451 - 1

escaleras helicoidales

F. CASSINELLO, arquitecto

SINOPSIS

Método de cálculo de escaleras helicoidales de hormigón armado, ilustrado con un ejemplo proyectado y calculado por el autor del artículo.

cálculo

Introducción

La escasez de literatura técnica española sobre tema tan actual como es el del cálculo de escaleras helicoidales de hormigón armado, nos ha movido a estudiar el tema y tratar de presentarlo de forma que resulte de fácil comprensión para su inmediata aplicación a la práctica.

La zanca de una escalera helicoidal adopta la forma de un helicoide de eje y plano director. Su superficie alabeada está, pues, engendrada por una serie de generatrices rectas horizontales—paralelas al plano director que es el del suelo—, que cortan al eje de la hélice directriz. Dicha superficie posee una gran «rigidez de forma», como fácilmente puede intuirse al observar que, una cuadrícula ortogonal de hélices y generatrices rectas, sobre ella dibujada, tiene que perder la ortogonalidad de todos sus ángulos para sufrir cualquier tipo de deformación.

Esta «rigidez de forma» colabora eficazmente en la estabilidad de la escalera, pero, al considerarla en el cálculo, se complica el problema de tal modo, que preferimos prescindir de su eficaz colaboración y considerar la escalera helicoidal como formada por un elemento lineal—su eje helicoidal—, en cuya línea imaginamos condensada la sección transversal con todas sus características geométricas y mecánicas.

El fundamento del cálculo que vamos a desarrollar se basa en las hipótesis sentadas en el Betonkalender, consistente en la resolución del sistema hiperestático que plantean las ecuaciones de equilibrio de barras. Sobre la exactitud del sistema y valoración de los errores introducidos hay que considerar los siguientes puntos:

- 1.º En el cálculo de barras admitimos que las tensiones adoptan una cierta distribución lineal en la sección transversal de la pieza. Para materiales que se comporten de acuerdo con la Ley de Hooke, esta hipótesis es realmente cierta, siempre que la sección transversal sea pequeña en comparación con la longitud de la pieza y con el radio de curvatura del eje de la barra. Si nosotros aceptamos las mismas hipótesis para el cálculo de escaleras helicoidales, el error cometido no es mayor que el producido al calcular vigas de gran canto, piezas curvas, o placas, cuyas soluciones son, normalmente, aceptadas por todos en edificación, en virtud de los coeficientes de seguridad habitualmente empleados.
- 2.º El mismo razonamiento es válido para despreciar las deformaciones producidas por las tensiones normales y tangenciales, teniendo en cuenta, sin embargo, las deformaciones de torsión.
- 3.º Siendo frecuente hormigonar, simultáneamente, sobre la placa helicoidal—zanca de la escalera—los peldaños de la misma, el fuerte cambio de momento de inercia de las sucesivas secciones transversales, no es tenido en cuenta en el cálculo, aceptando la sección mínima como sección uniforme de la pieza, en beneficio de la simplificación del sistema. Por lo tanto, consideramos, cualquiera que sea el caso, la placa helicoidal sin peldaños y como si estuviese constituida por un cuerpo isótropo de sección uniforme, sin consideraciones previas sobre la situación de las armaduras. El no considerar la anisotropía de la placa, nos lleva, evidentemente, a un resultado distinto del riguroso, pero el error producido es bastante incierto.

Solución general

Sea la escalera helicoidal de la figura 1, en la que podemos apreciar sus características geométricas. Las cargas actuantes en el ancho, b , de la escalera, tiene una resultante, q , cuya excentricidad, e , respecto al eje y su mismo valor, q , son funciones de φ en los casos de carga variable.

Para dimensionar la escalera, tendremos que determinar las fuerzas y momentos desarrollados en secciones normales al eje de la misma. Pero para plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos, es mejor considerar las secciones transversales verticales; es decir, giradas un ángulo α respecto a las primeras. Estas fuerzas desarrolladas sobre las secciones transversales verticales, están ligadas a las producidas en secciones normales al eje por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= N \cdot \cos \alpha - Q_x \cdot \sin \alpha; & N &= \bar{Q}_x \cdot \sin \alpha + \bar{N} \cdot \cos \alpha; \\
 \bar{Q}_x &= N \cdot \sin \alpha - Q_x \cdot \cos \alpha; & Q_x &= \bar{Q}_x \cdot \cos \alpha - \bar{N} \cdot \sin \alpha; \\
 \bar{Q}_y &= Q_y; & Q_y &= \bar{Q}_y; \\
 \bar{M}_T &= M_T \cdot \cos \alpha - M_y \cdot \sin \alpha; & M_T &= \bar{M}_y \cdot \sin \alpha + \bar{M}_T \cdot \cos \alpha; \\
 \bar{M}_x &= M_x; & M_x &= \bar{M}_x; \\
 \bar{M}_y &= M_T \cdot \sin \alpha + M_y \cdot \cos \alpha; & M_y &= \bar{M}_y \cdot \cos \alpha - \bar{M}_T \cdot \sin \alpha.
 \end{aligned}
 \quad [1]$$

Como criterios de signo, establecemos φ en dirección positiva cuando coincide con la dirección de bajada de la escalera. La pendiente $\tan \alpha$, del eje de la placa, la señalamos siempre como positiva. Según esto, se deduce para escaleras a izquierdas o derechas las siguientes reglas:

N positivo, produce compresiones.

M_x positivo, produce tracciones en las fibras inferiores.

M_y positivo, produce tracciones en el borde interior.

Si observamos la sección transversal en dirección del tramo de escalera que sube, ocurre que:

Q_x positivo, va hacia arriba.

Q_y positivo, se dirige hacia dentro.

M_T positivo, es giro a derecha o izquierda según que la escalera sea a derechas o izquierdas, respectivamente.

De la figura 2 se deducen inmediatamente las ecuaciones de equilibrio:

Equilibrio de fuerzas:

según la dirección radial,

$$2\bar{N} \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - d\bar{Q}_y \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} = 0; \quad \bar{N} - \frac{d\bar{Q}_y}{d\varphi} = 0;$$

según la dirección tangencial,

$$d\bar{N} \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} + 2\bar{Q}_y \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0; \quad \frac{d\bar{N}}{d\varphi} + \bar{Q}_y = 0;$$

según la dirección vertical,

$$q \cdot r \cdot d\varphi - d\bar{Q}_x = 0; \quad q \cdot r - \frac{d\bar{Q}_x}{d\varphi} = 0.$$

Equilibrio de momentos:

en el plano radial,

$$q \cdot r \cdot d\varphi \cdot e + 2\bar{Q}_y \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot r + d\bar{M}_T \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} + \bar{M}_x \cdot d\varphi = 0;$$

$$q \cdot r \cdot e + r \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \bar{Q}_y + \frac{d\bar{M}_T}{d\varphi} + \bar{M}_x = 0;$$

en el plano tangencial,

$$r \cdot d\varphi \cdot \bar{Q}_x - 2\bar{N} \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot r - \bar{M}_T \cdot d\varphi + d\bar{M}_x \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} = 0;$$

$$r \cdot \bar{Q}_x - r \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \bar{N} - \bar{M}_T + \frac{d\bar{M}_x}{d\varphi} = 0;$$

en el plano horizontal,

$$2\bar{Q}_y \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} \cdot r - d\bar{M}_y = 0; \quad r \cdot \bar{Q}_y - \frac{d\bar{M}_y}{d\varphi} = 0.$$

Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales son las siguientes, como fácilmente puede comprobarse por sustitución:

$$\bar{Q}_x = r \cdot \int_0^\varphi q \cdot d\varphi + \frac{1}{r} \cdot X_1 \cdot \sin \alpha;$$

$$\bar{Q}_y = \frac{1}{r} (X_5 \cdot \cos \varphi + X_3 \cdot \sin \varphi);$$

$$\bar{N} = -\frac{1}{r} (X_5 \cdot \sin \varphi - X_3 \cdot \cos \varphi);$$

$$\bar{M}_x = f(\varphi) + X_4 \cdot \sin \varphi + X_6 \cdot \cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha (X_5 \cdot \varphi \cdot \cos \varphi - X_3 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi);$$

$$\bar{M}_y = -\cos \alpha (X_1 + X_2) + X_5 \cdot \sin \varphi - X_3 \cdot \cos \varphi;$$

$$\bar{M}_T = f(\varphi) + r^2 \cdot \int_0^\varphi q \cdot d\varphi + X_4 \cdot \cos \varphi - X_6 \cdot \sin \varphi + X_1 \cdot \sin \alpha - \\ - \operatorname{tg} \alpha (X_3 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi + X_5 \cdot \varphi \cdot \cos \varphi).$$

[2]

2

Expresiones en las que la función $f(\varphi)$ es solución de la ecuación diferencial:

$$f''(\varphi) + f(\varphi) = -q \cdot r(r + e), \quad [3]$$

y cuyas constantes de integración X_1 a X_6 son las incógnitas hiperestáticas del sistema.

La interpretación del método es la siguiente: el cálculo de una escalera helicoidal libre de apoyos intermedios constituye un sistema estáticamente indeterminado, con seis incógnitas hiperestáticas. Las indeterminaciones se resuelven al considerar los distintos tipos de sustentación y carga. Del sistema [2], y en función del [1], obtenemos los esfuerzos desarrollados sobre una sección normal al eje de la pieza:

$$\left. \begin{aligned} N &= r \cdot \sin \alpha \cdot \int_0^\varphi q \cdot d\varphi + \frac{1}{r} \cdot \sin^2 \alpha \cdot X_1 - \frac{1}{r} \cdot \cos \alpha (X_5 \sin \varphi - X_3 \cos \varphi); \\ Q_x &= r \cdot \cos \alpha \cdot \int_0^\varphi q \cdot d\varphi + \frac{1}{r} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot X_1 + \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin \alpha (X_5 \cdot \sin \varphi - X_3 \cos \varphi); \\ Q_y &= \frac{1}{r} (X_5 \cdot \cos \varphi + X_3 \cdot \sin \varphi); \\ M_T &= \cos \alpha [f'(\varphi) + r^2 \cdot \int_0^\varphi q \cdot d\varphi - \sin \alpha \cdot X_2 + X_4 \cos \varphi - X_6 \sin \varphi] - \\ &\quad - \sin \alpha (X_3 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi + X_5 \cdot \varphi \cdot \cos \varphi + X_3 \cdot \cos \varphi - X_5 \cdot \sin \varphi); \\ M_x &= f(\varphi) + \operatorname{tg} \alpha (X_3 \cdot \varphi \cdot \cos \varphi - X_5 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi) + X_4 \cdot \sin \varphi + X_6 \cdot \cos \varphi; \\ M_y &= -\sin \alpha [f'(\varphi) + r^2 \cdot \int_0^\varphi q \cdot d\varphi + X_4 \cdot \cos \varphi - X_6 \cdot \sin \varphi - \\ &\quad - \operatorname{tg} \alpha (X_3 \cdot \varphi \cdot \sin \varphi + X_5 \cdot \varphi \cdot \cos \varphi)] + \cos \alpha (X_5 \cdot \sin \varphi - X_3 \cdot \cos \varphi) - \\ &\quad - X_1 - \cos^2 \alpha \cdot X_2. \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

Escaleras doblemente empotradas

La forma más corriente de sustentación de escaleras helicoidales de hormigón armado, es aquella que tiene sus dos extremos doblemente empotrados. Este es el caso que consideramos y cuya resolución planteamos a continuación.

El desplazamiento en un punto, producido por la actuación de solicitaciones virtuales, viene dado por la expresión:

$$\delta'_{iK} = \int_F \int_S (\sigma_i \cdot \sigma_K + \tau_i \cdot \tau_K) dF \cdot ds; \quad [5]$$

en la que, despreciando las deformaciones producidas por la normal y esfuerzos cortantes, como es corriente, obtenemos:

$$\delta'_{iK} = \int_S \left(\frac{M_{xi} \cdot M_{xK}}{E \cdot I_x} + \frac{M_{yi} \cdot M_{yK}}{E \cdot I_y} + \frac{M_{Ti} \cdot M_{TK}}{G\theta} \right) ds. \quad [6]$$

El valor de la rigidez de torsión viene dado por:

$$G\theta = 2E \frac{I_x \cdot I_y}{I_x + I_y};$$

y si en vez de δ'_{iK} obtenemos un valor proporcional a él, multiplicado por $\cos \alpha \cdot E \cdot I_x / r$, obtenemos:

$$\delta_{iK} = \cos \alpha \cdot E \cdot \frac{I_x}{r} \cdot \delta'_{iK},$$

y como $ds = r \cdot d\varphi / \cos \alpha$, o, lo que es igual, $\frac{\cos \alpha}{r} \cdot ds = d\varphi$, la expresión [6] toma la forma siguiente:

$$\delta_{iK} = \int \left[M_{xi} \cdot M_{xK} + \frac{I_x}{I_y} \cdot M_{yi} \cdot M_{yK} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{I_x}{I_y} \right) M_{Ti} M_{TK} \right] d\varphi. \quad [7]$$

Los valores de M_i y M_K se determinan de las ecuaciones [4] al hacer que las solicitaciones virtuales tengan valor unidad, con lo que cada M_i viene expresado por el coeficiente correspondiente de X_i , mientras que el término independiente corresponde al valor de M_o . Así, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} M_{xo} &= f(\varphi); \\ M_{yo} &= -\sin \alpha [f'(\varphi) + r^2 \cdot \int_0^\varphi q \cdot d\varphi]; \\ M_{To} &= \cos \alpha [f'(\varphi) + r^2 \cdot \int_0^\varphi q \cdot d\varphi]; \end{aligned} \quad [8]$$

$$\begin{aligned} M_{x1} &= 0; \\ M_{y1} &= -1; \\ M_{T1} &= 0; \\ M_{x2} &= 0; \\ M_{y2} &= -\cos^2 \alpha; \\ M_{T2} &= -\sin \alpha \cos \alpha; \\ M_{x3} &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi \cdot \cos \varphi; \\ M_{y3} &= \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi \cdot \sin \varphi - \cos \alpha \cdot \cos \varphi; \\ M_{T3} &= -\sin \alpha (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi); \\ M_{x4} &= \sin \varphi; \\ M_{y4} &= -\sin \alpha \cdot \cos \varphi; \\ M_{T4} &= \cos \alpha \cdot \cos \varphi; \\ M_{x5} &= -\operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi \cdot \sin \varphi; \\ M_{y5} &= \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi; \\ M_{T5} &= -\sin \alpha (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi); \\ M_{x6} &= \cos \varphi; \\ M_{y6} &= \sin \alpha \cdot \sin \varphi; \\ M_{T6} &= -\cos \alpha \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \quad [9]$$

La simetría de estructura nos permite tomar origen en el punto medio de la escalera. La integración de la ecuación [7] la hacemos según los límites $+\varphi_o$, $-\varphi_o$. Todas las integrales del sistema [7], obtenido al dar los valores correspondientes del sistema [8], prescindiendo de sus factores constantes distintos, producen los siguientes valores:

$$\int \varphi^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{6} \varphi^3 + \frac{1}{8} (\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi - 2\varphi^2 \sin 2\varphi);$$

$$\int \varphi^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{6} \varphi^3 - \frac{1}{8} (\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi - 2\varphi^2 \sin 2\varphi);$$

$$\int \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{8} (\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi);$$

$$\int \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi;$$

$$\int \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{4} (2\varphi - \sin 2\varphi);$$

$$\int \cos^2 \varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{4} (2\varphi + \sin 2\varphi);$$

$$\int \cos \varphi \cdot d\varphi = \sin \varphi;$$

$$\int d\varphi = \varphi.$$

Y con estas integrales ya realizadas, y adoptando los parámetros

$$a = \frac{I_x}{I_y}; \quad c = \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha\right) (1 - a), \quad [10]$$

los desplazamientos obtenidos de dichas ecuaciones [7] toman las siguientes expresiones:

$$\delta_{11} = 2a \cdot \varphi_o;$$

$$\delta_{12} = 2a \cdot \cos^2 \alpha \cdot \varphi_o;$$

$$\delta_{13} = 2a [\cos \alpha \cdot \sin \varphi_o + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha (\varphi_o \cos \varphi_o - \sin \varphi_o)];$$

$$\delta_{14} = 2a \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_o;$$

$$\delta_{15} = \delta_{16} = 0;$$

$$\delta_{22} = \cos^2 \alpha (2c - 1 + 3a) \cdot \varphi_o;$$

$$\delta_{23} = \cos \alpha [(2c - 1 + 2a)(2 \sin \varphi_o - \varphi_o \cdot \cos \varphi_o) + a \cdot \varphi_o \cdot \cos \varphi_o];$$

$$\delta_{24} = -\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha (1 - a) \cdot \sin \varphi_o;$$

$$\delta_{25} = \delta_{26} = 0;$$

$$\delta_{33} = \operatorname{tg}^2 \alpha \left[\frac{1}{3} (2 - c) \cdot \varphi_o^3 + \frac{1}{2} c \cdot \varphi_o^2 \cdot \sin 2\varphi_o + \frac{1}{4} (2 - 3c - 2a) \right. \\ \left. (\sin 2\varphi_o - 2\varphi_o \cos 2\varphi_o) \right] + \frac{1}{4} (2c - 1 + 3a) (2\varphi_o + \sin 2\varphi_o); \quad [11]$$

$$\delta_{34} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha [c(\sin 2\varphi_o - 2\varphi_o \cdot \cos 2\varphi_o) - 2(1 - c - a)(2\varphi_o + \sin 2\varphi_o)];$$

$$\delta_{35} = \delta_{36} = 0;$$

$$\delta_{44} = (2 - c) \varphi_o - \frac{1}{2} c \sin 2\varphi_o;$$

$$\delta_{45} = \delta_{46} = 0;$$

$$\delta_{55} = \operatorname{tg}^2 \alpha \left[\frac{1}{3} (2 - c) \cdot \varphi_o^3 - \frac{1}{2} c \cdot \varphi_o^2 \cdot \sin 2\varphi_o - \frac{1}{4} (2 - 3c - 2a) \right. \\ \left. (\sin 2\varphi_o - 2\varphi_o \cdot \cos 2\varphi_o) \right] + \frac{1}{4} (2c - 1 + 3a) (2\varphi_o - \sin 2\varphi_o);$$

$$\delta_{56} = -\frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha [2(1 - c - a)(2\varphi_o - \sin \varphi_o) + c(\sin 2\varphi_o - 2\varphi_o \cos 2\varphi_o)]; \quad [12]$$

$$\delta_{66} = (2 - c) \varphi_o + \frac{1}{2} c \cdot \sin 2\varphi_o;$$

$$\delta_{ok} = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \left[M_{xo} M_{xk} + a M_{yo} M_{yk} + \frac{1}{2} (1+a) M_{To} M_{Tk} \right] \cdot d\varphi. \quad [13]$$

Conocidos los valores de los desplazamientos producidos por las solicitaciones virtuales de valor unidad, las incógnitas hiperestáticas se deducen del sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 &= \delta_{o1}; \\ \delta_{12}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 &= \delta_{o2}; \\ \delta_{13}X_1 + \delta_{23}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 &= \delta_{o3}; \\ \delta_{14}X_1 + \delta_{24}X_2 + \delta_{34}X_3 + \delta_{44}X_4 &= \delta_{o4}; \\ \delta_{55}X_5 + \delta_{56}X_6 &= \delta_{o5}; \\ \delta_{56}X_5 + \delta_{66}X_6 &= \delta_{o6}; \end{aligned} \right\} \quad [14]$$

En la matriz de estas incógnitas desaparecen todos los δ_{i5} y δ_{i6} para $i=1$ a $i=4$, con lo que obtenemos dos matrices independientes, correspondientes a las cargas asimétricas y simétricas:

Matriz correspondiente a la carga simétrica,

$$\left. \begin{aligned} \delta_{55} \quad \delta_{56} \quad -\delta_{o5} \\ \delta_{56} \quad \delta_{66} \quad -\delta_{o6} \\ X_5 \quad X_6 \end{aligned} \right\} \quad [15]$$

Matriz correspondiente a la carga asimétrica,

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \quad \delta_{12} \quad \delta_{13} \quad \delta_{14} \quad -\delta_{o1} \\ \delta_{12} \quad \delta_{22} \quad \delta_{23} \quad \delta_{24} \quad -\delta_{o2} \\ \delta_{13} \quad \delta_{23} \quad \delta_{33} \quad \delta_{34} \quad -\delta_{o3} \\ \delta_{14} \quad \delta_{24} \quad \delta_{34} \quad \delta_{44} \quad -\delta_{o4} \\ X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \end{aligned} \right\} \quad [16]$$

Cuando la carga es simétrica, es decir, cuando $q(\varphi)$ y $q(\varphi) \cdot e(\varphi)$ son funciones exactas de φ , prescindimos de los valores de δ_{o1} a δ_{o4} , pues en este caso son nulos los valores de X_1 a X_4 , y sólo necesitamos calcular la matriz [14] cuyas incógnitas hiperestáticas toman la forma:

$$\left. \begin{aligned} X_5 &= - \frac{\delta_{66} \cdot \delta_{o5} - \delta_{56} \cdot \delta_{o6}}{\delta_{55} \cdot \delta_{66} - \delta_{56}^2}; \\ X_6 &= - \frac{\delta_{55} \cdot \delta_{o6} - \delta_{56} \cdot \delta_{o5}}{\delta_{55} \cdot \delta_{66} - \delta_{56}^2}. \end{aligned} \right\} \quad [17]$$

Para cargas asimétricas, es decir, cuando $q(\varphi)$ y $q(\varphi) \cdot e(\varphi)$ son funciones no exactas de φ , resolvemos, además de la matriz [14], los valores correspondientes de la [15], puesto que no son nulas, en general, ninguna de las X_i .

Carga uniformemente repartida

El caso más frecuente que se presenta en el cálculo de escaleras helicoidales, es el que estudiamos a continuación, consistente en la actuación de una sobrecarga uniformemente repartida en el espesor uniforme de la zanca. En este caso, tanto la carga, q , como el valor de la excentricidad, e , son constantes a lo largo de toda la pieza y, por lo tanto, independientes de φ . Como consecuencia, por ser constante $q \cdot r \cdot (r+e)$, la solución de la ecuación diferencial [3] es inmediata:

$$f(\varphi) = -q \cdot r^2(1 + e/r); f'(\varphi) = 0; \quad [18]$$

y según [8]:

$$\begin{aligned} M_{xo} &= -q \cdot r^2(1 + e/r); \\ M_{yo} &= -q \cdot r^2 \cdot \varphi \cdot \text{sen } \alpha; \\ M_{To} &= q \cdot r^2 \cdot \varphi \cdot \cos \alpha; \end{aligned}$$

y según [13]:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{o1} &= \delta_{o2} = \delta_{o3} = \delta_{o4} = 0; \\ \delta_{o5} &= 2q \cdot r^2 \cdot \text{tg } \alpha [(4 - 3c - a + e/r)(\text{sen } \varphi_0 - \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0) - \\ &\quad - (1 - c) \varphi_0^2 \cdot \text{sen } \varphi_0]; \\ \delta_{o6} &= 2q \cdot r^2 [(1 - c) \varphi_0 \cdot \cos \varphi_0 - (2 - c + e/r) \text{sen } \varphi_0], \end{aligned} \right\} \quad [19]$$

siendo, por lo demás, válidas las ecuaciones [10], [12], [15] y [17].

Un ejemplo

Vamos a calcular una escalera helicoidal doblemente empotrada y sometida a carga uniforme, en la que, por haber adoptado la sección en T, concentrando la sección junto al eje de la pieza, los resultados obtenidos se aproximan más a su sollicitación real.

Características geométricas y mecánicas de la solución adoptada:

Desarrollo de la escalera:

$$\begin{aligned}\varphi &= 320^\circ; \varphi_0 = \pm 160^\circ = \pm 2,795 \text{ radianes;} \\ \text{sen } \varphi_0 &= 0,341; \cos \varphi_0 = -0,94; \\ \text{sen } 2\varphi_0 &= -0,642; \cos 2\varphi_0 = 0,767.\end{aligned}$$

Radio en planta:

$$\begin{aligned}\text{Radio interior: } r_1 &= 100 \text{ cm;} \\ \text{Radio medio: } r &= 155 \text{ cm;} \\ \text{Radio exterior: } r_2 &= 210 \text{ cm.}\end{aligned}$$

Sección adoptada:

Sección en T, formada por una placa superior de 6 cm de espesor y un nervio central de 30×30 cm.

alzado planta sección

Pendiente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{420 \times 360}{155 \times 2 \times 3,14 \times 320} = 0,485; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \alpha = 25,8^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 0,435; \operatorname{cos} \alpha = 0,90.$$

Centro de gravedad de la sección:

Lo determinamos al hacer nulo el momento estático, respecto al eje horizontal que pasa por el centro de gravedad:

$$80 \times 6 \cdot x - 30 \times 30(12 - x) = 0;$$

$$x = \frac{10.800}{1.380} = 7,85 \text{ cm.}$$

Momentos de inercia de la sección respecto a los ejes principales:

$$I_x = 80 \times 6 \times 7,85^2 + 30 \times 30(12 - 7,85)^2 = 45.320 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = 2 \times 40 \times 6 \times 35^2 + 2 \times 30 \times 15 \times 7,5^2 = 638.100 \text{ cm}^4.$$

Parámetros para el cálculo:

$$a = \frac{I_x}{I_y} = \frac{45.320}{638.100} = 0,071;$$

$$c = \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha\right) (1 - a) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \times 0,9^2\right) (1 - 0,071) = 0,553;$$

$$e/r = 0,042.$$

Determinación de las expresiones analíticas de los momentos y componentes normales y tangenciales:

Dado que la sollicitación, tanto de peso propio como de sobrecarga, es uniforme, la función, solución de la ecuación diferencial que plantea el equilibrio del sistema es, según [18], de la forma:

$$f(\varphi) = -1,042q \cdot r^2; \quad f'(\varphi) = 0.$$

Los desplazamientos producidos en la estructura, según [19] y [12], toman los siguientes valores:

$$\delta_{01} = \delta_{02} = \delta_{03} = \delta_{04} = 0;$$

$$\delta_{05} = 5,46 \, q \cdot r^2;$$

$$\delta_{06} = -3,358 \, q \cdot r^2;$$

$$\delta_{55} = 3,347;$$

$$\delta_{56} = -0,148;$$

$$\delta_{66} = 3,862.$$

En función de estos desplazamientos obtenidos, las incógnitas hiperestáticas toman los siguientes valores:

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0;$$

y según [17]:

$$X_5 = -1,605 \, q \cdot r^2;$$

$$X_6 = 1,373 \, q \cdot r^2.$$

Las componentes de fuerzas y momentos en una sección transversal cualquiera, normal al eje de la pieza, vienen dadas en función del ángulo φ , el cual define la posición de dicha sección, por las expresiones [4]:

$$N = (0,435\varphi + 1,445 \operatorname{sen} \varphi) q \cdot r;$$

$$Q_x = (0,9\varphi - 0,7 \operatorname{sen} \varphi) q \cdot r;$$

$$Q_y = -1,605 \, q \cdot r \cdot \cos \varphi;$$

$$M_T = (0,698\varphi \cdot \cos \varphi - 2,071 \operatorname{sen} \varphi + 0,9 \varphi) q \cdot r^2;$$

$$M_x = (-0,762\varphi \cdot \operatorname{sen} \varphi + 1,373 \cos \varphi - 1,042) q \cdot r^2;$$

$$M_y = (-0,3485\varphi \cdot \cos \varphi - 0,847 \operatorname{sen} \varphi - 0,435 \varphi) q \cdot r^2.$$

gráficas de esfuerzos y momentos

Escala de esfuerzos: $q \cdot r = 1,37 \text{ cm}$

Escala de momentos: $q \cdot r^2 = 0,7 \text{ cm}$

Obtenidas estas expresiones, se determinan las gráficas de cada una de las sollicitaciones, con objeto de poder considerar luego las secciones más desfavorables para el cálculo de armaduras y distribución de las mismas.

Para ello calculamos los valores de esfuerzos y momentos en las secciones correspondientes a los valores de φ igual a: 0° , $\pm 30^\circ$, $\pm 60^\circ$, $\pm 90^\circ$, $\pm 120^\circ$ y $\pm 160^\circ$. Con los datos obtenidos, y a sus correspondientes escalas, trazamos las gráficas radiales sobre el arco planta de la hélice que constituye el eje de la escalera (figura 4).

Una vez determinados estos valores y fijados los datos de peso propio y sobrecarga, así como las tensiones admisibles en hormigón y acero, el problema se reduce a calcular una serie de secciones sometidas a flexión compuesta.