

SOBRE EL TEOREMA DE MAXWELL Y LA OPTIMIZACIÓN DE ARCOS DE CUBIERTA

(ON MAXWELL'S THEOREM AND ROOF ARCHES OPTIMIZATION)

Valentín Quintas Ripoll, Prof. Titular Dep. Estructuras de Edificación.
E.T.S. Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid

Fecha de recepción: 9-IX-88
450-23

RESUMEN

Aplicando un teorema enunciado por Maxwell, se pueden obtener las formas de mínimo material para arcos que soportan cargas iguales, trabajando exclusivamente a tracción o compresión. En este artículo se obtienen las formas óptimas para varios tipos de arcos y se propone un método de diseño mínimo.

SUMMARY

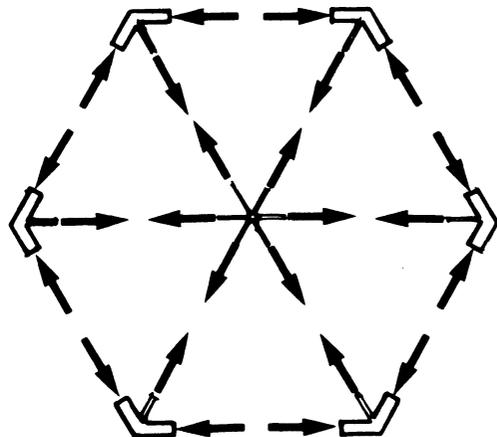
Optimal shapes of arches can be deduced from a theorem developed by Maxwell. In this paper optimal shapes of various types of arches are obtained, when loads are of equal magnitude.

1. EL TEOREMA DE MAXWELL Y SU COROLARIO SOBRE VOLUMEN ESTRUCTURAL

A) EL TEOREMA DE MAXWELL

Entre los años 1860 y 1865 James Clerk Maxwell hizo una serie de estudios sobre estructuras en celosía (1). En estos estudios dedujo lo que después se llamó el "Diagrama de Cremona", y el método de cálculo de deformaciones que se ha llamado de "Trabajos Virtuales". Sin embargo estaban enunciados de una forma tan abstracta, que solamente años después se descubrieron sus importantes aplicaciones.

Entre los teoremas que publicó, uno sobre las fuerzas que actúan en los nudos de un triangulado, que en adelante llamaremos "teorema de Maxwell" (2), sólo tuvo aplicación muchos años después, cuando empezaron a hacerse estudios sobre mínimos estructurales. Maxwell enunció el teorema de la siguiente forma: "En cualquier sistema de puntos en equilibrio en un plano bajo la acción de repulsiones y atracciones, la suma de los productos de cada atracción multiplicada por la distancia de los puntos entre los que actúa, es igual a la suma de los productos de cada repulsión multiplicada por la distancia de los puntos entre los que actúa".



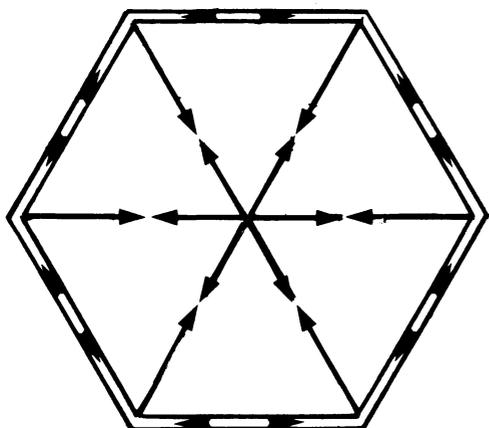
Como siempre, en Maxwell, el teorema está enunciado de una forma abstracta, y sobre todo con un vocabulario muy alejado del de la Resistencia de Materiales. Sin embargo, enseguida se ve que tiene aplicación a estructuras sin carga.

Imaginemos el anillo de la figura sometido a un pretensado de los radios. El anillo trabajará a compresión y los radios a tracción. Si ahora aislamos los nudos de la estructura, nos encontraremos que cada uno de ellos está sometido a “atracciones” con los nudos adyacentes, es decir unido al nudo contiguo por una tracción, o una compresión, o lo que es lo mismo, una de las “repulsiones” de Maxwell. Los nudos son pues el sistema de puntos del teorema. La demostración más sencilla de Maxwell —realmente lo demostró de tres formas diferentes (3)— y que probablemente coincide con el razonamiento que le condujo a deducir el teorema, está de nuevo muy alejada de la forma de razonar habitualmente con las estructuras: al estar todas las fuerzas que concurren en el nudo en equilibrio, éste no se alterará si las giramos 90°, ya que la suma de las fuerzas en cada nudo es cero. Como la suma de momentos debe ser también cero, y en cada barra los esfuerzos forman ahora pares que serán de igual sentido o de sentido contrario, según sean tracciones o compresiones, queda planteado que la suma de momentos es cero:

$$\sum N_i \cdot l_i = 0$$

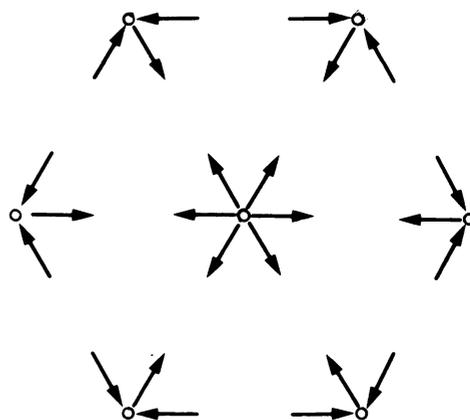
o bien

$$\sum N_i^+ \cdot l_i = \sum N_i^- \cdot l_i$$



Siendo N_i^+ los esfuerzos de tracción y N_i^- , los de compresión.

En las estructuras habituales este teorema parece difícil de aplicar, ya que los nudos de los triangulados están sometidos además de los esfuerzos a cargas exteriores y reacciones. Sin embargo es inmediato —siguiendo el razonamiento anterior— generalizarlo para este caso. En efecto, si en la cercha de la figura giramos las fuerzas que concurren en cada nudo 90°, obtendremos además del sumatorio $\sum N_i \cdot l_i$, un momento que será el producido por las cargas y las reacciones giradas 90°.



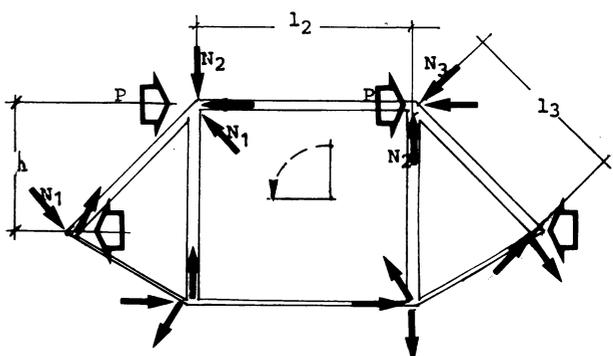
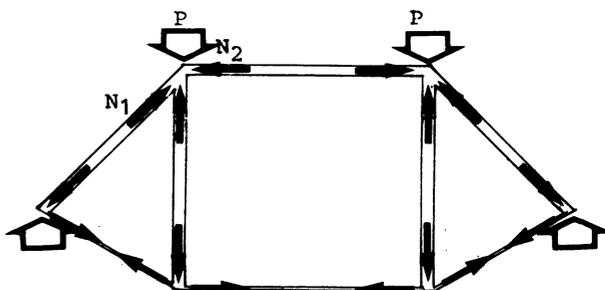
En nuestro caso se debe verificar, tomando momentos respecto a los apoyos:

$$\sum N_i \cdot l_i = \sum P_i \cdot h_i$$

El segundo término, que es debido a las cargas, no depende de la forma de la estructura, sino exclusivamente de la posición relativa de las cargas y reacciones. Es pues una constante, que en adelante llamaremos “constante de Maxwell, K”, y podemos generalizar el teorema de Maxwell para las estructuras de la forma siguiente: “En una estructura cuyas barras trabajan exclusivamente a tracción o a compresión, la suma algebraica de los esfuerzos de cada barra por cada una de sus longitudes es igual a la constante de Maxwell”.

Analíticamente:

$$\sum N_i \cdot l_i = K$$



Esta generalización del teorema se utilizó a menudo para comprobar si los cálculos de esfuerzos en triangulados eran correctos, sin tener en cuenta las interesantes consecuencias en cuanto a volumen de material que se pueden deducir de él y que examinamos a continuación.

B) VOLUMEN ESTRUCTURAL. RECORRIDO DE CARGAS

Supongamos un triangulado estrictamente dimensionado, en el que no tenemos en cuenta el sobredimensionamiento por pandeo: si queremos obtener el volumen V de la estructura, éste será: $V = \sum A_i \cdot l_i$, donde A_i es el área de cada barra y l_i su longitud. Ahora bien el área de cada barra será el cociente entre el esfuerzo N_i , y la tensión de trabajo σ , en valor absoluto:

$$A_i = \left| \frac{N_i}{\sigma} \right|,$$

sustituyendo en la expresión anterior queda:

$$V = \frac{\sum N_i \cdot l_i}{\sigma} = \frac{\sum N_i^+ \cdot l_i - \sum N_i^- \cdot l_i}{\sigma}$$

El volumen de una estructura estrictamente dimensionada es pues directamente proporcional a la suma en valor absoluto de los esfuerzos de cada barra por su longitud. A este sumatorio lo llamaremos "recorrido de cargas" (4). Esto permite deducir el siguiente corolario del teorema de Maxwell:

C) COROLARIO DEL TEOREMA DE MAXWELL

"El mínimo absoluto de material para una posición de cargas y reacciones dada, es para aquella estructura en la que todas sus barras trabajan solamente a tracción o solamente a compresión, y este volumen mínimo es igual a la constante de Maxwell K dividida por la tensión de trabajo σ ".

En efecto, si:

$$V = \frac{\sum N_i^+ \cdot l_i - \sum N_i^- \cdot l_i}{\sigma}$$

y

$$\sum N_i^+ \cdot l_i + \sum N_i^- \cdot l_i = K,$$

queda :

$$\sum N_i^+ \cdot l_i = K - \sum N_i^- \cdot l_i$$

que sustituida en la ecuación anterior nos da:

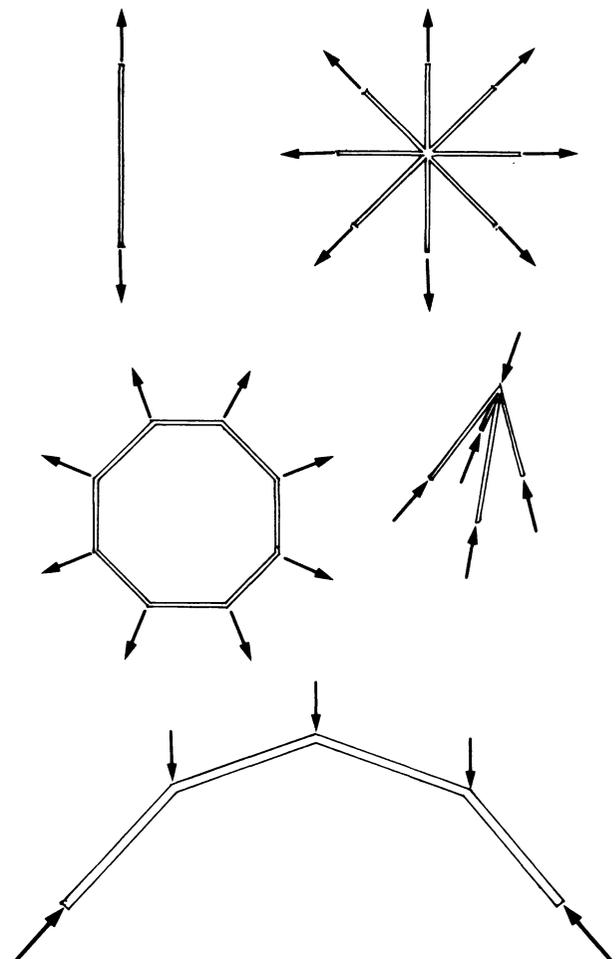
$$V = \frac{K - 2 \sum N_i^- \cdot l_i}{\sigma}$$

Si $\sum N_i^- \cdot l_i = 0$, es decir, si ninguna barra trabaja a compresión, el volumen habrá alcanzado un mínimo, cuyo valor será:

$$V_{\min} = \frac{K}{\sigma}$$

Igual razonamiento habría que hacer para una cuyo mínimo fuese que todas las barras trabajasen a compresión aunque en este caso K sería negativa.

Las estructuras cuyas tensiones son de igual signo no forman una tipología muy abundante: pueden ser anillos sometidos a fuerzas radiales, pilares, tirantes o conjuntos de éstos, ciertos tipos de triangulados espaciales y finalmente los arcos y cables que son antifunicular de su carga (5). De éstos el problema de hallar el mínimo volumen será el de obtener su constante de Maxwell. Ahora bien, dado que la constante de Maxwell depende de la posición de las cargas y que ésta varía con la altura del arco, el problema del mínimo volumen es obtener el arco cuya K sea mínima.



2. ARCOS. FUNCIONAMIENTO. TIPOLOGÍA. FACTOR DE FORMA

Por otra parte, muchas veces se usan superestructuras para transmitir las cargas al arco, que consumen una cantidad de material adicional, y que deben tenerse en cuenta al calcular el volumen mínimo. Debemos, pues, estudiar en primer lugar su tipología, y después obtener el volumen mínimo en función de la constante de Maxwell del arco aislado.

A) FUNCIONAMIENTO DE LOS ARCOS

Supongamos una serie de cargas $P_1, P_2 \dots P_n$, que deben transmitirse a dos apoyos A y B, que por tanto deberán resistir dos reacciones R_A y R_B . La estructura que se diseñe, para transmitir esas cargas, deberá ser capaz de resistir los cortantes globales $T_0, T_1 \dots T_n$ y los momentos globales $M_1, M_2 \dots M_n$. Intentemos ahora resistirlos con una estructura formada por barras de poligonal que trabajan exclusivamente a compresión. Dando dos cortes adyacentes, nos daremos cuenta que, si la suma de fuerzas horizontales debe ser cero, todos los esfuerzos en las barras tienen la misma componente horizontal, que es el empuje H. Es decir, los esfuerzos en cada barra valdrán:

$$N_n = \frac{H}{\cos \gamma_n}$$

siendo γ_n la inclinación de la barra.

Por otra parte su componente vertical debe resistir el cortante global T_n , y debe verificarse:

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \frac{T_n}{H}$$

Finalmente, para resistir el momento global m_n , los dos apoyos deben producir una reacción H, tal que si damos un corte cualquiera por una barra de altura Y_n se verifique:

$$H \cdot Y_n = M_n,$$

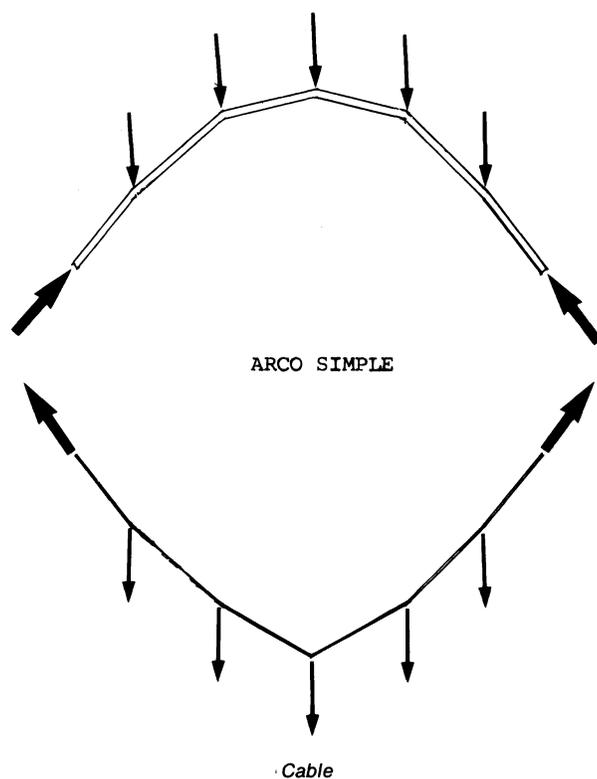
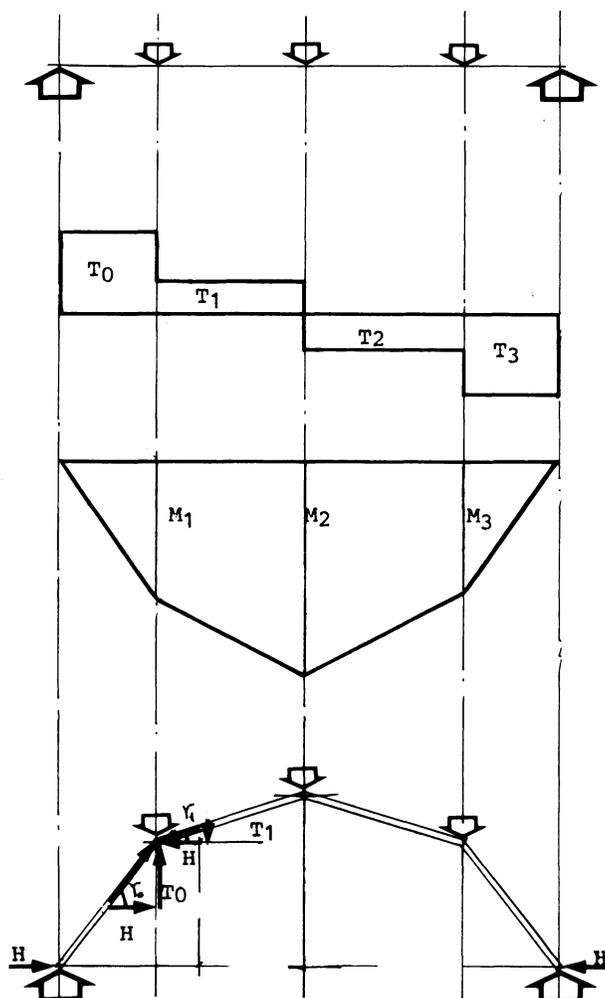
y por tanto

$$Y_n = \frac{M_n}{H}$$

La ordenada del arco debe ser pues el diagrama de momentos global dividido por el empuje.

B) UNA TIPOLOGÍA DE ARCOS

Si las correas de la cubierta apoyasen directamente en el arco, no necesitaríamos más estructura que el arco y obtendríamos un "arco simple".



Muchas veces, sin embargo, la cubierta es plana y debe añadirse a la estructura una serie de barras verticales que transmitan la carga al arco. Si estas barras trabajan a compresión, y el arco está debajo de la cubierta, tendremos un "arco de pilares". Si las barras trabajan a tracción, y por tanto el arco está encima de cubierta, tendremos un "arco de péndolas". Invertiendo la estructura obtendríamos otras estructuras con la misma forma de trabajo, aunque con signos de los esfuerzos cambiados. La inversa del arco simple sería el "cable", la inversa del arco de pilares "puente colgante", y la inversa del arco de péndolas la "celosía de sección variable". Finalmente, esta última suele sufrir una adaptación para soportar cubiertas a dos aguas, que es darle esta forma de cordón superior. Así obtendríamos la "cercha de sección variable", que es el óptimo relativo de las estructuras de este tipo, aunque en este artículo no las estudiaremos.

El apoyo debe en cualquier caso producir una reacción horizontal H. Si no es capaz de contrarrestarlo habrá que añadir a la estructura un tirante. Vamos a estudiar cuál es el volumen de estructura de cada uno de estos tipos distinguiendo si tiene tirante o no.

C) VOLUMEN DE ARCOS

Podemos ahora obtener la expresión del volumen aplicando el corolario del teorema de Maxwell. Supondremos en adelante que la separación entre correas es siempre la misma y, por tanto, que todas las cargas son iguales.

En el "arco simple", el volumen será directamente la constante de Maxwell dividida por la tensión de trabajo. K la obtenemos girando 90° cargas y reacciones y tomando momentos respecto al plano de apoyo. Queda:

$$V = \frac{K_s}{\sigma} = \frac{P \cdot \sum Y_n + H \cdot l}{\sigma}$$

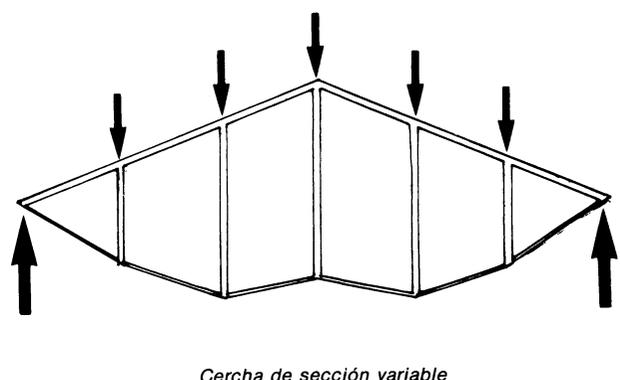
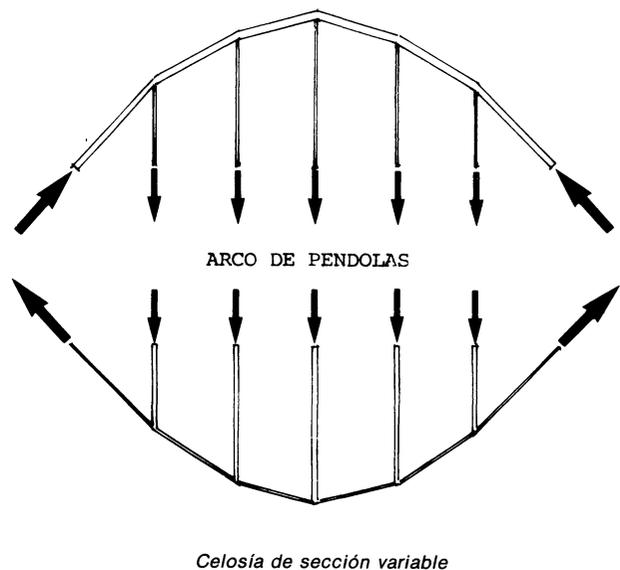
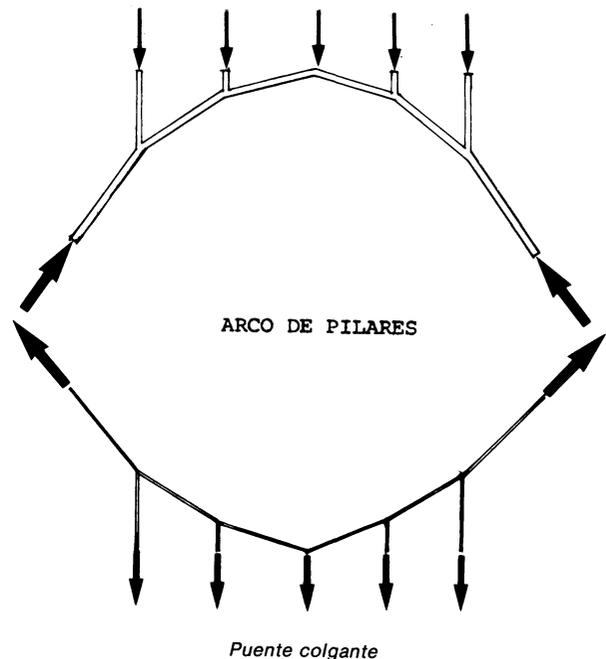
En el "arco de pilares" también será la constante de Maxwell para este caso de carga, dividida por σ y queda:

$$V = \frac{K_p}{\sigma} = \frac{P \cdot n_c \cdot f + H \cdot l}{\sigma}$$

Siendo n_c el número de cargas P, y f la distancia entre el punto de aplicación de P y el apoyo.

En el arco de péndolas, hay que sumar al volumen del arco, que será el del "arco simple", el de las péndolas que trabajan con $N = P$. Queda:

$$V = \frac{K_s + P \cdot \sum Y_n}{\sigma} = \frac{2P \sum Y_n + H \cdot l}{\sigma}$$



Para los casos en que además tiene tirante, hay que sumar a las expresiones anteriores el volumen del tirante.

$$\frac{H \cdot l}{\sigma},$$

y queda:

$$\text{En el "arco simple"} \quad V = \frac{P \cdot \sum Y_n + 2H \cdot l}{\sigma}$$

$$\text{En el "arco de pilares"} \quad V = \frac{P \cdot n_c \cdot f + 2H \cdot l}{\sigma}$$

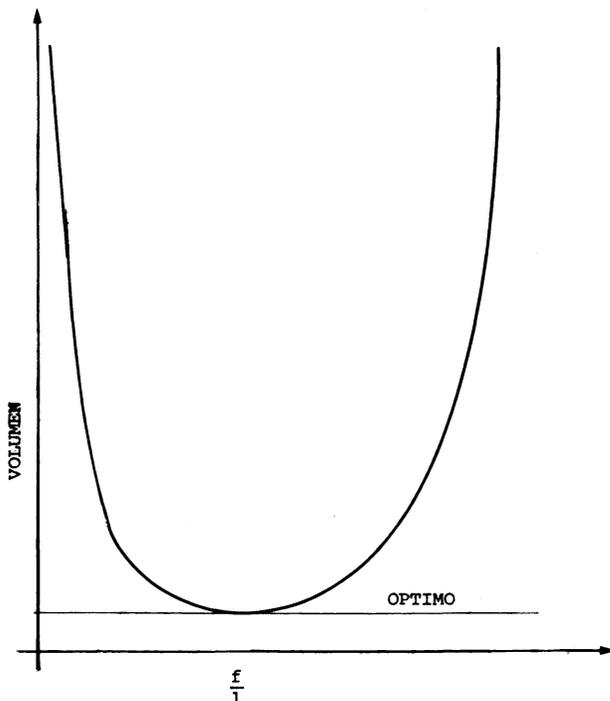
$$\text{En el "arco de péndolas"} \quad V = 2 \frac{P \sum Y_n + H \cdot l}{\sigma}$$

el doble del "arco simple" sin tirante.

Las estructuras inversas tendrán exactamente el mismo volumen, ya que no hemos hecho distinción entre tensión de trabajo a tracción y a compresión.

D) FACTOR DE FORMA

Se ve enseguida que, en todas estas expresiones, se puede encontrar una relación entre las alturas Y_n y la luz que daría el volumen mínimo. En efecto, H aumenta cuando disminuyen las alturas Y_n , y por lo tanto $H \cdot l$ aumenta si disminuimos $P \cdot \sum Y_n$; hay pues un punto en la gráfica volumen-flecha/luz que correspon-



derá al volumen mínimo. Sin embargo debemos separar de la expresión los términos que no dependen de la forma, es decir, el valor de la carga P , la luz l y la tensión de trabajo σ ; y aislar un término adimensional que dependa exclusivamente de la forma. A este término es lo que en Física se llama un "factor de forma", y minimizando este factor obtendremos los parámetros que definen el volumen mínimo.

En primer lugar podemos definir el parámetro $c = \frac{H}{P}$ "parámetro del arco", que describe el peralte del arco. En efecto, si c es pequeño, H es pequeño respecto a la carga, lo que significa que el arco es peraltado; si c es grande significa que el arco es poco peraltado. En segundo lugar, la carga P depende en parte de la separación entre correas ΔS ó ΔX , que a su vez interviene en la forma. Es pues mejor definir P como el producto de una carga uniforme q por la separación de correas ΔS

$$P = q \cdot \Delta S.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión del volumen, queda un término dependiente de los parámetros de carga, luz y material $\frac{ql^2}{\sigma}$ y un término adimensional

dependiente de la forma F , que en todos los casos de arcos puede describirse como:

$$V = \frac{ql^2}{\sigma} \cdot F \quad (6)$$

El "factor de forma" F se obtiene fácilmente sustituyendo $P = q \cdot \Delta S$ en el arco simple y $P = q \cdot \Delta X$ en los demás casos. Haciendo $H = P \cdot c$, queda:

$$\text{En el "arco simple"} \quad F = \frac{\Delta S}{l} \left(c + \frac{\sum Y_n}{l} \right)$$

$$\text{En el "arco de pilares"} \quad F = \frac{\Delta X}{l} \left(c + \frac{n_c \cdot f}{l} \right)$$

$$\text{En el "arco de péndolas"} \quad F = \frac{\Delta X}{l} \left(c + 2 \frac{\sum Y_n}{l} \right)$$

En el caso en que tengan tirante el término en c directamente se duplica y queda:

$$\text{En el "arco simple"} \quad F = \frac{\Delta S}{l} \left(2c + \frac{\sum Y_n}{l} \right)$$

$$\text{En el "arco de pilares"} \quad F = \frac{\Delta X}{l} \left(2c + \frac{n_c \cdot f}{l} \right)$$

$$\text{En el "arco de péndolas"} \quad F = \frac{2\Delta X}{l} \left(c + \frac{\sum Y_n}{l} \right)$$

3. FORMAS OPTIMAS DE LOS ARCOS

Definido el "factor de forma", sólo queda expresarlo exclusivamente en función del número de cargas n_c y del parámetro c , y obtener el valor de c que lo hace mínimo para cada n_c ; y que por tanto hace mínimo el volumen de estructura.

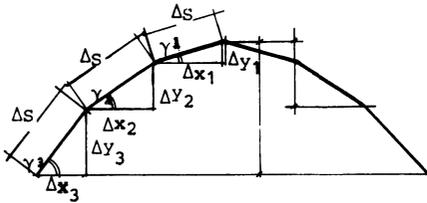
A) ARCO SIMPLE

La función $\frac{l}{\Delta S}$ se puede expresar en función del número de cargas, suponiendo ΔS constante:

$$\frac{l}{\Delta S} = \frac{\Sigma \Delta X_n}{\Delta S} = \Sigma \cos \gamma_n$$

ya que

$$\Delta X_n = \Delta S \cdot \cos \gamma_n$$



Dado que:

$$\cos \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_n}}$$

y

$$\operatorname{tg} \gamma_n = \frac{T_n}{H} = \frac{n \cdot P}{P \cdot c} = \frac{n}{c}$$

donde n es término enésimo de la serie

$$\frac{n_c}{2}, \frac{n_c}{2} - 1, \frac{n_c}{2} - 2, \dots, 1, \text{ ó } \frac{1}{2}$$

Queda:

$$\frac{l}{\Delta S} = 2c \cdot \sum_{1/2}^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}} \text{ si } n_c \text{ es impar}$$

$$\frac{l}{\Delta S} = 1 + 2c \cdot \sum_1^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}} \text{ si } n_c \text{ es par}$$

La función ΣY_n es el sumatorio doble:

$$\Sigma Y_n = \Sigma (\Sigma \Delta Y_n) = \Sigma (\Sigma \Delta s \cdot \operatorname{sen} \gamma_n)$$

Dado que:

$$\operatorname{sen} \gamma_n = \frac{\operatorname{tg} \gamma_n}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_n}} = \frac{n/c}{\sqrt{1 + (n/c)^2}}$$

si sustituimos en el sumatorio, simplificamos y dividimos por el valor de l ya obtenido queda:

$$\frac{\Delta Y_n}{l} = \frac{1}{c} \frac{\sum_{1/2}^{n_c/2} \frac{n^2}{\sqrt{c^2 + n^2}}}{\sum_{1/2}^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}}}$$

si n_c es impar

$$\frac{\Delta Y_n}{l} = \frac{\sum_{1/2}^{n_c/2} \frac{n^2}{\sqrt{c^2 + n^2}}}{1 + 2c \sum_1^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}}}$$

si n_c es par.

Sustituyendo en la expresión de F , obtenemos, después de reducir las:

$$F = \frac{\sum_{1/2}^{n_c/2} \sqrt{c^2 + n^2}}{1/2} \left[\sum_{1/2}^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}} \right]^2$$

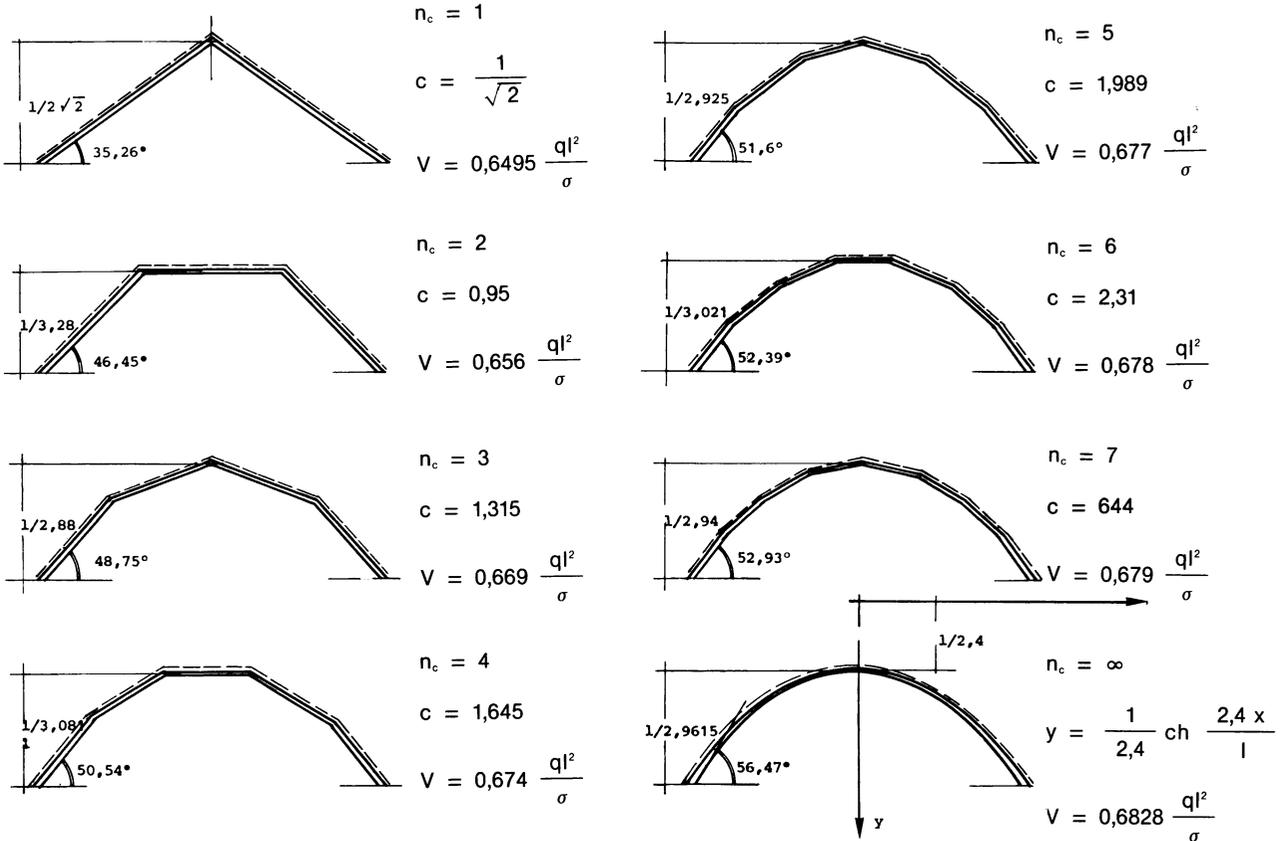
si n_c es impar;

$$F = \frac{c + 2 \sum_1^{n_c/2} \sqrt{c^2 + n^2}}{1} \left[\sum_1^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}} \right]^2$$

si n_c es par.

Derivando respecto a c e igualando a cero obtendríamos los valores de c que hacen mínimo el volumen del arco. Sin embargo, para este caso esto da lugar a ecuaciones de grado cada vez mayor a medida que n_c crece,

ce, y es preferible utilizar un programa de ordenador que detecte el valor de c que hace F mínimo. Las formas óptimas son para los distintos valores del número de cargas n_c :



Podemos observar que al igual que nos va a ocurrir con los otros tipos de arcos, el volumen crece con el número de cargas, aunque muy ligeramente, y que a partir de los siete lados la forma tiende rápidamente a una catenaria de ecuación:

$$y = \frac{1}{2,4} \operatorname{Ch} \frac{2,4 x}{l}$$

si los ejes coordenados están alojados $1/2,4$ de la clave del arco (7).

B) ARCO DE PILARES

En este caso el desarrollo de F es extraordinariamente sencillo. En efecto:

$$\frac{1}{\Delta X} = n_c + 1$$

y

$$f = \sum_1^{n_c/2} \Delta x \cdot \operatorname{tg} \gamma_n = \frac{\Delta x}{c} \sum_1^{n_c/2} n$$

Sustituyendo en la expresión del “factor de forma”:

$$F = \frac{1}{n_c + 1} \left[c + \frac{n_c}{c (n_c + 1)} \sum_1^{n_c/2} n \right]$$

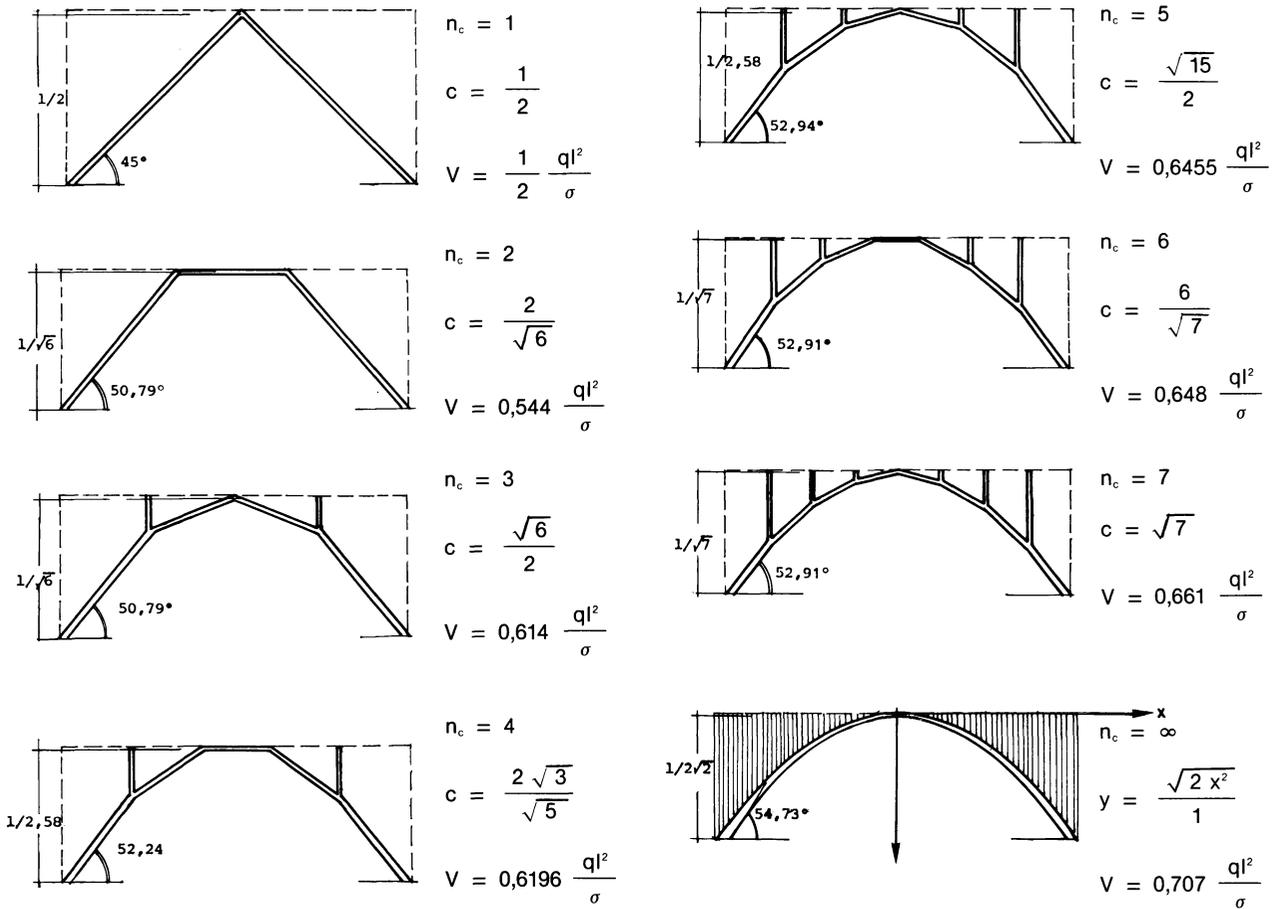
que se puede derivar con respecto a c e igualar a cero:

$$\frac{\delta F}{\delta c} = 0 = 1 - \frac{n_c}{c^2 (n_c + 1)} \sum_1^{n_c/2} n$$

y queda:

$$c_{\min} = \sqrt{\frac{n_c \sum n}{(n_c + 1)}}$$

Y las formas óptimas:



Comparado con el “arco simple”, se ve que los valores del volumen son algo menores, debido a que la carga total que actúa en el arco es menor, y compensa el aumento de volumen debido a los pilares. A partir de 7 cargas la forma converge rápidamente a una parábola de sección variable, en la que la carga uniforme es transmitida por un muro, de ecuación:

$$y = \frac{\sqrt{2} x^2}{1}$$

y con un volumen ligeramente mayor del mismo caso en el “arco simple”. Con un número suficientemente grande de tramos, el volumen de este arco supera al del “arco simple”.

C) ARCOS DE PÉNDOLAS

Como para el arco de pilares:

$$\frac{l}{\Delta x} = n_c + 1$$

$$\Sigma y_n = \Sigma (\Sigma \Delta y_n) = \Delta x \Sigma (\Sigma \operatorname{tg} \alpha_n) = \frac{2\Delta x}{c} \Sigma_{1,1/2}^{n_c/2} n^2$$

y queda sustituyendo en su expresión de F:

$$F = \frac{1}{n_c + 1} \left[c + \frac{4 \Sigma n^2}{c (n_c + 1)} \right]$$

Que se puede derivar e igualar a cero:

$$\frac{\delta F}{\delta c} = 0 = 1 - \frac{4 \Sigma n^2}{c^2 (n_c + 1)}$$

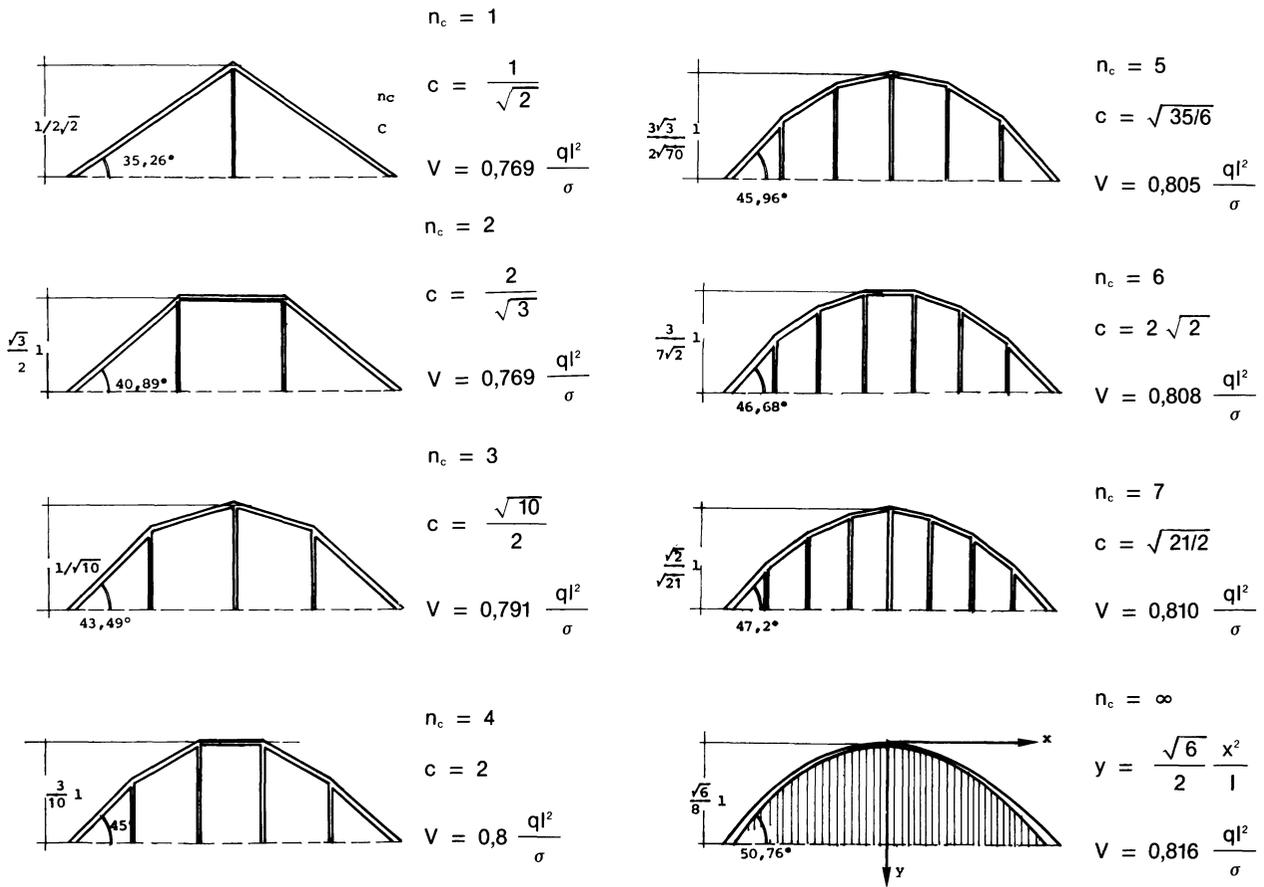
y obtendremos la expresión analítica de c_{min} :

$$c_{min} = 2 \sqrt{\frac{\Sigma n^2}{n_c + 1}}$$

Las formas mínimas del arco de péndolas son las que se pueden apreciar en la página siguiente:

A partir de las 7 cargas converge a los valores del límite que serán los de una parábola de sección variable, a la que una carga uniforme está transmitida por un diafragma a tracción, de ecuación:

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{x^2}{1}$$



D) FORMAS OPTIMAS DE LOS ARCOS CON TIRANTE

Empezamos por el “arco simple”. F sólo variará en el factor de c, y desarrollándolo queda:

n_c impar

$$F = \frac{1}{2c \sum_{1/2}^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}}}$$

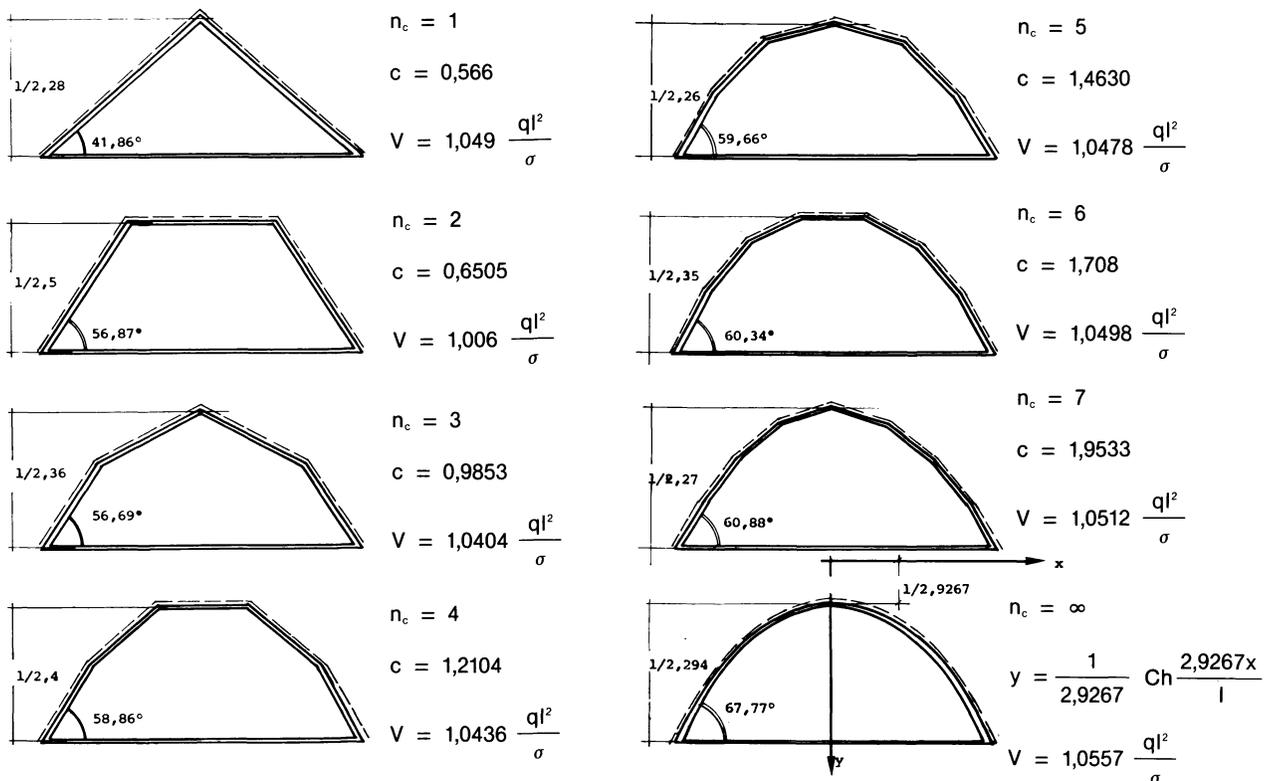
$$\cdot \left[c + \frac{1}{c} \frac{\sum_{1/2}^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}}}{1/2} \right]$$

n_c par

$$F = \frac{1}{1 + 2c \sum_1^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}}}$$

$$\cdot \left[c + \frac{\sum_1^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}}}{1 + 2c \sum_1^{n_c/2} \frac{1}{\sqrt{c^2 + n^2}}} \right]$$

Utilizando un programa como para el arco sin tirante se pueden obtener las siguientes formas óptimas:



El volumen es mayor que para el arco sin tirante como es obvio, y las formas son mucho más peraltadas. Como para el arco sin tirante para $n_c > 7$ tiende a una catenaria, de ecuación:

$$y = \frac{1}{2,9267} \text{Ch} 2,9267 \frac{x}{l}$$

En el caso del "arco de pilares" y el "arco de péndolas" con tirante, los valores se pueden deducir de los casos sin tirante sin más que multiplicarlos o dividirlos por $\sqrt{2}$. El factor de forma, y por tanto el volumen del arco con tirante, es $\sqrt{2}$ veces el del arco con tirante: $F_T = \sqrt{2} F$, al igual que la tangente del ángulo de arranque: $\text{tg } \alpha_{OT} = \sqrt{2} \text{tg } \alpha_0$. El parámetro c_T del arco con tirante será:

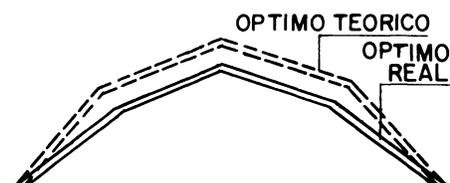
$$c_T = \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad f_T = \sqrt{2} f$$

y la flecha máxima aumentará

$$f_T = \sqrt{2} \cdot f$$

4. METODO DE DISEÑO. SOBRECARGAS ASIMÉTRICAS

Hemos obtenido las formas de mínimo volumen de los arcos bajo tres supuestos que, en la realidad de la construcción, no son ciertos: en primer lugar se ha supuesto que el material tiene igual resistencia a tracción y a compresión, o lo que es lo mismo, se desprecia el sobredimensionamiento por pandeo. En segundo lugar se ha considerado que todas las barras se pueden dimensionar estrictamente. Esto no es cierto, sobre todo en estructuras metálicas en las que existen unas dimensiones de catálogo, y por tanto debe buscarse la sección que más se aproxime al área estricta. Finalmente se han considerado las cargas de cubierta como fijas, cuando las sobrecargas pueden aparecer de forma asimétrica, y en el peor de los casos actuando sólo en la mitad de la luz de la estructura.



A partir de ΔS podemos obtener Δx_n e ΔY_n

$$\Delta x_n = \Delta S \cdot \operatorname{sen} \gamma_n = \Delta S \frac{c}{\sqrt{n^2 + c^2}}$$

$$\Delta Y_n = \Delta S \cdot \operatorname{cos} \gamma_n = \Delta S \frac{n}{\sqrt{n^2 + c^2}}$$

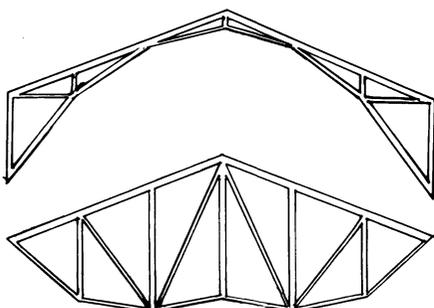
y la carga P:

$$P = q \cdot \Delta S$$

La aparición de sobrecargas parciales puede dar lugar a modificaciones importantes en la forma del arco, si éste se mantiene con un sólo cordón, ya que aparecerán flexiones en éste de la suficiente importancia como para modificar la forma con objeto de minimizarlas. Sin embargo, es más económico añadirle al arco una estructura triangulada que entre a trabajar cuando aparezcan las sobrecargas. Al arco simple puede añadirse un triangulado formado por un cordón inferior y diagonales, que trabajarían con esfuerzos normales para las sobrecargas en lugar de con flexiones. Solamente en el caso de hormigón armado podría justificarse reforzar el cordón sin triangularlo. En el arco de pilares se obtiene un arco de tres articulaciones, con sección variable. Si el arco es de hormigón puede recurrirse a la solución tan utilizada por Maillart de hacer rígidos los nudos del arco. Solución semejante podría utilizarse en el arco de péndolas que quedaría transformado para las sobrecargas en una cercha de sección variable, triangulada o con los nudos rígidos.

La aparición de cargas de viento o sismo puede producir en estas estructuras esfuerzos muy superiores a los debidos a cargas verticales. Debe añadirse al conjunto de la estructura formada por arcos y correas un arriostamiento específico para este tipo de cargas.

Finalmente quedaría por estudiar la familia de estructuras cuya forma se adapta a una cubierta a dos aguas: el arco de pilares con cordón inclinado y la "cercha de sección variable" que se ha descrito antes, y cuyas formas óptimas podrían ser objeto de posteriores artículos.



5. CONCLUSIONES

Podemos definir como conclusiones más importantes:

- La forma de mínimo material para un sistema de cargas fijas es un arco estrictamente dimensionado. Los parámetros mínimos de cada tipo pueden obtenerse analíticamente por medio del teorema de Maxwell.
- La forma óptima es independiente del valor de las cargas, de la luz y de la tensión de trabajo del material, y sólo depende del número de cargas y de la relación de magnitud de éstas entre sí.
- El volumen mínimo teórico será para el "arco de pilares" si el número de cargas es pequeño, para el "arco simple", si aquél es grande y en último lugar para el "arco de péndolas".
- Este volumen crecerá a su vez con el número de tramos del arco, independientemente del valor q de la carga de cubierta.
- A partir de estas formas óptimas, puede desarrollarse un método de diseño mínimo de arcos que tenga en cuenta el pandeo, los saltos de catálogo y la posible movilidad de las sobrecargas.

NOTAS

- Una descripción de estos estudios puede encontrarse en: Thimoshenko, S. "History of Strength of Materials", págs. 202-208.
- Trans. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 26. 1870.
- Una de las demostraciones, basada en contraer la estructura hasta convertirla en un punto, ha dado lugar al trabajo de Michell sobre mínimos estructurales que se cita en (5), y a muchos otros derivados de aquél.
- Se ha preferido llamarlo "recorrido de cargas", por coincidir con el concepto intuitivo que han utilizado muchos diseñadores de estructuras para comparar la economía de material de distintas soluciones. A este concepto se le ha llamado "Trabajo estructural" por J. L. de Miguel y más tarde "Cantidad de estructura" por R. Aroca.
- A esta conclusión llegó Michell, aunque por un razonamiento totalmente distinto, en su artículo "On the limits of Economy of Material in Frame-Structures". Phil. Mag. 8. 1904.

- La expresión de volumen $V = \frac{ql^2}{\sigma} \cdot F$, es general para cualquier estructura en que la carga es uniforme: vigas, cerchas, etc. El "factor de forma" naturalmente varía mucho de un tipo de estructura a otro.

(7) Para estructuras continuas puede generalizarse el teorema de Maxwell de la siguiente forma: una línea continua es el límite a que tiende una poligonal cuando el número de lados tiende a infinito y sus longitudes ΔS tienden a cero, es decir, $\Delta S \rightarrow \delta S$. Girando 90° todos los esfuerzos de esta poligonal queda:

$$\int_0^s N \cdot \delta S = K$$

y K es el momento de las cargas y reacciones giradas 90° :

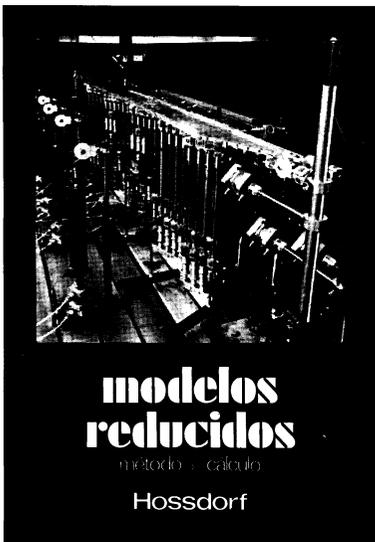
$$K = P \int_0^s y \cdot \delta S + H \cdot l,$$

en el caso de un arco. El volumen es evidentemente:

$$V = \frac{K}{\sigma}$$

* * *

publicaciones del I.E.T.c.c./CSIC



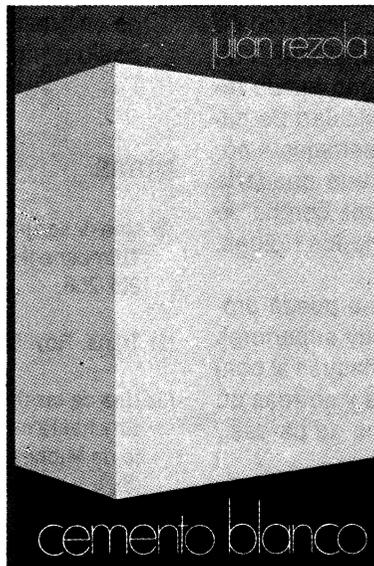
Modelos reducidos. Método de cálculo

H. Hossdorf, Ingeniero Civil

La técnica de los ensayos en modelos reducidos de estructuras sufre hoy día una decisiva metamorfosis. Hasta hace poco era un medio más bien de artesanía, que no siempre era tomado en serio por los académicos teorizantes para comprender el comportamiento resistente de las estructuras complejas y al que se acudió las más de las veces, como a un último remedio debido a sus indiscutibles insuficiencias. Sin embargo, en poco tiempo y gracias a su conexión con los ordenadores digitales, se ha transformado en un instrumento científicamente valioso, que no puede quedar a un lado en la práctica diaria del Ingeniero Projectista.

Un volumen encuadernado en cartón plastificado con lomo de tela, de 17×24 cm, compuesto de 250 páginas, 158 figuras y fotografías.

Precios: 1.800 ptas.; \$ USA 26.00.



Cemento blanco

Julián Rezola
Ingeniero Químico Dipl. I. Q. S.

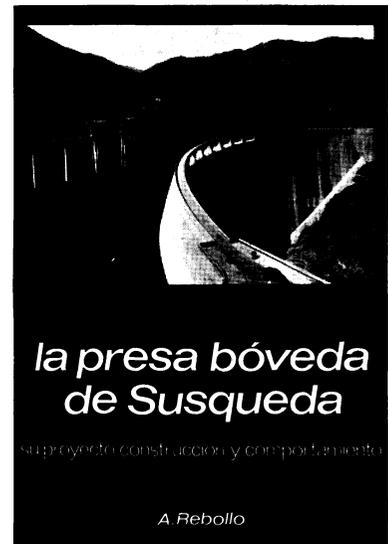
Sabido es que existe una extensa y documentada bibliografía sobre el cemento gris; en cambio, no puede decirse lo mismo acerca del cemento portland blanco, ya que los escritos existentes se refieren tan sólo a algunas peculiaridades que le distinguen de aquél.

El autor nos ofrece sus profundos conocimientos y su larga experiencia tanto en laboratorio como en fabricación.

La parte descriptiva del libro se complementa con gráficos, diagramas y fotografías de gran utilidad, destinados a conseguir la aplicación apropiada de este aglomerante.

Un volumen encuadernado en cartón policarado, de $17,4 \times 24,3$ cm, compuesto de 395 páginas, numerosas figuras, tablas y abacos.

Precios: España, 1.700 ptas.; extranjero, \$ 24.



La presa bóveda de Susqueda

A. Rebollo,
Dr. Ingeniero de Caminos

El esfuerzo del constructor de presas se sitúa, por su pretensión de perennidad, a contracorriente de las tendencias de la civilización actual, caracterizada por lo fungible. Pueden evocarse las 10.000 grandes presas en funcionamiento o en construcción que están envejeciendo y reclaman los cuidados gerontológicos para mantener y perfeccionar su servicio y garantizar su inalienable pretensión de perennidad. En la medida en que todas nuevas obras, grandes o pequeñas, son portadoras de riesgos ecológicos y, a veces, catastróficos, que aumentan con el envejecimiento, la gerontología de las presas es todo un emplazo. La acción adelantada de Arturo Rebollo en este terreno marca un camino a seguir para todos los que aman su propia obra con la devoción paternal que él ha puesto en Susqueda.

Un volumen encuadernado en cartón plastificado con lomo de tela, de $18 \times 24,5$ cm, compuesto de 408 páginas, 330 figuras y fotografías y 39 tablas.

Precios: 1.700 ptas.; extranjero, \$ USA 24.00.