

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE GRAFOS A LA PLANIFICACIÓN Y PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS

(GRAPHS IN PROJECT PLANNING AND PROGRAMMING)

Alfonso Recuero y Olga Río, Drs. Ings. de Caminos
Instituto Eduardo Torroja - CSIC

Marina Álvarez, Dra. Arquitecta
Facultad de Informática, UPM, Campus Montegancedo
Boadilla del Monte, Madrid
ESPAÑA

Fecha de recepción: 15 - VII - 94
403-15

RESUMEN

Se presenta un conjunto de herramientas matemáticas para la planificación y programación de proyectos mediante grafos, que hacen uso de un esquema compacto y eficiente para almacenar y manejar la información que se organiza en listas de adyacencia, almacenadas en matrices unidimensionales sin punteros. Todas ellas se basan en la generación y búsqueda en profundidad de un árbol (Depth-first-search), cuyo esquema genérico se describe detalladamente, así como las condiciones específicas de cada uno de los procesos concretos.

SUMMARY

A set of mathematical tools for activities planning based on graphs is presented. A compact and efficient storage scheme is proposed that can be easily handle by the algorithms, and which makes use of adjacency lists, consisting of one-dimension arrays without pointers. All tools are based on depth-search, and they are generically described together with the particular conditions of each case.

1. Introducción

El desarrollo de un proyecto consiste en la ejecución de un conjunto de actividades, estando el comienzo de cada una de ellas subordinado a la conclusión de otras. Los métodos PERT (Programme Evaluation and Review Technique), desarrollado por la U.S. Navy durante el proyecto Polaris, CPM (Critical Path Method), por encargo de la compañía Dupont, y otros similares, fueron ampliamente utilizados a partir de los sesenta, gracias a la introducción de los computadores electrónicos.

1.1. Planificación, programación y control de un proyecto

En la gestión de proyectos pueden distinguirse las siguientes fases: selección de objetivos, estrategia para su realización, determinación de necesidades para llevarlo a cabo, asignación de recursos y control de todo el proceso. Los métodos PERT y CPM (1, 2, 3, 4) son particularmente útiles en la gestión de proyectos en general y en especial en las fases de planificación. En cuanto a los recursos, habitualmente pueden considerarse los siguientes: mano de

obra, capital, materiales, maquinaria y tiempo. Otro elemento esencial en un proyecto lo constituyen las condiciones o restricciones impuestas externamente por la entrega de materiales, disponibilidad de maquinarias, etc. y que deben tenerse en cuenta a la hora de planificar el proyecto.

La herramienta básica de la planificación de operaciones es el diagrama de flechas (PERT, PERT/COST, CPM). Las flechas se conectan en una secuencia lógica que indica el flujo del trabajo desde el inicio hasta el final del proyecto. A cada actividad se le asigna un tiempo de duración estimado, a partir del cual es posible determinar qué secuencia de actividades, a través de un proyecto, es la más larga, o en otras palabras la más crítica. La planificación se puede definir como la determinación de las necesidades de recursos del proyecto, y su orden de aplicación en las diversas operaciones que deben realizarse, para lograr los objetivos del mismo.

En esta fase de planificación sólo se consideran las operaciones y las limitaciones permitiendo elaborar un plan maestro que puede usarse como modelo del proyecto para simular acontecimientos reales. Una vez se ha elaborado dicho plan maestro se procede con la programación. Un programa puede definirse como una tabla de tiempos de calendario para asignar o aplicar recursos a las actividades del proyecto, dentro de los límites disponibles.

De lo expuesto en los párrafos anteriores se ve que la planificación y la programación constituyen dos etapas separadas. Ésta es la principal diferencia que presentan los métodos basados en redes con respecto a los denominados métodos tradicionales que se empezaron a emplear a principios de este siglo (diagramas de barras y cartas de Gantt). En los métodos tradicionales la planificación, asignación de recursos y la programación se llevan a cabo simultáneamente. No obstante, el diagrama de barras presenta la ventaja de su fácil lectura y es por eso que se utiliza como presentación del CPM.

Si bien desde su origen (finales de los cincuenta) los métodos PERT y CPM han sufrido modificaciones y cada uno posee actualmente muchas características que al principio sólo se encontraban en el otro; existen sin embargo dos diferencias fundamentales:

— El método CPM se basa fundamentalmente en las tareas o trabajos realizados (actividades),

mientras que el PERT se forma con los acontecimientos importantes que ocurren en el curso de un programa.

— El CPM utiliza una sola medida del tiempo por actividad (método determinista), dado que en su origen se destinó a una empresa industrial con procesos bien definidos, y el PERT, tres medidas de tiempo estudiando al final la probabilidad de alcanzar el plazo fijado (método semiprobabilista), debido a que en su origen fue destinado al control de un proyecto de I+D, en el que los tiempos debían estimarse con un margen de error.

1.2. Grafos

Un grafo es un conjunto de vértices conectados por medio de aristas. Las aristas pueden estar direccionadas, en cuyo caso se las denomina arcos, y a las mismas se les puede asignar un peso que puede representar por ejemplo su longitud o un tiempo asociado con la misma, etc. Un grafo en el que las aristas están direccionadas se denomina digrafo.

Los grafos constituyen una herramienta de gran utilidad en la resolución de gran número de problemas en una gran variedad de áreas. Por citar sólo algunas de ellas mencionaremos flujos en redes, árboles genealógicos, emparejamientos, programación de actividades, análisis de estructuras, resultados de torneos, coloreado de mapas, análisis lingüísticos, diversos juegos, circuitos electrónicos, etc. Si bien su uso se remonta a muchos siglos atrás, su desarrollo actual puede considerarse iniciado con los trabajos de Euler. Es un área de las matemáticas en la que no existe una nomenclatura generalmente aceptada, tal vez porque son muchos los autores que han realizado aportaciones de interés, sin que haya una figura dominante. De hecho, hay todavía numerosos problemas sin resolver, que se van ampliando a medida que se profundiza en su estudio. Vale aquí el principio: "Todo problema, por complicado que sea, al estudiarlo detenidamente se complica más." Algunos nombres de matemáticos que han hecho aportaciones importantes, tanto teóricas o en forma de algoritmos, son Hamilton, Kirchoff, König, Tutte, Kuratowski, Menge, Verge, Girdle, Dijkstra, Ramsey, Fulkerson, Harari, etc. Hay numerosos artículos y libros sobre temas de grafos. Se referencian algunas obras que permitirán al lector interesado profundizar tanto en los aspectos teóricos como en las aplicaciones concretas (4, 5, 6, 7, 8, 9).

La planificación de proyectos es un problema en el que la aplicación de la teoría de grafos es evidente. En este trabajo se propone una forma de organizar la información descriptiva del problema que permite realizar de una forma sencilla y eficiente los algoritmos para dibujar automáticamente el diagrama de la malla, determinar las actividades críticas y las horquillas en los tiempos en que pueden alcanzarse los distintos acontecimientos, o corregir los tiempos de comienzo de todas las actividades afectadas por la variación del inicio de cualquier actividad o fecha de un acontecimiento.

El esquema utiliza únicamente matrices unidimensionales, sin punteros, de tamaño proporcional al número de actividades del proyecto, lo que permite su implementación con lenguajes de programación sencillos. Se describe también la estructura genérica de los algoritmos de generación exhaustiva de los árboles necesarios en los distintos procesos, haciendo uso del esquema de almacenamiento propuesto, utilizando para ello un lenguaje de programación sencillo.

2. Definiciones y descripción de los datos

Se denomina acontecimiento al momento a partir del cual puede iniciarse una actividad. Así, una actividad

se debe desarrollar entre dos acontecimientos. Varias actividades pueden iniciarse a partir de un mismo acontecimiento (actividades de salida). Varias actividades pueden tener que ser completadas antes de que se alcance un mismo acontecimiento (actividades de entrada). Un acontecimiento sin actividades de entrada será un acontecimiento inicial, en tanto que uno sin actividades de salida será un acontecimiento final. Para su identificación, se numeran los acontecimientos de un proyecto mediante números positivos preferentemente consecutivos.

Las actividades se describen mediante sus acontecimientos inicial y final, esto es, el acontecimiento a partir del cual puede iniciarse y el acontecimiento a partir del cual pueden iniciarse las actividades que dependen de la finalización de la actual. Además, una actividad se describe por su denominación, su responsable, su duración y por los recursos consumidos por unidad de tiempo (Tabla 1). Como resultado del proceso de cálculo, se determinarán los límites del tiempo de comienzo de cada actividad, que debe estar comprendido entre el momento del acontecimiento inicial y el del acontecimiento final menos la duración de la misma (Tabla 2). Pueden considerarse actividades ficticias, con duración nula—actividad 2-9— que permiten establecer precedencias entre acontecimientos en principio inconexos.

TABLA 1

NUDO I	NUDO J	DESCRIPCIÓN	RESPONSABLE	DURACIÓN	RECURSO
1	2	ACTIVIDAD A	RES1	10	5
2	9	VIRTUAL	RES1	0	0
9	10	ACTIVIDAD B	RES4	7	5
10	11	ACTIVIDAD C	RES5	5	5
2	7	ACTIVIDAD D	RES1	2	5
2	4	ACTIVIDAD E	RES1	2	5
7	10	ACTIVIDAD F	RES5	6	5
1	4	ACTIVIDAD G	RES3	12	5
4	8	ACTIVIDAD H	RES1	4	5
8	11	ACTIVIDAD I	RES3	10	5
1	3	ACTIVIDAD J	RES2	8	5
3	4	ACTIVIDAD K	RES3	7	5
3	5	ACTIVIDAD L	RES2	7	5
5	6	ACTIVIDAD M	RES2	4	5
6	11	ACTIVIDAD N	RES2	11	5
4	5	ACTIVIDAD O	RES4	6	5
4	6	ACTIVIDAD P	RES3	9	5
4	7	ACTIVIDAD Q	RES2	9	5
6	8	ACTIVIDAD R	RES2	3	5
7	8	ACTIVIDAD S	RES3	7	5
7	9	ACTIVIDAD T	RES3	4	5

TABLA 2

NUM	ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	RESP.	DURA	MÍNIMO	MÁXIMO	FLUCTU	IN
1	1 2	ACTIVIDAD A	RES1	10	0 10	2 12	2	0
2	2 9	VIRTUAL	RES1	0	10 10	29 29	19	10
3	9 10	ACTIVIDAD B	RES4	7	28 35	29 29	19	10
4	10 11	ACTIVIDAD C	RES5	5	35 40	36 41	1	35
5	2 7	ACTIVIDAD D	RES1	2	10 12	22 24	12	10
6	2 4	ACTIVIDAD E	RES1	3	10 13	12 15	2	10
7	7 10	ACTIVIDAD F	RES5	6	24 30	30 36	6	24
8	1 4	ACTIVIDAD G	RES3	12	0 12	3 15	3	0
9	4 8	ACTIVIDAD H	RES1	4	15 19	27 31	12	15
10	8 11	ACTIVIDAD I	RES3	10	31 41	31 41	0	31
11	1 3	ACTIVIDAD J	RES2	8	0 8	0 8	0	0
12	3 4	ACTIVIDAD K	RES3	7	8 15	8 15	0	8
13	3 5	ACTIVIDAD L	RES2	7	8 15	17 24	9	8
14	5 6	ACTIVIDAD M	RES2	4	21 25	24 28	3	21
15	6 11	ACTIVIDAD N	RES2	11	25 36	30 41	5	25
16	4 5	ACTIVIDAD O	RES4	6	15 21	18 24	3	15
17	4 6	ACTIVIDAD P	RES3	9	15 24	19 28	4	15
18	4 7	ACTIVIDAD Q	RES2	9	15 24	15 24	0	15
19	6 8	ACTIVIDAD R	RES2	3	25 28	28 31	3	25
20	7 8	ACTIVIDAD S	RES3	7	24 31	24 31	0	24
21	7 9	ACTIVIDAD T	RES3	4	24 28	25 29	1	24

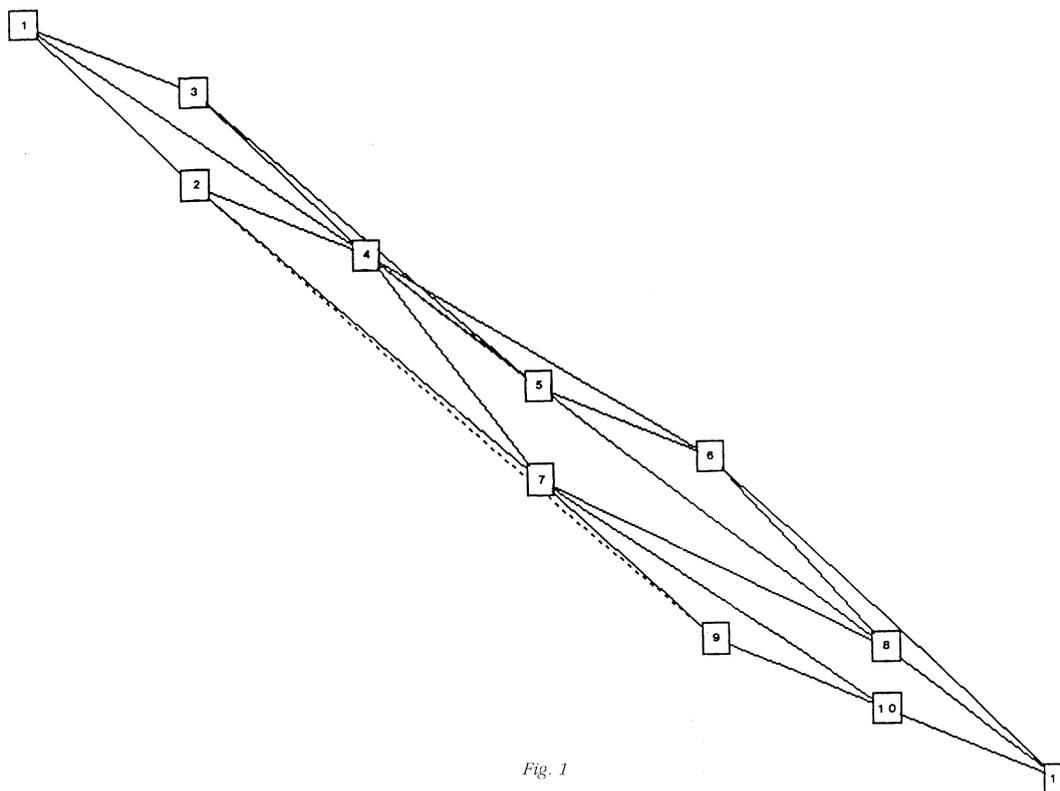


Fig. 1

Los métodos denominados de redes citados imponen la existencia de un solo acontecimiento inicial y un solo acontecimiento final (Fig. 1), para lo cual puede ser necesario introducir actividades ficticias (representada en línea de trazo en la Fig. 1). El método que se describe admite la existencia de cualquier número de acontecimientos iniciales o finales, requiriendo únicamente que el digrafo representativo del proyecto sea conexo y no contenga ciclos, como puede verse en la Fig. 2 que se

corresponde con los resultados de la Tabla 3.

Como puede verse en la Fig. 1 el proyecto se representa mediante un digrafo, en el que los acontecimientos se corresponden con sus vértices y las actividades con sus arcos. La condición de que este digrafo sea conexo implica que no existan partes del mismo independientes del resto. Tampoco debe contener ciclos, esto es, un acontecimiento no debe depender de sí mismo.

TABLA 3

NUM	ACTIVIDAD	DESCRIPCIÓN	RESP.	DURA	MÍNIMO	MÁXIMO	FLUCTU	IN
1	2 9	VIRTUAL	RES1	0	10 10	28 28	18	1
2	9 10	ACTIVIDAD B	RES4	7	28 35	28 35	0	2
3	10 11	ACTIVIDAD C	RES5	5	35 40	36 41	1	3
4	2 7	ACTIVIDAD D	RES1	2	10 12	22 24	12	1
5	2 4	ACTIVIDAD E	RES1	3	10 13	12 15	2	1
6	7 10	ACTIVIDAD F	RES5	6	24 30	29 35	5	2
7	4 8	ACTIVIDAD H	RES1	4	15 19	27 31	12	1
8	8 11	ACTIVIDAD I	RES3	10	31 41	31 41	0	3
9	3 4	ACTIVIDAD K	RES3	7	8 15	8 15	0	
10	3 5	ACTIVIDAD L	RES2	7	8 15	14 21	6	
11	5 6	ACTIVIDAD M	RES2	4	21 25	21 25	0	2
12	6 11	ACTIVIDAD N	RES2	11	25 36	30 41	5	2
13	4 5	ACTIVIDAD O	RES4	6	15 21	15 21	0	1
14	4 6	ACTIVIDAD P	RES3	9	15 24	16 25	1	1
15	4 7	ACTIVIDAD Q	RES2	9	15 24	15 24	0	1
16	6 8	ACTIVIDAD R	RES2	3	25 28	28 31	3	2
17	7 8	ACTIVIDAD S	RES3	7	24 31	24 31	0	2
18	7 9	ACTIVIDAD T	RES3	4	24 28	24 28	0	2

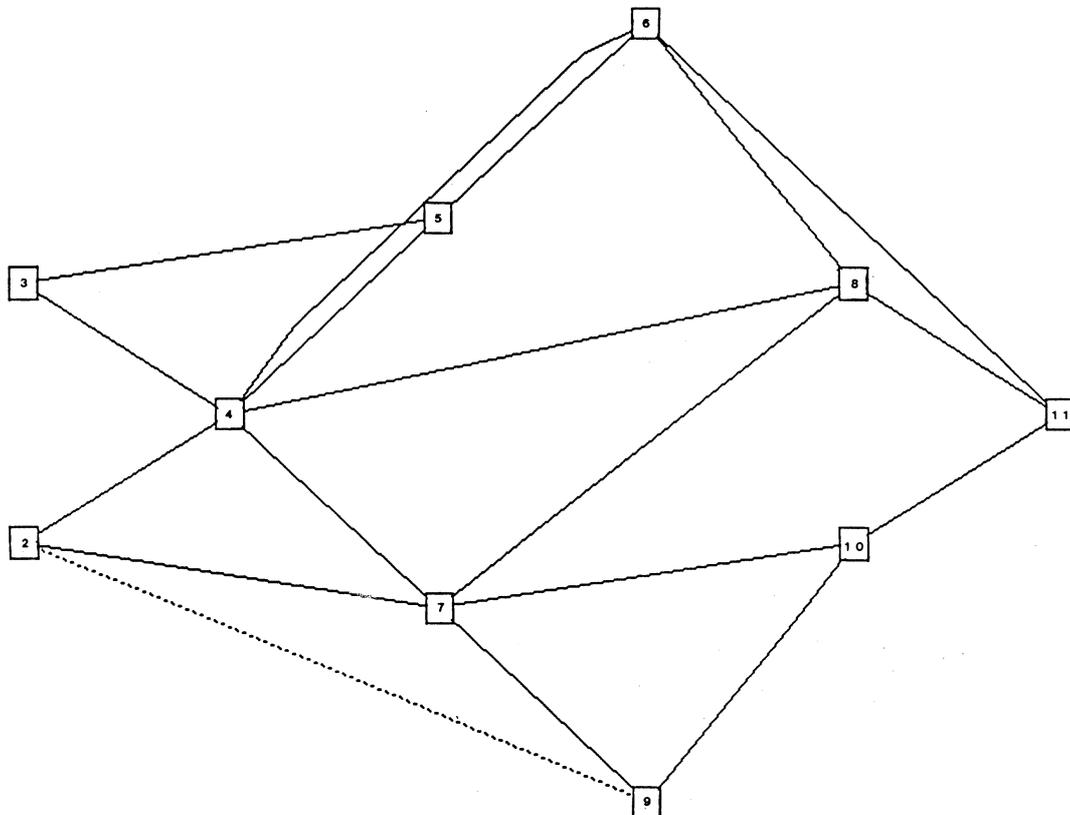


Fig. 2

3. Almacenamiento de la descripción del proyecto

Supongamos que el proyecto consta de W actividades y que N es el número más alto asignado a sus acontecimientos. La descripción inicial puede almacenarse en las siguientes matrices unidimensionales, cada una de ellas con W elementos:

NINI, NFIN: que contienen los números de los

acontecimientos inicial y final. Es conveniente, pero no imprescindible, que el número del acontecimiento final sea mayor que el inicial;

DESS, RES\$: que contienen la denominación y el responsable de la actividad;

TAR: que contienen la duración de la actividad, en la unidad de tiempo elegida;

R: que contienen los recursos que consume cada actividad, por unidad de tiempo.

A partir de estos datos, más concretamente de NINI y de NFIN, se construyen las siguientes matrices unidimensionales:

ARIN: de W elementos, que contiene los números de las actividades de entrada de cada uno de los acontecimientos, es lo que se denomina una lista de adyacencias y actúa como vector de direccionamiento indirecto;

POSIN: de N+1 elementos, auxiliar para manejar ARIN, de modo que los números de las actividades de entrada al acontecimiento I están contenidos entre las posiciones POSIN(I) y POSIN(I+1)-1;

AROUT, POSOUT: son análogas a ARIN y POSIN, pero referidas a actividades de salida.

Como resultado del proceso de cálculo se obtiene la matriz unidimensional de W elementos: FINI, que contiene el momento de inicio de cada actividad.

4. Desarrollo del árbol con origen en un vértice

Los algoritmos que se van a describir para el dibujo automático de la malla, para determinar la horquilla de tiempos en que puede producirse cada acontecimiento, y para asignar los tiempos de comienzo de las actividades dependientes de otra cuya fecha inicial se modifica, se basan en el desarrollo del árbol con raíz en un vértice. La técnica que se considera más adecuada es la de desarrollo exhaustivo en profundidad del árbol, por ser más económica en requerimientos de memoria central que la de generación exhaustiva en amplitud. Un esquema genérico de este proceso, expresado en un lenguaje sencillo de programación, tal como QB, utilizando técnicas de programación estructurada, es el siguiente:

```
L=1
T(1)=INI
VT(1)=V(INI)
ARCO(1)=POSOUT(INI)-1
DO WHILE L
I=T(L)
```

```
K=ARCO(L) + 1
FIN=0
IF K < POSOUT(I+1) THEN
K1=AROUT(K)
J=NFIN(K1)
IF VT(L)+VALOR(K1) < V(J) THEN FIN=1
END IF
IF POSOUT(I)=POSOUT(I+1) THEN FIN=1
IF FIN OR K=POSOUT(I+1) THEN 'RETROCEDER
IF K < POSOUT(I+1) - 1 THEN ARCO(L)=K ELSE
L=L-1
ELSE 'AVANZAR
ARCO(L)=K
L=L+1
T(L)=J
VT(L)=VT(L-1) + VALOR(K1)
ARCO(L)=POSOUT(J) -1
END IF
LOOP
```

El significado de las variables y de las matrices unidimensionales utilizadas en este esquema es el siguiente:

INI: es el vértice inicial, raíz del árbol;
T: de N elementos, contiene el número del vértice asociado a cada nivel de la rama del árbol que se está analizando;
VT: de N elementos, contiene el valor del nudo correspondiente del árbol, esto es la suma de los valores de los arcos desde la raíz al nudo;
V: de N elementos, contiene el valor más desfavorable alcanzado para cada vértice. Se supone conocido inicialmente para el vértice situado en la raíz;
ARCO: de N elementos, contiene el número del arco utilizado para pasar de un nivel del árbol al siguiente;
L: es el nivel del árbol que se considera en un momento dado;
I: es el vértice asociado al nivel L;
K: es la posición que ocupa el número del arco a utilizar, en el vector de direccionamiento indirecto;
K1: es el arco considerado para pasar del nivel L al siguiente;
J: es el posible vértice a asociar al nivel siguiente al L;
VALOR: de W elementos, contiene el valor asociado a cada arco que debe considerarse, dependiendo del problema a resolver;
FIN: es un indicador para saber si la rama analizada debe acabar en el nudo actual, bien

por ser terminal o por conducir a un vértice con un valor más adecuado que el que se obtendría por la rama actual. Esta última circunstancia depende del problema considerado.

De forma literaria, el esquema mostrado realiza los siguientes pasos:

1. Inicia el proceso en un vértice, preparando el primer arco que sale de él, y situándolo en el primer nivel. Se toma este primer nivel como el actual.
2. Mientras que el nivel actual sea distinto de cero, en cuyo caso se habría terminado el recorrido del árbol, se considera el vértice del nivel actual, y el siguiente arco de la lista de los que empiezan en él.
 - 2.1. Ver si no se puede seguir, por estar en un vértice final, o no merece la pena seguir, por encontrar al final del arco un vértice ya alcanzado y que tiene un valor más adecuado que el que se va a proponer. En ambos casos se indica el final de la rama en curso.
 - 2.2. Si se ha agotado la lista de arcos por los que progresar, retroceder al nivel anterior, y seguir en 2.
 - 2.3. Si se ha llegado al fin de una rama, si hay más arcos pendientes para seguir desde el nivel actual, preparar el siguiente, y si no los hay, volver al nivel anterior. Continuar en 2.
 - 2.4. Si se puede progresar, preparar el siguiente arco de la lista del vértice del nivel actual, para cuando se vuelva retrocediendo, y pasar al siguiente nivel. Para esto, anotar el vértice que le corresponde, y preparar el primer arco de su lista. Continuar en 2.

El nuevo valor que corresponde a cada vértice puede ser asignado en la fase de avance o en la de retroceso, según convenga. En cada caso se indicará en qué fase es conveniente asignarlo.

El esquema descrito corresponde al árbol de actividades posteriores al acontecimiento INI (árbol progresivo —forward scan—). El árbol de actividades anteriores (árbol regresivo —backward scan—) es semejante, sustituyendo POSOUT,

AROUT y NFIN por POSIN, ARIN y NINI, respectivamente.

Como puede verse, el algoritmo de generación y análisis del árbol es muy sencillo, y tiene unos requerimientos de memoria muy reducidos, proporcionales al tamaño de la malla.

5. Dibujo automático del diagrama

Los datos suministrados proporcionan una descripción topológica de la malla. Para esquematizarla gráficamente es preciso asignar a los vértices unas coordenadas convenientes, que permitan dibujarla claramente evitando que los arcos pasen por vértices distintos de sus extremos. La longitud de los arcos no está relacionada con su duración, y los vértices deben mantener su precedencia relativa manifestándola por su coordenada X.

Inicialmente, se sitúan los vértices en los nudos de una red de coordenadas enteras (X, Y), que se determinan por separado, primero las X y luego las Y. A continuación, si se considera conveniente, podrá deformarse desplazando los grupos de vértices que están en la misma vertical, como es el caso de la Fig. 3.

Se asigna como coordenada X de cada vértice al máximo nivel que el mismo alcance en cualquiera de los árboles progresivos que pueden formarse en la malla. Para ello se asigna el valor 1 a cada arco, y se toma como vértice raíz cada uno de los vértices iniciales, generando su árbol progresivo. Las condiciones de finalización de una rama son alcanzar un vértice final o que el vértice siguiente hubiese alcanzado un nivel más alto en el mismo árbol o en uno anterior. La asignación del nuevo valor de cada vértice puede hacerse indistintamente en las fases de avance o de retroceso. Si hubiese más de un acontecimiento inicial, se generarán los árboles regresivos con raíz en los vértices finales, asignando a éstos la coordenada X obtenida anteriormente.

Para asignar las coordenadas Y, clasificaremos los vértices por estratos, asignando como coordenada el número de estrato. Para ello generaremos el árbol progresivo con raíz en cada uno de los vértices iniciales. Cada vez que se finalice una rama, se incrementará en 1 el número del estrato actual, por lo que la asignación del valor de cada vértice ha de hacerse en la fase de retroceso. La condición de finalización de una rama es alcanzar un vértice final o que el siguiente vértice tenga asignado un número de estrato.

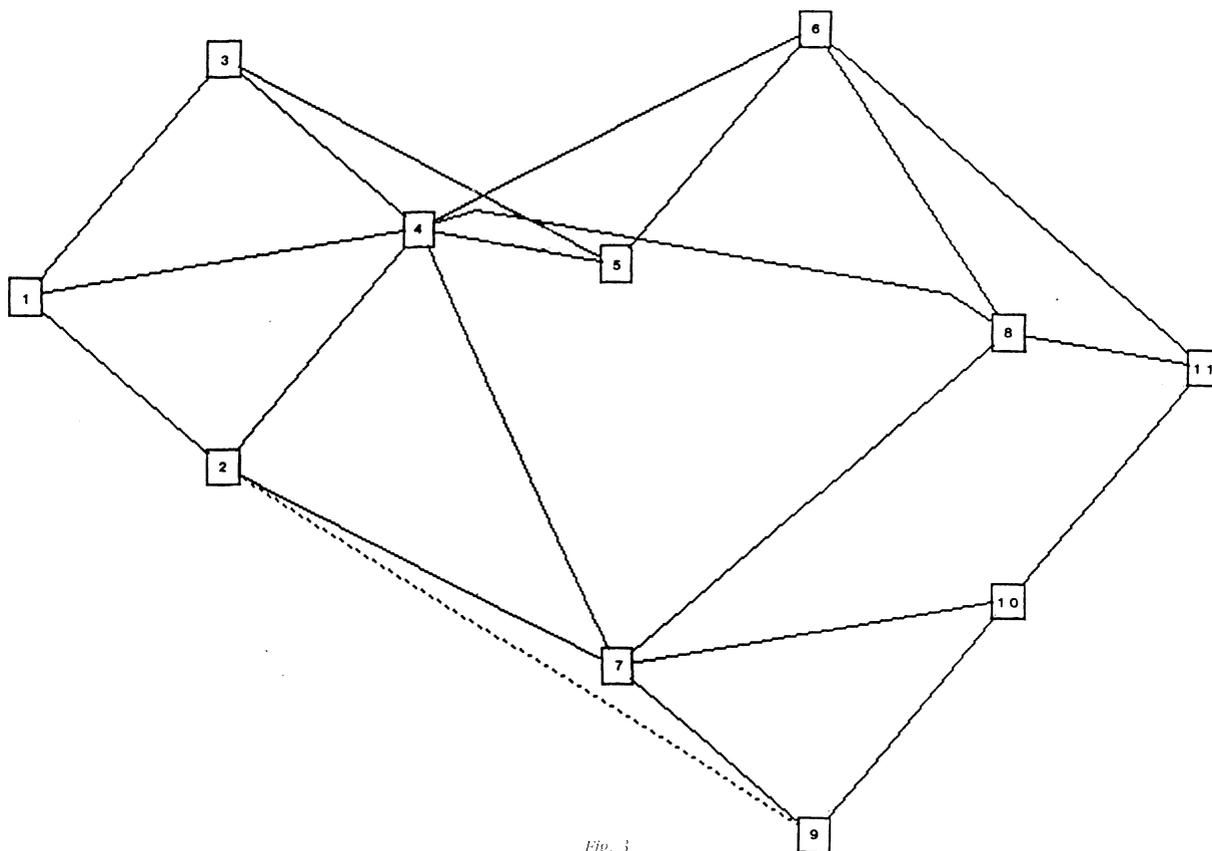


Fig. 3

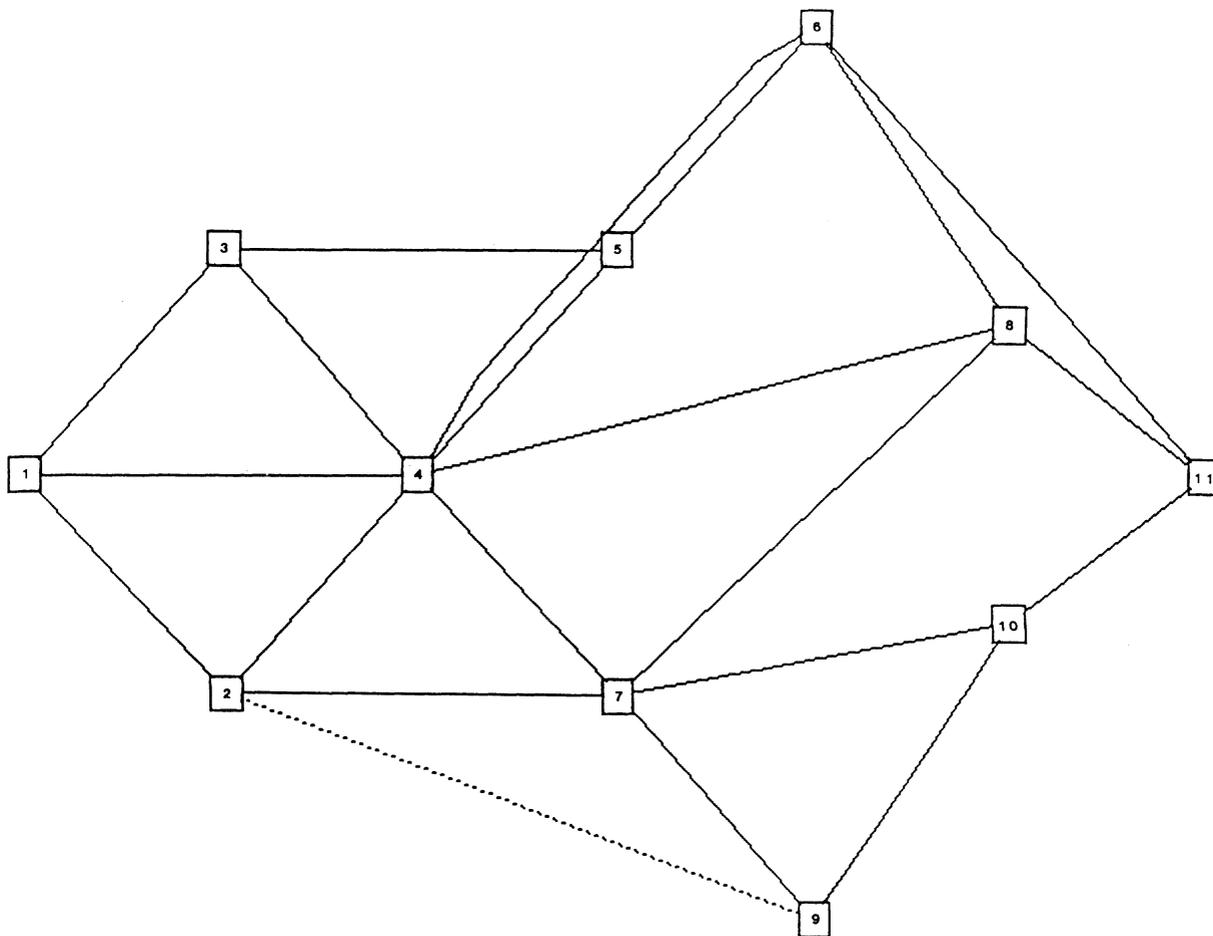


Fig. 4

Una vez asignadas las coordenadas de todos los vértices, se procede al dibujo del diagrama, como por ejemplo el de la Fig. 3. Los arcos correspondientes a actividades ficticias se dibujarán de trazos (por ejemplo, actividad 2-9), en tanto que los correspondientes a actividades reales serán de trazo continuo. Si la recta que une los vértices extremos de un arco pasase por otro vértice, se dibujará un arco curvo (actividad 4-6) que lo evite.

Para detectar este acontecimiento, se ordenan los vértices según valores crecientes de su coordenada X. Se toma entonces cada uno de los vértices, en dicho orden, y se repasan todos sus arcos de salida. Sean I y J los vértices extremos del arco considerado. Si $X(J) = X(I) + 1$ no habrá interferencia posible. En caso contrario, se revisan los vértices posteriores al I, en el orden mencionado, mientras que su coordenada X sea menor que X(J). Si su coordenada Y es mayor o menor que Y(I) e Y(J), no habrá interferencia. En caso contrario, se comprobará si el vértice estudiado está alineado con los vértices I y J. En caso afirmativo, se marcará el arco como curvo y se pasará a estudiar el siguiente arco. En caso negativo se seguirán revisando vértices.

Debe señalarse que los arcos pueden cruzarse, si bien no lo harán tapando vértices. Si los vértices se remarcan adecuadamente y se etiquetan, el diagrama no dará lugar a confusiones.

Normalmente, los estratos en que están situados los vértices extremos del diagrama serán muy distintos. El diagrama suele ser más claro si los vértices extremos están a la misma altura. Para conseguirlo, basta mover los grupos de vértices de una misma vertical proporcionalmente a su distancia horizontal al vértice más a la izquierda, de modo que el vértice más a la derecha alcance la altura deseada (Fig. 3).

Una segunda posibilidad de deformar el diagrama, que puede denominarse centrado en vertical, consiste en tomar todos los vértices situados en la misma vertical y desplazarlos solidariamente de modo que su punto medio esté a la misma altura, en todas las verticales (Fig. 4).

6. Tiempo de ocurrencia de los acontecimientos

Un acontecimiento es el momento a partir del cual puede iniciarse una actividad, pero para ello han de

haberse completado todas las actividades de las que depende. Si un acontecimiento tiene varias actividades de entrada, normalmente no concluirán todas al mismo tiempo. Si tiene varias actividades de salida, todas podrán iniciarse al tiempo, aunque probablemente no lo hagan. Con todo esto, se ve que el momento en que se alcanza un acontecimiento depende de un conjunto de decisiones sobre el comienzo de las actividades que pueden estar condicionadas por criterios de índole diversa, tales como plazos de ejecución, disponibilidad de recursos humanos, materiales o financieros, intereses políticos, etc. Vamos a atender en primer lugar a los criterios de plazo, y veremos después cómo introducir los restantes.

Si se cumpliesen exactamente las duraciones atribuidas a cada actividad, existe un plazo total mínimo para la ejecución del proyecto completo (en el ejemplo considerado es de cuarenta y un días). Habrá un conjunto de actividades que deberán ejecutarse inmediatamente alcanzado su acontecimiento inicial, alargándose el plazo total de ejecución en caso contrario. Dichas actividades son llamadas críticas, existiendo, al menos, una secuencia de ellas entre el acontecimiento más temprano y el más tardío, que puede no ser un camino único sino con bifurcaciones. En la Fig. 5 donde se ha representado mediante un grafo el ejemplo que se corresponde con los resultados de la Tabla 2 se indican en línea continua más gruesa las actividades críticas (camino crítico). Si se ha de respetar el plazo mínimo, los acontecimientos inicial y final de las actividades críticas deberán ocurrir en un momento fijo. En cambio, para aquellos acontecimientos no relacionados con actividades críticas, su momento de ocurrencia puede fluctuar dentro de una horquilla de tiempos. La fecha más temprana de la horquilla corresponderá al inicio más temprano de todas las actividades previas, en tanto que la más tardía corresponderá al caso de empezar lo más tarde posible las actividades dependientes del acontecimiento actual.

Para determinar el plazo mínimo de ejecución, las actividades críticas y la horquilla de tiempos para cada acontecimiento puede seguirse un proceso entre fases como el que se describe, asignando como valor de cada arco su duración.

En la primera fase, se asignará inicialmente el valor 0 a todos los vértices. Se generarán entonces los árboles progresivos con origen en los vértices iniciales, obteniéndose así una asignación inicial de los tiempos mínimos.

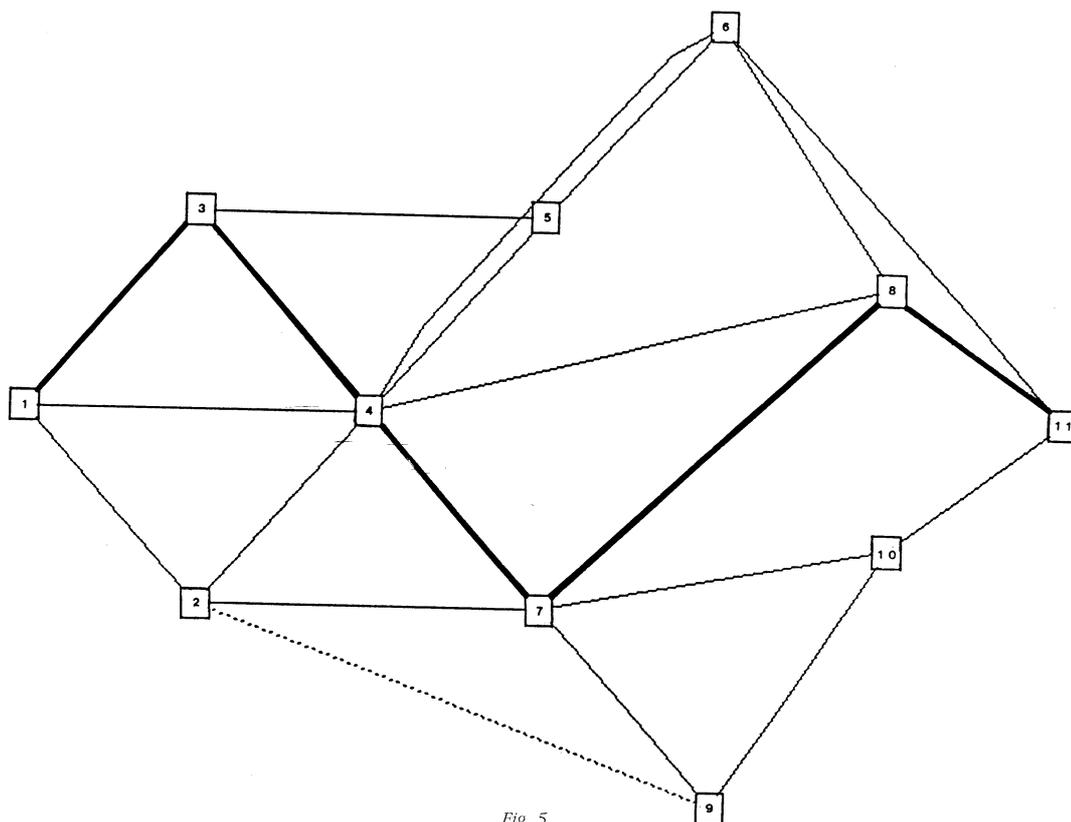


Fig. 5

En la segunda fase, se calcula el tiempo mayor de la fase anterior, y se asigna este valor a todos los vértices. Se generan entonces los árboles regresivos con raíz en los vértices finales, tomando como tiempo inicial de la raíz el obtenido en la fase anterior y se obtienen así los tiempos máximos de todos los vértices.

La tercera fase es necesaria sólo si hay más de un vértice inicial. En ella se asigna inicialmente el valor 0 a todos los vértices, y se generan los árboles progresivos con raíz en los vértices iniciales, asignando a la raíz el tiempo obtenido en la fase anterior. Se obtienen así los tiempos mínimos definitivos. De este modo, los vértices iniciales empezarán lo más tarde posible, pues de no ejecutar esta tercera fase, empezarían todos en el tiempo cero.

En todos estos casos, la asignación de valor a los vértices puede hacerse indistintamente en las fases de avance o de retroceso. La condición de finalización de una rama será el alcanzar un vértice final, o que el vértice destino tenga asignado un valor más desfavorable que el que se obtendría por la rama en curso.

Serán críticas todas las actividades en las que el tiempo más tardío de su acontecimiento final coincide con la suma del tiempo más temprano de su

acontecimiento inicial más su duración. Puede utilizarse esta información, al dibujar el diagrama, para señalar de forma resaltada tales actividades.

7. Análisis de recursos

Para analizar los recursos consumidos, en cada unidad de tiempo del período de ejecución o acumulados, hay que fijar exactamente el comienzo de cada actividad. Puede suponerse inicialmente que se desea concluir en el menor plazo posible. Cabe entonces elegir, como base inicial, empezar sistemáticamente las actividades no críticas lo antes posible o lo más tarde posible. Todo esto conduce a fijar los tiempos de inicio de todas las actividades.

Puede construirse entonces el histograma de recursos necesarios en cada unidad de tiempo del proyecto (Figs. 6a —tiempos más tempranos— y 6b —tiempos más tardíos—), y la curva de recursos acumulados (Figs. 7a y 7b), que será la integral del histograma. Esta información puede llevar a modificar el inicio de algunas actividades, adelantándolo o atrasándolo, para poder cumplir requerimientos de cualquier tipo. Es necesario que, al modificar el inicio de una actividad, se detecten todas las actividades afectadas por tal modificación, y determinar cómo debe corregirse su comienzo, lo menos posible, para permitir la modificación propuesta.

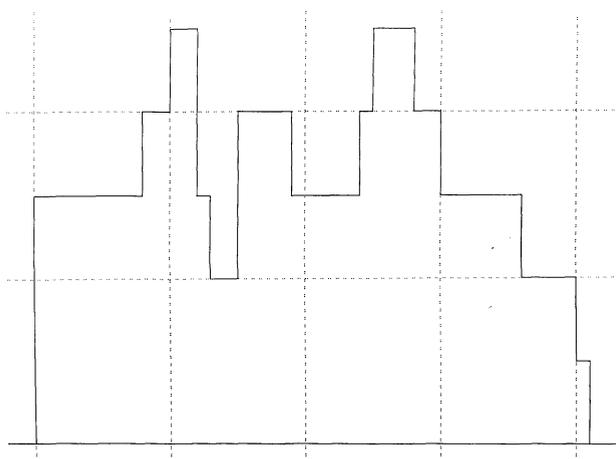


Fig. 6a

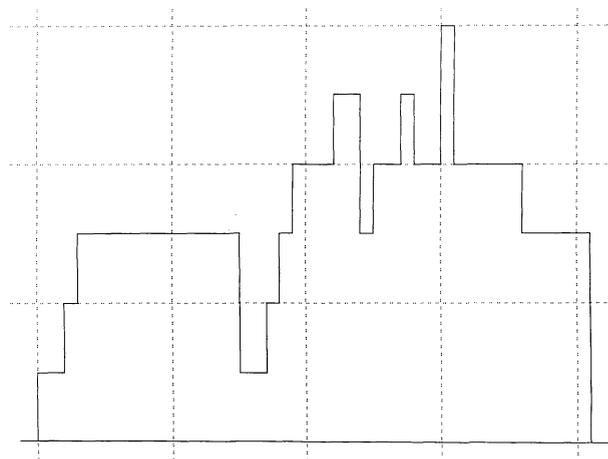


Fig. 6b

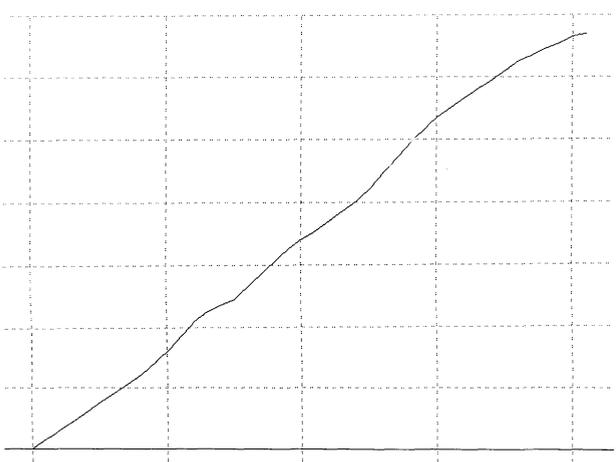


Fig. 7a

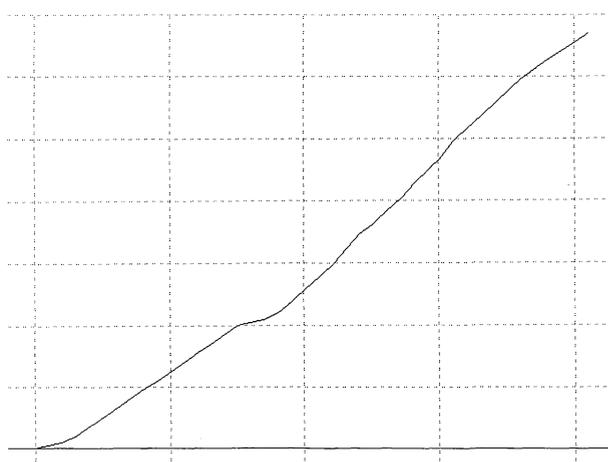


Fig. 7b

Dependiendo de que se adelante o se atrase el comienzo de la actividad a desplazar, deberá generarse el árbol progresivo con origen en el acontecimiento final de la actividad o el regresivo con origen en el acontecimiento inicial. El esquema de la generación del árbol es el indicado, pero hay una variación importante en este caso. La característica a considerar está ligada a las actividades en lugar de los acontecimientos, como ocurría en los casos anteriores. A cada nudo del árbol se asocia el momento de comienzo de la actividad que permite pasar al siguiente nivel, por lo que los nuevos tiempos de comienzo conviene asignarlos en la fase de avance.

Puede interesar adelantar el tiempo mínimo en que se alcance un acontecimiento, o retrasar su tiempo más tardío. En estos casos, puesto que hay que modificar tiempos de inicio de actividades y no de ocurrencia de acontecimientos, no se deben generar los árboles regresivo o progresivo con raíz en el acontecimiento, sino que deben desencadenarse

varias modificaciones de tiempos de inicio de actividades del tipo descrito. Deberán revisarse todos los arcos de entrada del acontecimiento, fijándolos como máximo en el tiempo mínimo del acontecimiento menos su duración, en caso de adelantar su tiempo mínimo, o los de salida, fijándolos como mínimo en el nuevo tiempo máximo del acontecimiento, en caso de atrasar su tiempo máximo.

8. Conclusiones

La programación de actividades es un caso típico de aplicación de la teoría de grafos, aunque presenta ciertas peculiaridades, tales como que los arcos, que representan las actividades, están limitados por sus vértices extremos, acontecimientos, pero tienen un tiempo propio de inicio, además de su duración. Así, un cambio en una actividad afectará a otras dependiendo no sólo de sus relaciones topológicas (conexiones entre vértices), sino de sus tiempos de comienzo.

Se presenta un conjunto de herramientas matemáticas para la planificación y programación de proyectos mediante grafos, que hacen uso de un esquema compacto y eficiente para almacenar y manejar la información, que se organiza en listas de adyacencia, almacenadas en matrices unidimensionales sin punteros. Todas ellas se basan en la generación y búsqueda en profundidad de un árbol (Depth-first-search), cuyo esquema genérico se ha descrito detalladamente, así como las condiciones específicas de cada uno de los procesos concretos.

Un primer resultado original interesante es el dibujo automático de un esquema del diagrama de actividades, en el que quedan de manifiesto las precedencias entre actividades, y que resulta claro en su presentación, sin que un arco pase por vértices distintos de sus extremos, si bien no se trata de evitar los cortes entre arcos, lo que puede no ser posible.

Se describe la forma de hallar las actividades críticas, el plazo mínimo de ejecución, y las holguras o fluctuaciones de cada actividad, que son los resultados que proporcionan habitualmente las publicaciones al respecto.

Otro resultado de interés, para la fase de asignación de recursos, es la posibilidad de modificar el tiempo de inicio de una actividad o los tiempos más temprano o más tardío de un acontecimiento, determinando todas las actividades afectadas, y corrigiendo sus tiempos de comienzo en la menor medida posible, de modo que se respeten las relaciones de precedencia.

Todos los procedimientos descritos se han programado en un lenguaje tan simple como QB, y probado en un ordenador IBM-PC compatible, aplicándolos a un ejemplo realista de tamaño reducido, elegido así por razones de publicación, pues se han hecho pruebas con ejemplos grandes (189 actividades y 121 acontecimientos), ejecutándose todos los procesos en tiempos muy breves.

9. Agradecimientos

Este trabajo forma parte de los estudios previos del proyecto de investigación "Desarrollo, mejora e integración de sistemas CAD/CAE en Construcción", que se lleva a cabo en el Instituto Eduardo Torroja, y está financiado por la DGICYT, con el código PB93/0111.

BIBLIOGRAFÍA

1. Martín, W. R. (1969): "Aplicación de las técnicas PERT/CPM a la planificación y control de la Construcción", Editorial Blume, Barcelona.
2. Martino, R. L. (1964): "Planeación de operaciones aplicadas", Editora Técnica, S.A. México, 1964.
3. Pomares, J. (1977): "Planificación gráfica de obras", Editorial G. Gili, Barcelona.
4. Elmaghraby, S.: "Some network models in management science," Springer Verlag, New York.
5. Abellanas, M., y Lodaes, D. (1990): "Análisis de algoritmos y teoría de grafos", Ed. ra-ma. Madrid.
6. Dolan, A. & Aldous, J. (1993): "Networks and algorithms: An introductory approach", Ed. J. Wiley & Sons. England.
7. Bollobás, B. (1990): "Graph theory: An introductory Course", Springer-Verlag, New York.
8. Gould, R. (1980): "Graph theory". Ed. Cummings P. C., Inc. California.
9. Knuth, D. (1968): "The art of computer programming". Addison-Wesley Publishing Company, California.

* * *