una fórmula para determinar la tensión de fisuración

A. PÁEZ, ingeniero de caminos

459-2

SINOPSIS

En este trabajo se desarrolla una tesis, mitad teórica y mitad experimental, que permite llegar a unos resultados concretos.

No se pretende, en modo alguno, establecer una teoría. El autor estima que, dado el gran número de variables que intervienen en el fenómeno de la fisuración, tampoco las fórmulas generales son de verdadera aplicación práctica. Sólo las fórmulas finales, correspondientes a casos concretos, pueden ser realmente de cómodo manejo.

No obstante, pueden ser útiles en determinados casos. Habiéndose determinado los coeficientes de tal modo que representan los resultados experimentales, los valores que se deducen de la aplicación de estas fórmulas son los que se han obtenido en los ensayos, al menos en las condiciones en que éstos se han desarrollado. Estas condiciones son las normales en la práctica de la construcción, y así parece que, para las cuantías, calidad de hormigones y tipos de acero más corrientes, las fórmulas deben proporcionar unos resultados acordes con la realidad.

Tensión de fisuración

Los ensayos realizados sobre piezas de hormigón armado por F. G. Thomas (Congreso de Ponts et Charpentes, Berlín 1946. Publ. preliminar página 231) muestran que, con suficiente aproximación, la tensión σ_o del acero capaz de producir la primera fisura en el hormigón, es decir, de iniciar el deslizamiento de la barra, viene expresada mediante la relación teóricamente deducida por Brice:

$$\sigma_o q = \frac{R_b}{K'} \quad [1]$$

siendo: q la cuantía, K' una constante y R_b la resistencia del hormigón en tracción, medida en los ensayos de flexión.

El hecho de que los citados ensayos se hayan realizado exclusivamente sobre piezas de cuantía normal, obliga a generalizar la fórmula dotándola de un mayor número de parámetros, y a escribirla en la forma:

$$\sigma_o = \frac{R_b}{K_1(K_2 + q)} \quad [2]$$

en donde K_1 y K_2 son constantes.

El estudio desarrollado por A. I. Johnson (Memorias A. I. P. C. 1951) pone de manifiesto la buena concordancia de los resultados experimentales con la teoría propuesta por L. P. Brice (1951-1952), según la cual la tensión en el acero, una vez producidos los primeros deslizamientos respecto al hormigón que le envuelve, es función lineal de la distancia x a la fisura, por ser prácticamente constante el rozamiento entre ambos materiales.

Si ϕ es el diámetro de la barra y β el citado coeficiente unitario de rozamiento, la tensión del acero en un punto situado a la distancia x de la fisura será:

$$\sigma_x = \sigma_f - \frac{\pi \phi x \beta}{1/4 \pi \phi^2} = \sigma_f - \frac{4\beta}{\phi} x, \quad [3]$$

siendo σ_f la tensión del acero entre los labios de la fisura.

En un punto, situado a una distancia $x = \gamma$ suficientemente alejado de la fisura, dejará de producirse tal deslizamiento, aceptando el hormigón y el acero las mismas deformaciones. La tensión

a la cual está sometida la armadura en tal sección es, de acuerdo con las fórmulas [2] y [3],

$$\sigma_{\gamma} = \frac{R_b}{K_1(K_2 + q)} = \sigma_f - \frac{4\beta}{\phi} \gamma, \quad [4]$$

con lo que:

$$\gamma = \frac{\phi}{4\beta} \left(\sigma_f - \frac{R_b}{K_2 + q} \cdot \frac{1}{K_1} \right) \quad [5]$$

Según Caquot (Instrucción francesa 1945, artículo 2.310), el rozamiento β está vinculado a la resistencia R_b mediante la ley:

$$\frac{R_b}{\beta} = \frac{1}{2K} \left(1 + \frac{\phi}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{\phi}{\delta_2} \right), \quad [6]$$

en donde: δ_1 y δ_2 son las distancias del eje de la barra a las dos caras ortogonales más próximas, y K una constante igual a la unidad cuando se emplean redondos lisos, e igual a 1,8 cuando se utilizan armaduras rugosas.

Introduciendo el valor β , deducido de [6] en [5], se obtiene:

$$\gamma = \frac{\phi \left(1 + \frac{\phi}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{\phi}{\delta_2} \right)}{4 \times 2KR_b} \left[\sigma_f - \frac{R_b}{(K_2 + q)K_1} \right] \quad [7]$$

El valor de γ así hallado expresa la mínima separación que puede existir entre fisuras. El bloque de hormigón comprendido entre dos grietas separadas la distancia 2γ no se volverá a fisurar. Puesto que la máxima separación es igual a 2γ , la distancia L entre grietas deberá ser:

$$\gamma < L < 2\gamma$$

Según se desprende de los ensayos efectuados por K. Hajnal Kónyi (1951), la adherencia entre el hormigón y el acero, no considerada anteriormente, y que supone una tensión que es necesario vencer para que pueda producirse el deslizamiento entre ambos materiales, así como las débiles discrepancias entre la distribución lineal de tensiones supuesta y la real, hacen que la separación media L entre grietas venga representada mejor que por la fórmula [7], por la siguiente expresión:

$$L = \frac{\left(1 + \frac{\phi}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{\phi}{\delta_2} \right) (\phi + K_3)K_4}{4 \times 2KR_b} \left[\sigma_f - \frac{R_b}{(K_2 + q)K_1} \right] =$$

$$= L = \frac{\phi \Psi}{4R_b} \left[\sigma_f - \frac{R_b}{K_1(K_2 + q)} \right], \quad [8]$$

siendo:

$$\Psi = \frac{\left(1 + \frac{\phi}{\delta_1} \right) \left(1 + \frac{\phi}{\delta_2} \right) \left(1 + \frac{K_3}{\phi} \right) K_4}{2K}, \quad [9]$$

expresión que se identifica con la [7], inicialmente deducida, con sólo hacer:

$$K_3 = 0$$

Entre dos grietas separadas la distancia L se producen unos deslizamientos elementales, en cada rebanada de espesor dx , iguales a:

$$d\varepsilon = \frac{1}{E_a} (\sigma_x - \sigma_{\gamma}) dx,$$

y el deslizamiento total correspondiente a esta distancia L será igual a la anchura a_g de la grieta, y valdrá:

$$a_g = 2 \int_0^{\frac{1}{2}L} \frac{\sigma_x - \sigma_{\gamma}}{E_a} dx = \frac{2}{E_a} \int_0^{\frac{1}{2}L} \left(\sigma_f - \frac{4\beta}{\phi} x - \sigma_{\gamma} \right) dx = \frac{1}{E_a} \left(\sigma_f - \sigma_{\gamma} - \frac{\beta L}{\phi} \right), \quad [10]$$

siendo: E_a el módulo de elasticidad de la armadura.

Sustituyendo L y σ_{γ} por los valores anteriormente deducidos, se obtiene:

$$a_g = \frac{\phi \Psi}{4R_b E_a} \left[\sigma_f - \frac{R_b}{K_1(K_2 + q)} \right] \left[\sigma_f - \frac{R_b}{K_1(K_2 + q)} - \frac{\beta \Psi}{4R_b} \left(\sigma_f - \frac{1}{K_1} \cdot \frac{R_b}{K_2 + q} \right) \right] = \frac{K_3 \Psi \phi}{R_b E_a} \left[\sigma_f - \frac{R_b}{K_1(K_2 + q)} \right]^2 \quad [11]$$

Despejando σ_f y sustituyendo Ψ por su valor, se obtiene:

$$\sigma_f = \frac{R_b}{K_1(K_2 + q)} + \sqrt{\frac{2Ka_g R_b E_a}{K_3 K_4 (1 + \frac{\phi}{\delta_1}) (1 + \frac{\phi}{\delta_2}) (\phi + K_3)}} \quad [12]$$

y, finalmente, definiendo las constantes de tal modo que satisfagan los resultados experimentales, se obtiene, para $E_a = 2.100.000 \text{ Kg/cm}^2$,

$$\sigma_f = \frac{R_b}{0,01 + q} + 1.000 \sqrt{\frac{90a_g K R_b}{(1 + \frac{\phi}{\delta_1}) (1 + \frac{\phi}{\delta_2}) (1 + \phi)}} \quad [13]$$

fórmula en la cual todas las unidades deben expresarse en Kg y cm.

Los ensayos realizados muestran una dudosa influencia de la calidad del hormigón en la amplitud de la grieta. W. Djabry (1952) opina que dicha anchura es prácticamente independiente de la resistencia del hormigón. Los ensayos de K. H. Kónyi presentan unos resultados un tanto desconcertantes.

En unas series, las tensiones en el acero, para una misma anchura de grieta, son tanto mayores cuanto mayor es la resistencia del hormigón. En otras, por el contrario, ocurre a la inversa y, finalmente, existen series enteras en las cuales la resistencia del hormigón no parece afectar los resultados (véase cuadro adjunto).

Posiblemente, el índice que mejor representa la influencia de la calidad del hormigón en este fenómeno de agrietamiento, lo constituye la máxima deformación unitaria en tracción que dicho material es capaz de resistir sin romperse. En los ensayos de rotura en compresión, el aumento del módulo de deformación con la resistencia hace que la deformación de rotura sea prácticamente independiente de la resistencia e igual a 0,0018 en la mayoría de los hormigones corrientes. De suceder algo semejante bajo los esfuerzos de tracción, y de ser este alargamiento unitario en rotura, el determinante principal de la amplitud de grieta en lo que al hormigón se refiere, nada tendría de extraño la citada independencia con la resistencia, y que sólo existiese una oscura relación, de escasa influencia en el fenómeno del agrietamiento, entre

la anchura de grieta y la calidad o elongabilidad del material vertido.

Por esta razón parece lógico asignar a la resistencia R_b un valor medio, representativo de los hormigones de calidad normal, de tal modo que los errores introducidos sean mínimos y siempre inferiores a la dispersión media de los resultados experimentales obtenidos.

Haciendo, a tal efecto, $R_b = 13$ en la fórmula [13], se obtiene:

$$\sigma_f = \frac{13}{q + 0,01} + 34.000 \sqrt{\frac{a_g K}{(1 + \frac{\phi}{\delta_1}) (1 + \frac{\phi}{\delta_2}) (1 + \phi)}} \quad [14]$$

El significado y las dimensiones de los símbolos incluidos en esta fórmula son los siguientes:

ϕ = Diámetro real o nominal de la armadura en cm.

δ_1 y δ_2 = Recubrimientos o distancias en vertical y en horizontal de la superficie de la barra a los paramentos horizontal y vertical de la viga, respectivamente, en cm.

a_g = Anchura máxima de la grieta, en cm.

K = Constante de valor $K = 1$ para barras lisas, y $K = 1,8$ para las barras rugosas.

q = Cuantía o relación sección de acero/sección de hormigón.

σ_f = Tensión en la armadura, capaz de producir unas grietas cuya anchura máxima es a_g , expresada en Kg/cm².

En general, la anchura máxima de la grieta admisible se fija en un tercio de milímetro. En esta hipótesis ($a_g = 0,033$), la fórmula [14] se reduce a:

$$\sigma_f = \frac{13}{q + 0,01} + 6.250 \sqrt{\frac{K}{(1 + \frac{\phi}{\delta_1}) (1 + \frac{\phi}{\delta_2}) (1 + \phi)}} \quad [15]$$

en donde todos los símbolos tienen las mismas dimensiones y significado que en la fórmula [14].

Como máxima simplificación, en el caso en que $\delta_1 = \delta_2 = 1,5 \varnothing$, la tensión de fisuración en Kg/cm² es:

$$\sigma_f = \frac{13}{q + 0,01} + \frac{3.750}{\sqrt{1 + \varnothing}} \quad [16]$$

en barras lisas, y

$$\sigma_f = \frac{13}{q + 0,01} + \frac{5.000}{\sqrt{1 + \varnothing}} \quad [17]$$

en barras rugosas. Como en las fórmulas anteriores, $\varnothing$ representa el diámetro de la barra, en cm.

En el adjunto cuadro puede observarse la concordancia entre los valores experimentales registrados por K. H. Kónyi y los deducidos mediante la aplicación de la fórmula [14].

Serie	Sup. de la barra	K	$\varnothing$ mm	δ_1 cm	δ_2 cm	Cuántia q	Resistencia hormigón kg/cm ²	Anchura grieta mm	Tensión de fisuración experim. calculada kg/cm ² kg/cm ²
4 L	lisa	1	32	5	3,5	0,0099	170	0,25	2.000 2.144
4 H	lisa	1	32	5	3,4	0,0098	340	0,25	3.200 2.134
5 L	lisa	1	28	5	3,2	0,0077	170	0,25	2.500 2.355
5 H	lisa	1	28	5	3,3	0,0078	340	0,25	3.100 2.364
7 L	rugosa	1,8	25	5	3,2	0,006	170	0,25	3.160 3.189
7 H	rugosa	1,8	25	5	3,2	0,006	340	0,25	3.100 3.192
20 L	lisa	1	2,6	3,2	3,2	0,0016	170	0,25	5.300 5.530
20 H	lisa	1	2,6	3,2	3,2	0,0018	340	0,25	6.000 5.541
6 L	rugosa	1,8	25	5	3,2	0,00598	170	0,25	— 3.192
6 H	rugosa	1,8	25	5	3,3	0,00596	340	0,25	3.220 3.204
8 L	rugosa	1,8	25	5	3,3	0,00593	170	0,25	3.230 3.210
8 H	rugosa	1,8	25	5	3,4	0,006	340	0,25	2.500 3.212
9 L	rugosa	1,8	25	5	3,8	0,006	170	0,25	2.770 3.317
9 H	rugosa	1,8	25	5	3,9	0,006	340	0,25	3.550 3.282
14 L	rugosa	1,8	25	5	3,7	0,0061	170	0,25	2.940 3.259
14 H	rugosa	1,8	25	5	3,8	0,0051	340	0,25	2.950 3.257
15 L	rugosa	1,8	25	5	3,7	0,006	170	0,25	3.530 3.264
15 H	rugosa	1,8	25	5	2,3	0,0058	340	0,25	3.400 3.012
16 L	rugosa	1,8	25	5	3,3	0,006	170	0,25	3.500 3.206
16 H	rugosa	1,8	25	5	2,5	0,00585	340	0,25	3.150 3.080

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- F. G. THOMAS: Congreso de la A. I. P. C. Berlín 1946. Publ. Prel.
- A. I. JOHNSON: Association Inter. Ponts et ch. 1951.
- L. P. BRICE: Anales del I. T. B. T. P. Marzo-abril 1951, y junio 1952.
- K. HAJNAL KONYI: Comparative Tests on Various Types of Bars as Reinforcement of Concrete Beams. The Structural Engineer. Mayo 1951.
- W. DJABRY: Rapport núm. 184 del Laboratorio Federal de Zurich. 1952.
- D. WATSTEIN and D. E. PARSONS: National Bureau of Standards. Research paper RP 1545.
- A. S. T. M. specifications for steel bars for concrete reinforcement (Dic. 1950).
- H. GRANHOLM: The Reinforced Concrete Review. Oct. 1951.
- EDITORIAL: Bond Strength or reinforced bars. Concrete. Oct. 1951.
- G. WASTLUND et JOHNSON: Congreso de la A. I. P. C. Lieja 1948. Publ. Prel.
- A. BICHARA: Cahiers du C. S. et T. de B. Núms. 117 y 127.
- R. M. MAINS: Journal of the A. C. I. Noviembre 1951.
- G. WASTLUND: Testing of reinforcing bars. R. I. L. E. M.
- F. CAMPUS: Limites de fluage et de relaxation des aciers à la température ordinaire. R. I. L. E. M.
- G. WASTLUND: The properties of reinforcing bars. Report núm. 5. R. I. L. E. M. Marzo 1955.
- G. WASTLUND: Rapport de la Commission des aciers à béton armé. R. I. L. E. M. Munich 17-20. Sept. 1956.