ESTIMADORES PARA EL CONTROL DE CALIDAD POR MEDIDAS AL P % DE DEFECTUOSOS PARA POBLACIONES NO NECESARIAMENTE NORMALES (*)

(ESTIMATORS FOR P % DEFECTIVE MEASURE QUALITY CONTROL FOR POPULATIONS NOT NECESSARILY NORMAL)

Aurelio Villa Pérez, ETSIA; UPM

José Manuel Antón Corrales, Director de la Tesis
Catedrático de Matemáticas II, ETSIA; UPM.

073-17

RESUMEN

Se ha ensayado con éxito una metodología para evaluar las propiedades de los estimadores actuales de control de calidad, consistente en hallar por Monte-Carlo las curvas operacionales (O-C) con ciertas hipótesis sobre la población, pudiendo aplicarse a varios casos de control de calidad de p *defectuosos.*

Aplicándose el método a algunos estimadores previstos para el control de calidad de componentes, acero y hormigón, haciendo hincapié en el problema de la no normalidad de la población y en la influencia de los errores de ensayo.

SUMMARY

A systematic procedure has been applied to check the properties of the actual estimators for quality control, calculating by Monte-Carlo method the operational curves (O-C) assuming some hypothesis on the population: it can be applied in several cases of p *defectives quality control.*

The method has been applied to several estimators used for quality control of the components, steel rods and reinforced concrete, with emphasis on non normal population and on test incertitudes problems.

INTRODUCCION

La experiencia ha demostrado que la resistencia del hormigón fabricado bajo las mismas condiciones, al igual que el acero producido en una misma instalación, pueden considerarse como una población de distribución normal y describirse con la media y la desviación típica que junto con los cálculos probabilísticos han dado lugar a un gran avance en los últimos años del estudio del control de calidad, por medios estadísticos, que queda reflejado en las Normas de los diferentes países, tratando tanto al hormigón como al acero como poblaciones supuestamente normales de media y desviación típica conocidos.

Los diferentes estimadores recomendados por los distintos organismos y empleados en diversos países, consistentes en comparar una resistencia de proyecto con la correspondiente resistencia característica estimada a partir de n probetas, dan resultados satisfactorios tanto para aceros de una misma colada como para hormigones de una misma resistencia especificada. Pero estos criterios dejan de ser fiables cuando se mezclan aceros de dos coladas distintas o bien cuando se mezclan hormigones de diferentes resistencias; cuando se mezclan, por ejemplo n/2 probetas de acero 42 con n/2 de acero 52, es decir, se mezclan dos poblaciones supuestamente normales distintas, obteniendo una población no normal (en la que, de hecho, mejora la calidad), los diferentes estimadores provocan el rechazo, en este caso, del acero 42. Lo mismo sucede cuando se mezclan hormigones con resistencias distintas en diferentes probetas de una misma muestra. Ello es debido al enorme aumento de la dispersión de la población principal y estudiada al producirse la mezcla.

(*) *Tesis presentada el 9 de junio de 1986 en la ETS de Ingenieros Agrónomos de Madrid, leída el 18 de julio del mismo año. Obtuvo la calificación de apto cum laude.*

Otro de los problemas que se presentan a la hora de aplicar los diferentes criterios de aceptación es la influencia variable según el estimador que sobre ellos puede tener un error de precisión en la medida de la resistencia de las probetas de una muestra, error de ensayo (puede englobarse dentro de diversos errores de modelo) que se puede producir tanto en poblaciones normales, como en poblaciones de la mezcla (poblaciones no normales), a la hora de estimar la resistencia característica del hormigón o del acero, por lo que puede afectar al criterio de aceptación y rechazo.

Profundizando en la mezcla de poblaciones, por una parte cuando la población analizada se mezcla con otra de mayor resistencia, y por otra, cuando se mezcla con otra de menor resistencia. Analizándose el comportamiento de los diferentes estimadores empleados en la norma española para acero como para hormigón, comparándolos con el criterio estándar recomendado por el CEB (media menos tantas veces la desviación típica) para los diferentes resultados de la muestra.

METODOLOGIA

Para hallar diversas probabilidades de aceptación se han usado métodos de Monte-Carlo por ser muy difícil hacerlo de otro modo. Efectivamente, intervienen varias fórmulas de valores ordenados (dependientes, por tanto, estadísticamente) de resultados de muestras de extensión n. En este caso, es mucho más directo el método de Monte-Carlo que buscar métodos numéricos de distribuciones complicadas de variables dependientes entre sí.

Para ello, se ha utilizado el ordenador 4341 del Centro de Cálculo de la Universidad Politécnica de Madrid, accediendo al sistema operativo a través de uno de los terminales de la ETSI Agrónomos. A través de él se obtienen las probabilidades de aceptar mediante una serie de programas en Fortran, utilizando de la biblioteca IMSL la subrutina GGNML (DSEED, NR, R), la cual, a partir de la semilla DSEED entra en la subrutina (GGHBS) de números aleatorios entre 0 y 1, que procede de la siguiente forma:

$$y_{n+1} = y_n \cdot a \text{ (mod. c)}$$

donde $a = 16.807 = 7^5$ y $c = 2^{31} - 1$

Los resultados se presentan en tandas de n elementos divididos por 2^{31} (valores entre 0 y 1):

$$Zi = \frac{y_i}{2^{31}}.$$

La tanda Zi da lugar a la Ri buscada y la obtenemos mediante la subrutina (MDNRIS) que nos da la inversa de la función de distribución normal $f(Ri) = Zi$ (probabilidad ξZi si ξ variable aleatoria normal [0,1]).

Con el fin de comprobar la efectividad del generador de números aleatorios, hemos tomado una serie de tandas de elementos, hallando sus momentos, obteniendo resultados satisfactorios (los exactos son 0, 1, 0, 3), viendo de esta forma su precisión.

Los diferentes criterios de aceptación nos van a dar las probabilidades de aceptar en función del porcentaje de defectuosos de la población total. Esta relación se muestra mediante un diagrama que los liga, denominado curvas O-C en las que las probabilidades de aceptar y el porcentaje de defectuosos se presentan en escala binormal, obteniéndose para cada criterio sus curvas correspondientes (curvas O-C), las cuales se aproximan a rectas en este papel.

La precisión del método de cálculo se ha comprobado ensayando con un número variable de muestras por Monte-Carlo. En teoría, este proceso conduce, si todo va bien, a repetir un ensayo aleatorio de probabilidad p un número de veces N; como el número de aceptaciones resulta ser variable aleatoria binomial, tienen media N_p y varianza N_{pq} $(q = 1 - p)$, por lo que dividiendo por N el número medido tiene media P y desviación típica $\frac{pq}{N}$; el valor real p puede expresarse como el medido v, según $\frac{v \pm v \cdot (1 - v)}{N}$, a efectos de predecir la precisión; por ejemplo, si $p = 0,5$ y $N = 10.000$ (valor que hemos tomado), queda

$$\frac{0,5 \pm 0,5}{100} \text{ medido.}$$

Estimadores analizados

Se han estudiado diferentes criterios de aceptación, tanto para barras de acero como para hormigón, haciendo hincapié en los estimadores de la norma española, así como en el criterio estándar recomendado por el Comité Mixto.

El criterio de la norma española para barras de acero estima la resistencia característica como la media aritmética de la octava parte más baja de un mínimo de 16 ensayos siempre que ninguno de ellos sea inferior al 95 % del valor garantizado. Es decir, sobre una muestra de 16 resultados $x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_{16}$ se acepta así:

— el más bajo de la muestra es mayor que el 95 % X_G ... y si la media de los más bajos de la serie es mayor que X_G ...

— $x_1 > 0{,}95\ X_G$

— $x_1 + x_2 > 2X_G$

Para hormigón, la norma española estima la resistencia característica en los ensayos de control como el doble de la media de los n – 1 resultados más bajos de una serie de 2n disminuidos del resultado enésimo, sea la muestra de tamaño 2n $x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_i \ldots\ldots x_{2n}$ estimando la resistencia mediante:

$$\frac{2(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{n-1})}{n-1} - x_n$$

criterio que es aplicado para seis y doce resultados, aceptándose si es mayor que X_G.

Para seis resultados ($x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_6$) queda de la siguiente forma:

$$\frac{2(x_1 + x_2)}{2} - x_3 \longrightarrow x_1 + x_2 - x_3$$

estimando la resistencia como la suma de los dos más bajos menos el tercero.

Si es aplicado a doce resultados ($x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_{12}$) se acepta si

$$2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{5} xi}{5} - x_6 > X_G$$

es decir, si el doble de la media de los 5 más bajos menos el sexto es mayor que X_G.

En cuanto al criterio estándar del Comité Mixto, estima la resistencia mediante $\bar{x}_n - \lambda s_n$, siendo:

$\bar{x}_n$ = la media aritmética de los n valores individuales de la resistencia:

$$\bar{x}_n = 1/n \sum_{1=1}^{n} xi$$

s_n = desviación típica del conjunto de resultados del ensayo:

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (xi - \bar{x}_n)^2}{n-1}}$$

λ = constante cuyo valor debe fijarse, ya que depende de n y del grado de seguridad requerido (nivel de confianza), criterio que se analiza para 16, 12 y 6 resultados, con el fin de comparar los resultados obtenidos con los de la norma española para acero y hormigón.

Distribución de las resistencias

Se estudian los diferentes estimadores según sea la distribución de la resistencia, suponiendo, en primer lugar, que éstas se distribuyen según una ley normal y, por otra parte, la mezcla de poblaciones que dan lugar a poblaciones no normales.

En el caso de que la resistencia del material (acero u hormigón) se distribuya según una ley normal de media y desviación típica conocidas $N(\mu, \sigma)$, la resistencia de proyecto X_G viene dada por $X_G = \mu - \lambda\sigma$, en la que λ es el fráctil del tanto por ciento de defectuosos de una distribución normal.

Mediante un análisis estadístico pasamos de una distribución $N(\mu, \sigma)$ a una distribución N(0, 1), ya que los diferentes resultados de la muestra (xi) son valores de una distribución $N(\mu, \sigma)$, los cuales los vamos a obtener a partir de unos valores (yi) de una distribución N(0, 1) mediante $xi = \mu + yi\sigma$, siendo la media y la desviación típica de la $N(\mu, \sigma)$ para n resultados de la muestra en función de los valores de la distribución N(0, 1):

$$\bar{x}_n = \mu + \bar{y}_n\sigma$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {}^{2}(yi - \bar{y})}{n-1}} \cdot \sigma$$

ya que $S_x = S_y \cdot \sigma$.

Si la distribución de la población viene dada como mezcla de dos poblaciones, en la que la población principal de distribución normal se mezcla con otra también normal de mejor calidad (mayor resistencia), o bien, de peor calidad (menor resistencia), para su estudio partimos de dos poblaciones: la principal de distribución $N_1(\mu_1, \sigma_1)$ y la mezclada o secundaria de distribución $N_2(\mu_2, \sigma_2)$, pudiendo realizarse la mezcla en diferentes proporciones, p de la población principal y (1 – p) de la secundaria, con lo que se obtiene una nueva población que será la de la mezcla cuya distribución es *no normal* y cuya función de distribución media (μ) y desviación típica (σ) son:

$$F(x) = p \cdot F_1(x) + (1 - p)F_2(x)$$

$$\mu = p\mu_1 + (1 - p)\mu_2$$

$$\sigma = \left[p(1-p)\,(\mu_1 - \mu_2)^2 + \sigma_1^2 p + (1-p)\sigma_2^2 \right]^{1/2}$$

Para estudiar la mezcla de poblaciones partimos de dos poblaciones supuestamente normales, la población principal de distribución $N(300, \sigma)$, siendo 300 (*) la resistencia característica media con unas dispersiones del 6,66, 10 y 13,33 %, con lo que se parte de tres casos posibles de la población principal, cuya media es de 300 y de desviaciones típicas: 20, 30 y 40 (**), poblaciones que se mezclan con otras de mejor o peor calidad.

Si la mezcla se realiza con poblaciones de mejor calidad, de distribución $N_2(\mu_2, \sigma_2)$, siendo $\mu_2 = 300 \cdot r$, donde r es la razón de la media mezclada media principal (1,166, 1,33 y 1,66). La desviación típica σ_2 viene dada por $\sigma_2 = \delta_2\, \mu_2$, siendo δ_2 la dispersión de la población de mejor calidad (3 y 10 %), con lo que se tienen diferentes poblaciones de mejor calidad, las cuales se van a mezclar con las poblaciones principales en un 20 y 40 %, teniendo, por tanto, 36 casos de mezcla.

Definidos los diferentes casos de mezcla, se calculan sus respectivas resistencias de proyecto X_G, referidas a un nivel de confianza del 95 %, mediante la función de distribución de cada una de las mezclas (Fig. 1). Se calcula la resistencia de proyecto X_G para el 5 % de defectuosos.

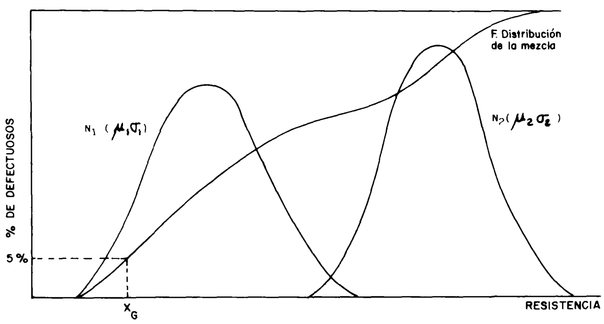

Fig. 1.—Función de distribución de una población normal mezclada con otra de mejor calidad.

Determinada X_G se toma por Monte-Carlo un valor (yi) de una distribución $N(0, 1)$, el cual podrá pertenecer a cualquiera de las dos poblaciones de la mezcla y, mediante una distribución uniforme $U(0, 1)$ se define, según los porcentajes de la mezcla a cuál de las dos poblaciones pertenece, determinándose el valor de la muestra (xi) según a la población a la que pertenezca; si pertenece a la principal, el valor $xi = \mu_1 + \sigma$, yi, y si pertenece a la de mejor calidad, $xi = \mu_2 + \sigma_2 yi$ (siendo xi un valor de la muestra).

Obtenidos los diferentes resultados de la muestra para cada uno de los 36 casos de mezcla, así como sus respectivas resistencias de proyecto, se determinan las probabilidades de aceptar mediante los criterios analizados.

De igual forma, se analiza la mezcla cuando ésta se realiza con peor calidad; para ello se parte de la misma población principal, que en el caso de mezcla con mejor calidad $N_1(\mu_1, \sigma_1)$ se mezcla con otra de peor calidad de distribución $N_2(\mu_2, \sigma_2)$, siendo $\sigma_2 = \mu_1 \cdot r$, donde r es la razón de la media mezclada media principal, que toma unos valores de 0,9, 0,7 y 0,5, dando lugar a unas medias de 270, 210 y 150. La dispersión de la población de peor calidad suponemos que es del 20 %, por lo que se tienen tres poblaciones diferentes de la de peor calidad de la mezcla.

Con el fin de ver si los diferentes criterios de aceptación detectan la presencia de elementos peligrosos en la población estudiada, se analizan unos porcentajes de mezcla muy bajos (del orden de 1 y 3 %) para la población de peor calidad, analizándose, por tanto, 18 casos posibles de mezcla con peor calidad.

Definidos los diferentes casos de mezcla, se calcula su correspondiente resistencia de proyecto X_G referida a un nivel de confianza del 95 %. Al calcularlo de forma análoga al caso de mezcla con mejor calidad, es decir, mediante su función de distribución de la población de la mezcla, se comprueba que los X_G obtenidos no mantienen el mismo riesgo, sino que lo aumentan, creciendo, por tanto, la probabilidad de aceptar, por lo que se calcula la resistencia característica de la población de la mezcla sin tener en cuenta la población de peor calidad. Calculamos así la resistencia de proyecto para cada caso de mezcla, mediante la correspondiente función de distribución de la población principal referida a un nivel de confianza del 95 % (5 % de defectuosos) (Fig. 2).

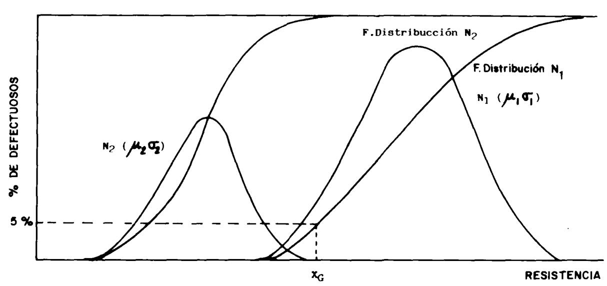

Fig. 2.—Funciones de distribución de las poblaciones en la mezcla con peor calidad.

(*) Cuando se multiplica μ, σ, χ_G por un mismo valor no varía la razón de las mezclas y las dispersiones, por lo que es válido para otros valores: se normaliza $\chi_G = 300$ que corresponde a kp/cm^2 para el hormigón y MP_a para el acero.

(**) Desviaciones típicas para el acero. Para el hormigón se han tomado 40, 50 y 60, ya que su dispersión es mayor.

Determinadas las resistencias de proyecto para los diferentes casos de mezcla se especifican cada uno de los elementos de la muestra de la misma forma que en el caso de la mezcla con mejor calidad, obteniendo las probabilidades de aceptar para cada uno de los criterios estudiados.

RESULTADO Y CONCLUSIONES

Obtenidas las probabilidades de aceptar según los diferentes criterios para todos los casos analizados, en sus respectivas curvas características se aprecia que los estimadores utilizados en la norma española, tanto para

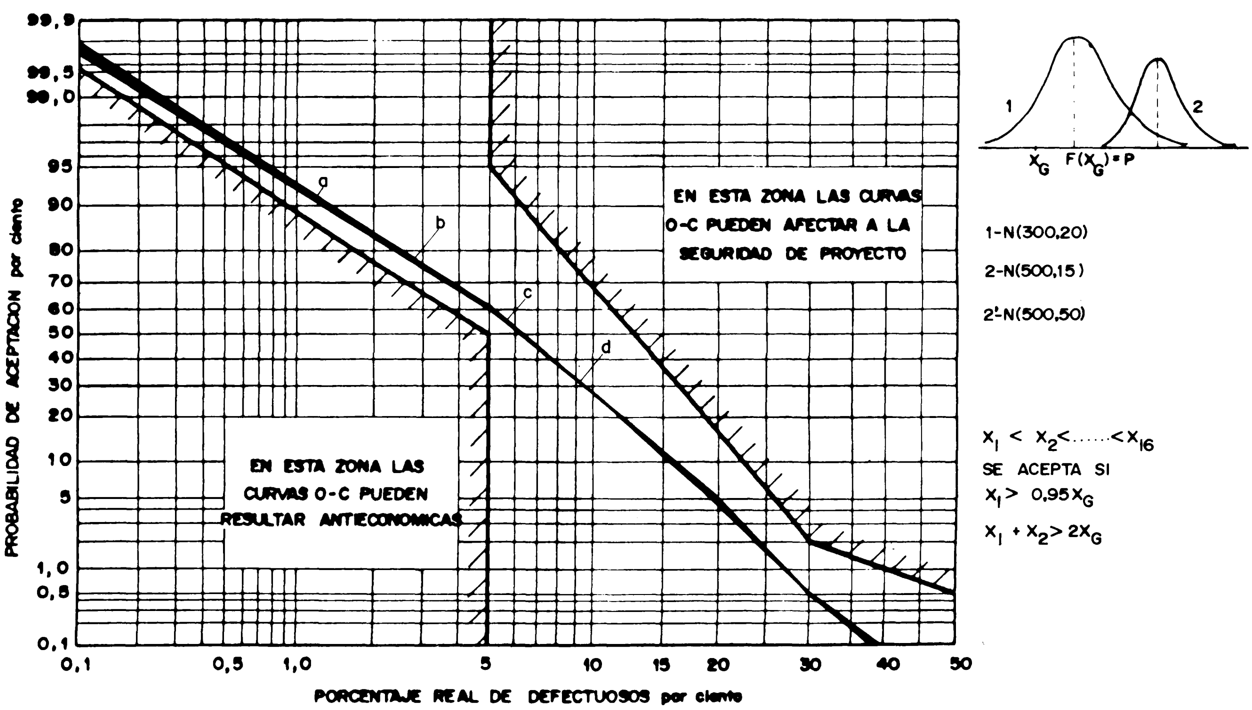

Fig. 3.—Curvas 0-C de una población normal mezclada con mejor calidad.

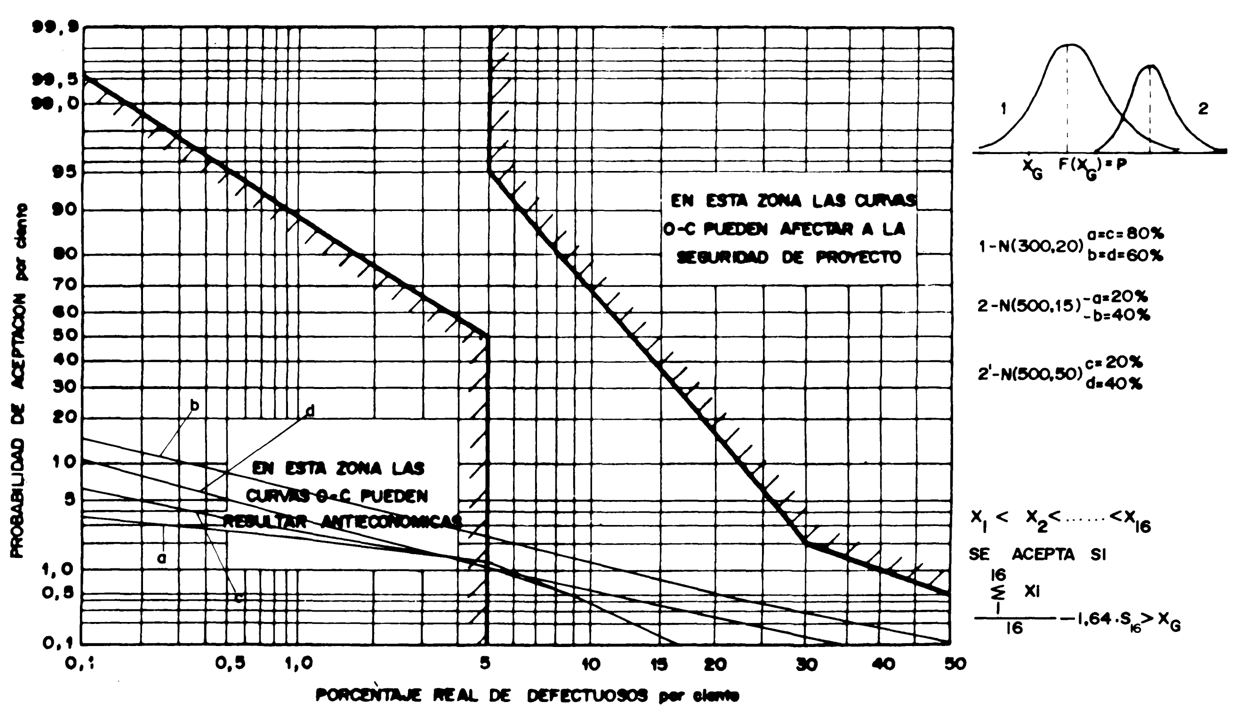

Fig. 4.—Curvas 0-C de una población normal mezclada con mejor calidad.

acero (cuyas curvas dependen de la dispersión) como para hormigón, son menos precisos para poblaciones normales que el criterio estándar (media menos 1,64 la desviación típica).

En cuanto a la mezcla de dos poblaciones normales, los estimadores de la norma española son prácticamente insensibles cuando la mezcla se realiza con mejor calidad, e incluso mejora su precisión (Fig. 3) (*). Sin embargo, el estimador estándar (m-1, 64s) tiene sus curvas totalmente desplazadas hacia abajo, disminuyendo las probabilidades de aceptar siendo completamente perjudicial para el vendedor sin mejora de la seguridad (Fig. 4) (*). En el caso de los criterios para hormigón este efecto no es tan llamativo como en el caso de las barras de acero, debido a la mayor dispersión del hormigón.

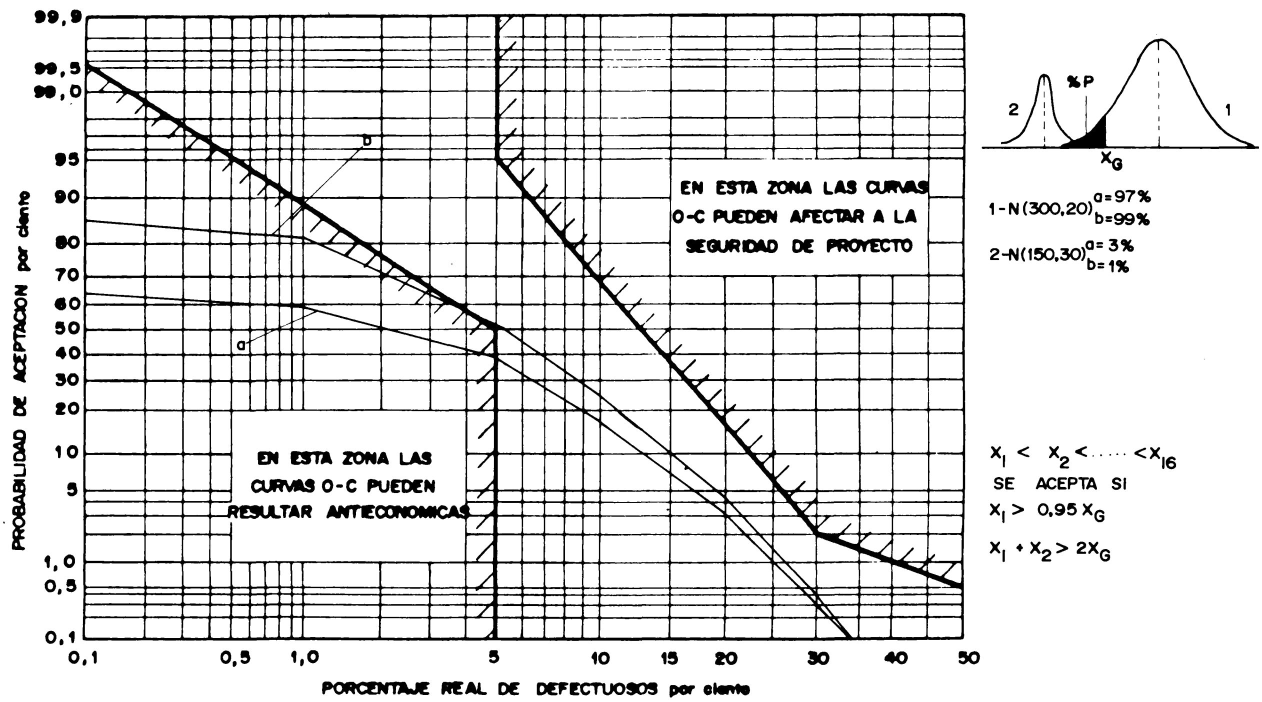

Fig. 5.—Curvas 0-C de una población normal mezclada con peor calidad.

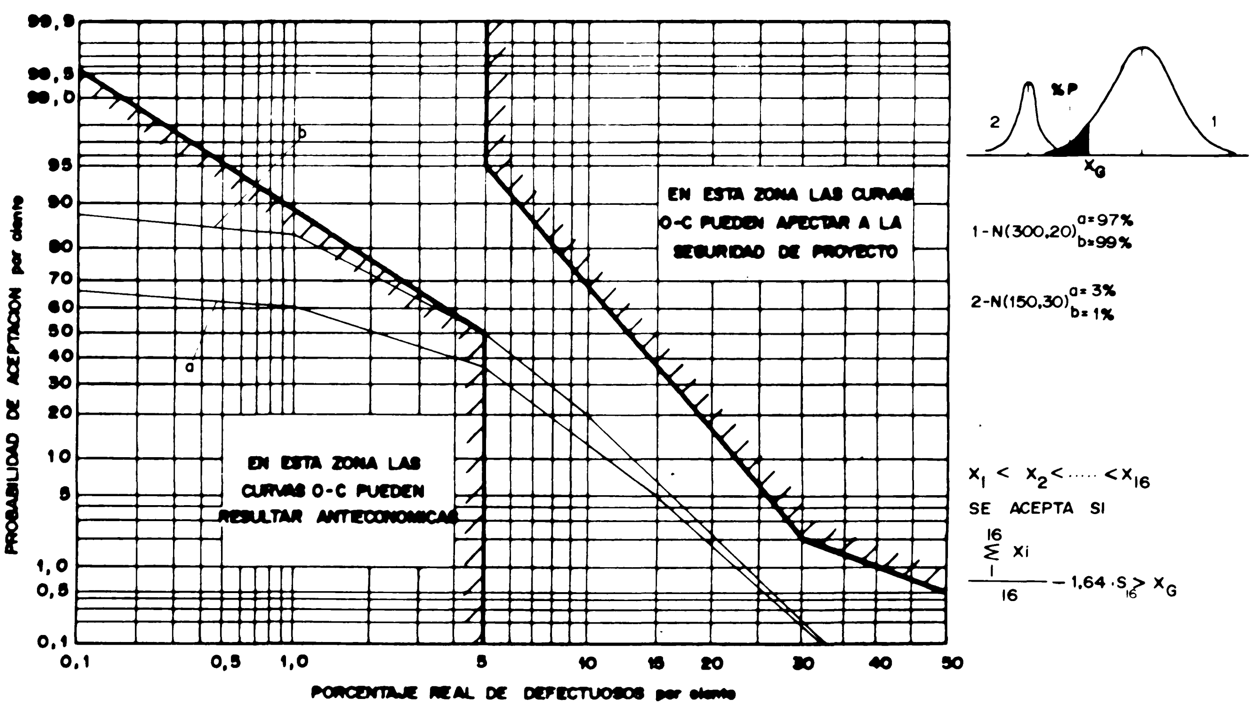

Fig. 6.—Curvas 0-C de una población normal mezclada con peor calidad.

Informes de la Construcción, Vol. 38, n.º 387, enero/febrero, 1987

En el caso de mezcla con peor calidad (con el fin de ver si detectan la presencia de elementos peligrosos en la población) se ha ensayado una población de mezcla de una normal de p % de defectuosos con una pequeña proporción de una normal de resistencia muy baja. La sensibilidad no es muy buena por ser poca la población defectuosa, siendo mayor si la población básica tiene pocos defectuosos. En este caso son más sensibles independientemente de la dispersión de la población básica los estimadores de la norma española que el estándar, sobre todo, si la población básica tiene una dispersión mayor del 10 %, en cuyo caso, este último estimador es poco sensible a la presencia de elementos peligrosos (Figs. 5 y 6) (*).

Se ha estudiado con dichos estimadores la sensibilidad a imprecisiones de ensayo. Como regla general esa sensibilidad perjudica al ensayo si la precisión (dispersión) de errores de ensayo es mayor que la de la población, y poco en caso contrario. Los estimadores de la norma española por ser función de los resultados más bajos de la muestra son menos sensibles a las incertidumbres de ensayo que el estándar, lo que se explica porque las incertidumbres de ensayo aumentan con la desviación típica de la muestra.

Con esta metodología se pueden estudiar numerosos criterios de aceptación. En particular, se han estudiado los del Model Code para tres probetas, en donde se observa que dependen mucho de la desviación típica del hormigón.

Hemos de destacar, pues:

— La eficacia del Método de Monte-Carlo para obtener las curvas características (suponer una distribución a priori y hallar sus curvas características).

— La gran sensibilidad que muestran los métodos estándar a la bimodalidad de la población que tienden a rechazar productos con un porcentaje de defectuosos bajo. Este efecto se agrava cuando la población principal tiene poca dispersión (caso de las barras de acero).

— Los estimadores de la norma española evitan este efecto por ser función de los elementos más bajos de una muestra aleatoria, siendo, en cambio, menos precisos para poblaciones normales y menos sensibles a la hipótesis de error que el criterio estándar.

(*) Se representan en las figuras las curvas O-C correspondientes a la mezcla que se indican, así como sus porcentajes de mezcla.

* * *