphi \xi_2}{\operatorname{sen} \varphi} = -\operatorname{sen} \varphi \frac{dV_2}{dx}$$

N_θ , N_φ y $N_{\theta\varphi}$ se deducen de la [1.5] como a continuación se indica:

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= \frac{2K^2}{a} \left[C_1 \xi_2 + C_2 \xi_1 \right] \cos \theta \\ N_\varphi &= \frac{2K^2}{a} \left[C_1 \left(\operatorname{ctg} \varphi \xi_2 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \xi_2 \right) + C_2 \left(\operatorname{ctg} \varphi \xi_1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \xi_1 \right) \right] \cos \theta \\ N_{\theta\varphi} &= \frac{2K^2}{a \operatorname{sen} \varphi} \left[C_1 \left(\xi_2 - \operatorname{ctg} \varphi \xi_2 \right) + C_2 \left(\xi_1 - \operatorname{ctg} \varphi \xi_1 \right) \right] \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \right\} \quad [5.4]$$

Q_θ y Q_φ se obtienen de la [1.4] de la siguiente forma:

$$Q_\theta = \frac{2K^2}{a \sin \varphi} [C_1 \xi_2 + C_2 \xi_1] \sin \theta \quad , , \quad Q_\varphi = \frac{2K^2}{a} [-C_1 \xi_2 - C_2 \xi_1] \cos \theta \quad [5.5]$$

donde:

$$\frac{\xi_2}{\sin \varphi} = V_2$$

Quitando las rotaciones y translaciones en los desplazamientos de la [2.3] se pueden obtener u y v como sigue:

$$\left. \begin{aligned} u &= (1 + \nu) \frac{2K^2}{Et} \frac{1}{\sin \varphi} [C_1 \xi_2 + C_2 \xi_1] \sin \theta \\ v &= (1 + \nu) \frac{2K^2}{Et} [-C_1 \xi_2 - C_2 \xi_1] \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad [5.6]$$

Refiriéndonos nuevamente a la [2.3], las rotaciones $u = u^r$, $v = v^r$ y $\omega = \omega^r$ respecto a los ejes $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$ son:

$$u^r = -a_1 \cos \varphi \sin \theta \quad , , \quad v^r = a_1 \cos \theta \quad , \quad \omega^r = 0 \quad [5.7]$$

Las translaciones $u = u^t$, $v = v^t$ y $\omega = \omega^t$ en la dirección del eje de $\theta = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se han obtenido en el artículo 3.2 como sigue:

$$u^t = A_1 \sin \theta \quad , \quad v^t = -A_1 \cos \varphi \cos \theta \quad , \quad \omega^t = A_1 \sin \varphi \cos \theta \quad [5.8]$$

donde a y A_1 son dos constantes arbitrarias.

conclusión

1.^a En este trabajo no se estudian ni las cargas superficiales ni las fuerzas del cuerpo, ya que la intención de su autor ha sido la de establecer fórmulas exclusivamente para las fuerzas externas y momentos que actúan en los bordes de las esferas. Se creyó que las condiciones de tensiones de membranas para las fuerzas superficiales se pueden superponer si se cree necesario.

Aunque no se han incluido en este estudio las fuerzas debidas al efecto térmico, deben tenerse en consideración siempre que existan problemas de temperatura. En cambio, sí se han tenido en consideración al establecer las ecuaciones originales, pero han sido omitidas en beneficio de la simplicidad en la presentación.

2.^a Para resumir la primera parte de este estudio observaremos que si consideramos la flexión de una esfera que tenga solamente un borde $\varphi = \varphi_0$, tendremos cuatro constantes arbitrarias A_1 , B_1 , C_1 y C_2 , determinadas en las condiciones en el borde de la esfera cuando tensiones y deformaciones se supone se presentan en forma de $\cos m\theta$, con $m \geq 1$. Cuando tomamos $m = 1$, las constantes A y B significan desplazamientos de la lámina como si se tratase de un cuerpo rígido que no tiene nada que ver con las tensiones. Por otra parte, el suponer que $m \geq 2$, las cuatro constantes afectan las tensiones de la esfera.

En la anterior argumentación se ha supuesto precisamente los casos en que no existen otros bordes, o cuando las influencias de fuerzas actuando a lo largo de otros bordes existentes, por ejemplo, A_2 , B_2 , C_3 y C_4 , pueden ser despreciadas.

Los resultados así obtenidos son, sin embargo, corrientemente aplicables a casos generales, debido a la naturaleza del rápido amortiguamiento de los momentos flectores.

3.^a Los problemas de flexión aquí tratados se refieren a láminas esféricas con limitaciones $\varphi (0 \leq \varphi < \pi \text{ ó } 0 < \varphi \leq \pi)$.

Cuando φ es pequeño, fuerzas y deformaciones se pueden calcular de la deformación ω y la función Φ de tensiones obtenida por los autores para láminas esféricas de pequeña flecha (nota bibliográfica 10):

$$\omega = \left[A \operatorname{ber}' \xi + B \operatorname{bei}' \xi + C \operatorname{ker}' \xi + D \operatorname{kei}' \xi + K_1 \varphi + \frac{K_2}{\varphi} \right] \cos \theta$$

$$\Phi = \left[\frac{Et}{a\beta^2} (B \operatorname{ber}' \xi - A \operatorname{bei}' \xi + D \operatorname{ker}' \xi - C \operatorname{kei}' \xi) + K_3 \varphi + \frac{K_4}{\varphi} \right] \cos \theta$$

donde $\xi = \beta \varphi$, $\beta^4 = 12 (1 - \nu^2) \frac{a^2}{t^2}$, $\operatorname{ber}' \xi = \frac{d}{d\xi} \operatorname{ber} \xi$ e.c.t., $A_1 \sim D_1$ y $K_1 \sim K_4$ son constantes arbitrarias.

En el caso de unión de dos láminas esféricas es posible el uso de las soluciones indicadas anteriormente para láminas de poca flecha y los resultados descritos en este estudio.

ejemplo

En estos análisis, las soluciones de las tensiones de membrana deben superponerse a las de la ecuación [5.4].

En este ejemplo, la solución obtenida se puede comparar con la solución aproximada correspondiente para láminas de poca flecha mencionada en el apartado (3) de las conclusiones.

El ejemplo es un caso en el que un momento extremo M actúa sobre una lámina esférica por el intermedio de una inserción cilíndrica rígida. En este caso las tensiones de membrana que deben añadirse son*:

Fig. 2

$$N_{\varphi}^M = \frac{1}{\sin^3 \varphi} \left(F(1 + \cos \varphi) + G(1 - \cos \varphi) \right) \cos \theta$$

$$N_{\theta}^M = -\frac{1}{\sin^3 \varphi} \left(F(1 + \cos \varphi) + G(1 - \cos \varphi) \right) \cos \theta$$

$$N_{\theta\varphi}^M = \frac{1}{\sin^3 \varphi} \left(F(1 + \cos \varphi) - G(1 - \cos \varphi) \right) \sin \theta$$

que corresponden a las tensiones derivadas del término $\frac{K_4}{\Phi}$ en la expresión de Φ para láminas de poca flecha.

* De la ecuación [3.4b] se obtiene:

$$N_{\varphi} = N_{\theta} = N_{\theta\varphi} = 0$$

(solución de la translación) con y_1 , y :

$$N_{\varphi} = -N_{\theta} = \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \cos \theta \quad N_{\theta\varphi} = -\frac{1}{\sin^3 \varphi} \sin \theta$$

(solución de una parte de la tensión de membrana) con y_2 .

Para las tensiones de membrana se toman los siguientes términos, aparte de la solución particular arriba indicada:

$$N_{\varphi} = -N_{\theta} = \frac{1}{\sin^3 \varphi} \cos \theta \quad N_{\theta\varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \sin \theta$$

Debido a la naturaleza local de carga, se supuso que las deformaciones y desplazamientos terminan por desaparecer en la región límite de la lámina.

En el límite interior $\varphi = \varphi_0$, y se dieron las condiciones siguientes: 1) El borde de la lámina va incrustrado en la inserción rígida, 2) La deformación según una circunferencia no se presenta a lo largo del borde de la lámina. Los cálculos se han desarrollado para el caso de $K = 14,0$ ($\beta = 19,799$) y se tomaron dos valores para φ_0 , es decir, $\varphi_0 = 11,5^\circ$ y $\varphi_0 = 30^\circ$.

En los gráficos adjuntos, en que se representan los valores de w y M_x , el trazo continuo da la solución rigurosa y el de puntos la solución aproximada para láminas de poca flecha. Aunque en el caso de $\varphi_0 = 11,5^\circ$ los dos valores de la solución se hallan en buena coincidencia, en el caso de $\varphi_0 = 30^\circ$ se observa que las curvas de la solución para láminas de poca flecha (planas) se desvían considerablemente de la solución rigurosa.

Caso (1) $\varphi_0 = 11,5^\circ$ $K = 14,0$ ($\beta = 19,799$) $\nu = 0,3$

Cambio de pendiente $\varphi = \varphi_0$:

Solución rigurosa; $x = -0,01050 \frac{M}{Et^3}$

Solución para pequeñas flechas; $x = -0,01011 \frac{M}{Et^3}$

Caso (2) $\varphi_0 = 30^\circ$ $K = 14,0$ ($\beta = 19,799$) $\nu = 0,3$

Cambio de pendiente $\varphi = \varphi_0$:

Solución rigurosa; $x = -3,932 \times 10^{-4} \frac{M}{Et^3}$

Solución para pequeñas flechas; $x = -3,175 \times 10^{-4} \frac{M}{Et^3}$