OBRAS DE FABRICA RESISTENTES. CONSIDERACIONES GENERALES DE CALCULO

(WORKS OF RESISTANT MASONRY. CALCULATION GENERAL REFLEXIONS)

José María Jenaro Garrido

Dr. Arquitecto
IETcc

400-17

RESUMEN

El presente artículo recoge un estudio de la capacidad resistente de las obras de fábrica no armadas ante las solicitaciones normales, a partir del conocimiento del valor nominal de la resistencia a compresión de los elementos componentes o de los resultados de ensayos a compresión realizados sobre macizos o probetas de obra de fábrica.

Las expresiones obtenidas para secciones homogéneas se extienden a secciones que por comprender cavidades hayan de considerarse heterogéneas, haciendo posible una determinación de su comportamiento resistente mediante la introducción del concepto de sección resistente homogénea equivalente.

Finalmente se incluye un estudio sobre la deformabilidad y pandeo de las obras de fábrica a los que se aplican diversas expresiones ya recogidas en el Código Modelo CEB-FIP y en la vigente Instrucción EH-82 para obras de hormigón.

SUMMARY

This work studies the resisting capacity of the non reinforced masonry works to normal requirements from the knowledge of the nominal value to compressive resistance of its elements, or from the results from compression tests carried out on masses or on masonry samples.

The obtained expressions for homogeneous sections are also valid for sections that, because of their cavities, they can be considered heterogeneous, allowing a determination of its resistant behaviour by means of the introduction of the concept of resistant homogeneous equivalent section.

Finally it includes a study on deforming and buckling of the masonry works to which diverse expressions gathered already in the Model Code CEB-FIP and in the Instruction in force EH-82 for Concrete Works are applied.

El procedimiento general de cálculo preconizado en la vigente Instrucción EH - 82 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado, consiste en deducir por una parte el efecto S_d de las acciones exteriores a partir de los valores ponderados de las acciones características y por otra parte la respuesta R_d de la estructura, correspondiente a la situación límite en estudio, a partir de los valores minorados de las características de los materiales.

Comparando estas dos magnitudes, pueden afirmarse que está asegurado el adecuado comportamiento de la obra siempre que el efecto S_d o solicitación actuante producida por las acciones exteriores debidamente ponderadas, sea inferior a la respuesta R_d o solicitación resistente obtenida a partir de los valores minorados de la resistencia de los materiales. Es decir, el criterio de aceptación consiste, en general, en la comprobación de que se verifica que

$$S_d(\gamma_F \cdot q_k) \leq R_d\left(-\frac{f_{ck}}{\gamma_m}\right)$$

Ahora bien, tratándose de obras de fábrica, en las que a la heterogeneidad de la sección resistente deben sumarse las imperfecciones propias de una ejecución artesanal y la falta de una definición precisa de las características de los materiales disponibles, la aplicación práctica de la expresión anterior no siempre resulta viable, tanto por la dificultad de deducir la respuesta R_d de la obra de fábrica a partir de la resistencia del material, como por la que se presenta cuando se trata de obtener la solicitación actuante S_d a partir de las acciones características.

Para las obras de fábrica resulta entonces conveniente, a veces, recurrir a una expresión más sencilla y de aplicación más directa que se tratará de exponer a continuación.

Teniendo en cuenta la forma peculiar de trabajo de los muros resistentes de obra de fábrica no armados, que, generalmente, sólo pueden resistir esfuerzos que den lugar a tensiones normales de compresión, nos limitaremos al estudio de las secciones sometidas a esta clase de esfuer-

zos y llamaremos N a la sollicitación normal actuante y N_u a la sollicitación normal resistente o de agotamiento.

Aplicando entonces los coeficientes de seguridad a estas dos magnitudes y comparando las expresiones obtenidas, puede afirmarse que está asegurando el adecuado comportamiento de las obras de fábrica siempre que la sollicitación normal actuante, convenientemente mayorada, sea igual o inferior a la sollicitación normal resistente convenientemente minorada. Es decir, el criterio de aceptación consistirá en general en la comprobación de que se verifica que:

$$\gamma_f \cdot N \leq \frac{N_u}{\gamma_m}$$

El comportamiento no lineal tanto de la estructura como de las secciones resistentes, viene a poner más de manifiesto la diferencia existente entre esta última expresión y la expuesta más arriba, y viene a agravar la dificultad de la operatividad de aquella primera.

La posibilidad de aplicación de la segunda expresión basada en la comparación de las correspondientes sollicitaciones normales, supone, en cambio, una mayor flexibilidad en los cálculos y una mayor operatividad, especialmente en trabajos de comprobación o peritaje, cuando se ha de adoptar un criterio sobre la capacidad resistente en la obra de fábrica a partir de los resultados de ensayos a compresión realizados sobre unidades de obra o sobre elementos prefabricados.

En los apartados siguientes se recoge un estudio sobre los valores que puede adoptar la respuesta N_u de un muro resistente para distintos tipos de sollicitación, en función de la excentricidad relativa de carga y de la sollicitación normal de agotamiento bajo carga centrada, considerando sólo tensiones de compresión (*), y para distintos diagramas de distribución de tensiones.

Para ello se comienza por estudiar el caso general de homogeneidad de la sección resistente, para, posteriormente, extender la posibilidad de aplicación de las expresiones obtenidas al caso de sección heterogénea.

SECCION RESISTENTE HOMOGÉNEA

CARGA CENTRADA

El caso de carga centrada es el más simple pero es también el menos frecuente.

(*) En casos excepcionales y previa justificación, pueden admitirse, según norma MV 201 - 1972, esfuerzos que den lugar a tensiones de tracción de valor no superior a 0,1 de la resistencia de cálculo a compresión, pero dada la pequeña repercusión en el valor de la sollicitación de agotamiento no se tendrá en cuenta en el estudio que se recoge a continuación.

La respuesta N_u de un entrepaño de muro resistente de sección rectangular homogénea de dimensiones $b \times h$, o valor máximo que puede soportar bajo la actuación de una carga centrada en sus extremos depende de la resistencia R de la obra de fábrica y de los efectos de segundo orden que puedan producirse por causa de la deformidad de la obra de fábrica (figura 1).

Para un macizo de pequeña esbeltez en el que puedan despreciarse los efectos de pandeo, el valor de la carga centrada de rotura, que designaremos por N_o puede evaluarse mediante la expresión:

$$N_o = R \cdot b \cdot h.$$

La resistencia R depende de las características de los materiales constituyentes y de la puesta en obra de dichos materiales. En general, es función de la resistencia nominal de las unidades o elementos componentes de la obra de fábrica, de la resistencia a compresión del mortero, de la plasticidad de éste, y del espesor de juntas.

No es fácil efectuar una determinación precisa de la resistencia a la rotura del macizo de obra de fábrica a partir de las características de los materiales constituyentes, pero existen fórmulas empíricas y tablas que proporcionan un valor aproximado de dicha resistencia en función de la resistencia nominal del ladrillo o bloque y de la resistencia del mortero.

Tratándose de obras de fábrica de ladrillo, puede evaluarse la resistencia de cálculo mediante los valores que se recogen en la norma MV 201

Fig. 1

1972 para cada uno de los casos de utilización de ladrillo macizo, de ladrillo perforado o de ladrillo hueco.

Sin embargo, las fórmulas existentes están basadas, en general, en métodos estimativos y las tablas proporcionan valores admisibles de cálculo que no reflejan la capacidad resistente en agotamiento de las obras de fábrica.

Por otra parte, para poder obtener valores fiables mediante las fórmulas y tablas deben quedar garantizados los valores nominales de la resistencia de los elementos componentes y del mortero, y debe llevarse un control de su calidad mediante los ensayos adecuados.

Una determinación precisa de la resistencia a la rotura de la obra de fábrica debe efectuarse por medios más directos, mediante la realización de ensayos a compresión sobre macizos o probetas de obra de fábrica.

En este caso, los ensayos deben realizarse por personal especializado y a lo largo de un tiempo suficiente para que tenga lugar una deformación reológica que permita evaluar el valor final estabilizado tanto de la resistencia como de la deformación (*).

Los ensayos pueden proporcionar un valor de resistencia que, en casos especiales y en condiciones muy cuidadas de ejecución y puesta en obra, podría incluso superar al valor nominal garantizado para las unidades o piezas componentes porque este valor nominal es un valor mínimo, pero en general, los resultados son inferiores a aquel valor nominal y marcan un límite, una cota superior o una resistencia máxima a compresión que no debe superarse en los cálculos.

En cualquier caso y en especial cuando no se disponga de resultados de ensayos sobre macizos o probetas de obra de fábrica, el mismo valor nominal o valor característico mínimo garantizado para los elementos componentes proporciona también un límite superior o valor máximo de resistencia que ha de tenerse en cuenta para los cálculos en rotura de las obras de fábrica.

(*) Debe tenerse en cuenta que, para obras de fábrica sometidas a cargas de larga duración, la resistencia puede venir influenciada por fenómenos reológicos o de cansancio de los materiales.

Estos efectos de cansancio o fenómenos reológicos se tienen en cuenta en los cálculos afectando a la resistencia de un coeficiente de corrección K.

Para obras de hormigón y según el diagrama de cálculo que se adopte, este coeficiente toma los valores:

$K = 0,85$ para el diagrama parábola-rectángulo

$K = 0,70$ para el método de cálculo del Momento Tópe.

En el presente estudio se considera que para las obras de fábrica, los fenómenos reológicos de cansancio del material quedan englobados en el valor de R.

Este valor nominal y los resultados de los ensayos constituyen por lo tanto una doble limitación de resistencia para los cálculos.

Dentro de un procedimiento de ejecución normal y adecuadamente controlado, en las obras de fábrica son inevitables algunas deficiencias debidas a la calidad del mortero, a la falta de superposición de superficies resistentes, etc. que repercuten en la resistencia de las obras de fábrica y que pueden quedar cubiertas eligiendo en los cálculos un coeficiente de seguridad adecuado.

CARGA EXCÉNTRICA

El valor máximo de la sollicitación o sollicitación normal de agotamiento de una sección homogénea bajo carga excéntrica, depende del diagrama de tensiones que se adopte (diagrama rectangular, triangular, trapecial, parabólico, etc.), y es función de la excentricidad relativa de carga e/h y de la carga de rotura bajo compresión centrada N_0 .

Para un macizo de pequeña esbeltez en el que puedan desprejarse los efectos de pandeo, y si la carga actúa con una excentricidad constante de primer orden $e_0 = M/N$, el valor máximo de la carga de rotura viene dada por la expresión:

$$N_u = \varphi \left(\frac{e_0}{h} \right) \cdot N_0$$

La función $\varphi \left(\frac{e_0}{h} \right)$ correspondiente a cada diagrama de tensiones, para un macizo de sección rectangular $b \times h$, y la deducción de la expresión correspondiente para distintos valores de la excentricidad relativa e_0/h , supuesto el material homogéneo en toda la sección, se recoge en los apartados siguientes.

Diagrama de distribución uniforme de tensiones

Considerando una sección rectangular, y para una profundidad y del diagrama de tensiones, (figura 2), pueden plantearse las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos:

$$N = R \cdot b \cdot y$$

$$M = N \cdot e_0 = R \cdot b \cdot y \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)$$

dividiendo la segunda de estas ecuaciones entre la primera obtenemos una relación entre la excentricidad e_0 y la profundidad y del diagrama de tensiones:

$$\frac{M}{N} = e_0 = \frac{h}{2} - \frac{y}{2}$$

y despejando la profundidad y :

$$y = h \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{e_0}{h} \right)$$

Fig. 2

Fig. 3

con lo que la sollicitación máxima para la excentricidad relativa e_o/h será:

$$N_u = R \cdot b \cdot y = R \cdot b \cdot h \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{e_o}{h}\right) = \varphi\left(\frac{e_o}{h}\right) \cdot N_o$$

donde:

$$\varphi\left(\frac{e_o}{h}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{e_o}{h} \quad y \quad N_o = R \cdot b \cdot h$$

Diagrama de distribución triangular de tensiones. – Profundidad $y \leq h$

Para una sección rectangular $b \times h$, y para una distribución triangular de tensiones en la que la profundidad y no sobrepase el espesor h del muro (figura 3), las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos serán las siguientes:

$$N = \frac{1}{2} \cdot R \cdot y \cdot b$$

$$M = N \cdot e_o = \frac{1}{2} R \cdot y \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot y\right)$$

dividiendo la segunda de estas ecuaciones entre la primera obtenemos una relación entre la excentricidad e_o y la profundidad y del diagrama de tensiones:

$$\frac{M}{N} = e_o = \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \cdot y$$

para una profundidad $y = h$ corresponde una excentricidad $e_o = h/6$ que es el valor mínimo de la excentricidad para el que serían aplicables estas fórmulas.

Despejando la profundidad y se tiene:

$$y = \frac{3}{2} h \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{e_o}{h}\right)$$

con lo que la sollicitación máxima para una excentricidad relativa

$$\frac{e_o}{h} \geq \frac{1}{6}$$

será:

$$N = \frac{1}{2} R \cdot y \cdot b = \frac{3}{4} \left(1 - 2 \cdot \frac{e_o}{h}\right) R \cdot b \cdot h = \varphi\left(\frac{e_o}{h}\right) \cdot N_o$$

donde:

$$\varphi\left(\frac{e_o}{h}\right) = \frac{3}{4} \left(1 - 2 \cdot \frac{e_o}{h}\right) \quad y \quad N_o = R \cdot b \cdot h$$

Diagrama de distribución trapezoidal de tensiones. – Profundidad $y > h$

El diagrama de distribución trapezoidal de tensiones corresponde al de una distribución triangular en el que la profundidad y sobrepasa del espesor h del muro (figura 4).

Fig. 4

La ley de tensiones en cada fibra de la sección puede expresarse analíticamente en función de la distancia ζ de dicha fibra a la fibra extrema más comprimida mediante la expresión:

$$\sigma = R \cdot \left(1 - \frac{\zeta}{y}\right)$$

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos serán las siguientes:

$$\begin{aligned} N &= \int_0^h b \cdot d\zeta \cdot R \left(1 - \frac{\zeta}{y}\right) = R \cdot b \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{\zeta}{y}\right) \cdot d\zeta = \\ &= R \cdot b \cdot \left[\zeta - \frac{\zeta^2}{2y}\right]_0^h = R \cdot b \cdot h \left(1 - \frac{h}{2y}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= N \cdot e_o = \int_0^h b \cdot d\zeta \cdot R \left(1 - \frac{\zeta}{y}\right) \left(\frac{h}{2} - \zeta\right) = \\ &= R \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{2} - \left(1 + \frac{h}{2y}\right) \frac{h^2}{2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{h^3}{3}\right) = \\ &= R \cdot b \cdot h^3 \frac{1}{12y} \end{aligned}$$

Dividiendo la segunda de estas ecuaciones entre la primera:

$$\begin{aligned} \frac{M}{N} &= e_o = \frac{R \cdot b \cdot h^3}{R \cdot b \cdot h \left(1 - \frac{h}{2y}\right) \cdot 12y} = \\ &= \frac{h^2}{12y - 6h} \end{aligned}$$

y despejando la profundidad y :

$$y = \frac{h^2}{12e_o} + \frac{h}{2}$$

La sollicitación máxima para una excentricidad relativa $\frac{e_o}{h} \leq \frac{1}{6}$ será entonces:

$$\begin{aligned} N_u &= R \cdot b \cdot h \left(1 - \frac{h}{2y}\right) = R \cdot b \cdot h \left(1 - \frac{h}{\frac{h^2}{6e_o} + h}\right) = \\ &= \frac{1}{1 + 6 \frac{e_o}{h}} \cdot R \cdot b \cdot h = \varphi\left(\frac{e_o}{h}\right) \cdot N_o \end{aligned}$$

donde:

$$\varphi\left(\frac{e_o}{h}\right) = \frac{1}{1 + 6 \frac{e_o}{h}}$$

y

$$N_o = R \cdot b \cdot h$$

Diagrama de distribución parabólica de tensiones. – Profundidad $y \leq h$

Para establecer las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos se tendrá en cuenta que el diagrama de tensiones puede descomponerse en dos figuras geométricas; un triángulo y un

segmento de parábola (figura 5), y que el área del segmento de parábola viene dada por la expresión:

$$\frac{2}{3} \cdot y \cdot \frac{R}{4}$$

Las ecuaciones de equilibrio serán:

$$N = \frac{1}{2} \cdot R \cdot y \cdot b + \frac{2}{3} \cdot y \cdot \frac{R}{4} \cdot b = \frac{2}{3} \cdot R \cdot y \cdot b$$

$$\begin{aligned} M &= N \cdot e_o = \frac{1}{2} R \cdot y \cdot b \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{3}\right) + \frac{2}{3} y \cdot \frac{R}{4} b \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right) = \\ &= R \cdot y \cdot b \left(\frac{h}{3} - \frac{y}{4}\right) \end{aligned}$$

Dividiendo la segunda de estas ecuaciones entre la primera:

$$\frac{M}{N} = e_o = \frac{3}{2} \left(\frac{h}{3} - \frac{y}{4}\right) = \frac{h}{2} - \frac{3}{8} \cdot y$$

Para una profundidad $y = h$ corresponde una excentricidad $e_o = h/8$ que es el valor mínimo de e_o para el que serían aplicables estas fórmulas.

Despejando la profundidad y se tiene:

$$y = \frac{8}{3} \left(\frac{h}{2} - e_o\right) = \frac{4}{3} h \left(1 - 2 \frac{e_o}{h}\right)$$

Fig. 5

con lo que la sollicitación máxima para una excentricidad relativa $\frac{e_o}{h} \leq \frac{1}{8}$ será:

$$N_u = \frac{2}{3} R \cdot y \cdot b = \frac{2}{3} R \frac{4}{3} h \left(1 - 2 \cdot \frac{e_o}{h}\right) \cdot b = \\ = \frac{8}{9} \left(1 - 2 \cdot \frac{e_o}{h}\right) R \cdot b \cdot h = \varphi_o \cdot N_o$$

donde

$$\varphi_o = \frac{8}{9} \left(1 - 2 \frac{e_o}{h}\right) \text{ y } N_o = R \cdot b \cdot h$$

Diagrama de distribución parabólica de tensiones. – Profundidad $y > h$

La ley de tensiones σ en cada fibra de la sección puede expresarse analíticamente en función de la distancia ζ de dicha fibra a la fibra extrema más comprimida (figura 6), mediante la expresión:

$$\sigma = R \cdot \left(1 - \frac{\zeta^2}{y^2}\right)$$

Fig. 6

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos serán:

$$N = \int_0^h b \cdot d\zeta \cdot R \left(1 - \frac{\zeta^2}{y^2}\right) = R \cdot b \int_0^h \left(1 - \frac{\zeta^2}{y^2}\right) d\zeta = \\ = R \cdot b \cdot h \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{y^2}\right)$$

$$M = N \cdot e_o = \int_0^h b \cdot d\zeta \cdot R \left(1 - \frac{\zeta^2}{y^2}\right) \left(\frac{h}{2} - \zeta\right) = \\ = R \cdot b \cdot \int_0^h \left(\frac{h}{2} - \zeta - \frac{h}{2} \cdot \frac{\zeta^2}{y^2} + \frac{\zeta^3}{y^2}\right) \cdot d\zeta = \\ = R \cdot b \cdot h \cdot \frac{h^3}{12 \cdot y^2}$$

dividiendo la segunda de estas ecuaciones entre la primera:

$$\frac{M}{N} = e_o = \frac{h^3}{12 y^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{y^2}\right)} = \frac{h^3}{12 y^2 - 4 h^2}$$

y haciendo transformaciones:

$$\frac{h^2}{y^2} = \frac{12 e_o}{h + 4 e_o}$$

y la sollicitación máxima para una excentricidad relativa $\frac{e_o}{h} < \frac{1}{8}$ será:

$$N = R \cdot b \cdot h \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{h^2}{y^2}\right) = R \cdot b \cdot h \left(1 - \frac{12 e_o}{3 h + 12 e_o}\right) = \\ = \frac{1}{1 + 4 \cdot \frac{e_o}{h}} \cdot R \cdot b \cdot h = \varphi_o \cdot N_o$$

donde:

$$\varphi_o = \frac{1}{1 + 4 \cdot \frac{e_o}{h}} \text{ y } N_o = R \cdot b \cdot h$$

HETEROGENEIDAD DE LA SECCION

Carga centrada

Si debido a la presencia de cavidades o cámaras no se puede admitir la hipótesis de homogeneidad de material en la sección rectangular $b \times h$ deberá hacerse distinción entre la sección neta S_n y la sección bruta $S_b = b \times h$.

Entre estas dos secciones existe una relación que designaremos ρ_s que viene dada por:

$$\rho_s = \frac{S_n}{S_b}$$

y representa el índice de máculo correspondiente a la sección (figura 7)

El valor de la resistencia de la sección será también distinto según que esté referido a la sección neta o a la sección bruta.

Llamando R_n a la resistencia referida a la sección neta y R_b a la resistencia referida a la sección bruta se verifica:

$$\rho_s = \frac{S_n}{S_b} = \frac{R_b}{R_n}$$

El valor máximo de la sollicitación bajo carga centrada y sin pandeo será entonces:

$$\begin{aligned} N_u = N_o &= R_n \cdot S_n = \frac{R_b}{\rho_s} \cdot S_n = \\ &= R_b \cdot \frac{S_n}{\rho_s} = R_b \cdot S_b = R_b \cdot b \cdot h \end{aligned}$$

y el valor máximo de la sollicitación toma la misma forma que para el caso de sección homogénea pero con la resistencia R_b referida a la sección bruta.

Carga excéntrica

En el caso de carga actuando con una excentricidad e , al plantear las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos podremos limitarnos

Fig. 7

Fig. 8

al caso del diagrama rectangular de tensiones ya que éste es el que proporciona la sollicitación máxima más desfavorable.

El diagrama de tensiones se reparte uniformemente sobre el área rayado en la figura que designaremos por $S(y)$ que es función de la profundidad y de dicho diagrama y que presenta su centro de gravedad en un punto G definido por su distancia e_g al eje de la sección (figura 8).

Esta distancia e_g viene dada por la relación entre el valor del momento estático $M(y)$ de la sección comprimida y el área $S(y)$ de esta misma sección:

$$e_g = \frac{M(y)}{S(y)}$$

Las ecuaciones de equilibrio, planteadas con la resistencia referida a la sección neta R_n quedarán entonces de la forma:

$$N = R_n \cdot S(y)$$

$$M = N \cdot e = R_n \cdot S(y) \cdot e_g = R_n \cdot S(y) \cdot \frac{M(y)}{S(y)}$$

dividiendo la segunda de estas ecuaciones entre la primera obtenemos una relación entre la excentricidad de carga e y la profundidad de la

zona comprimida y , que de un modo general viene dada por:

$$e = \frac{M(y)}{S(y)} = e_g$$

De aquí se podría obtener, para cada configuración geométrica de la sección la profundidad y en función de la excentricidad relativa de carga:

$$y = f\left(\frac{e}{h}\right)$$

y de la ecuación de equilibrio de cargas obtendríamos la sollicitación máxima:

$$N_u = R_n \cdot S(y) \quad (1)$$

que con el diagrama de cálculo adoptado constituye la expresión teórica exacta, pero que resulta incómoda de aplicación por la necesidad de determinar previamente la profundidad y de la zona comprimida y el área $S(y)$ correspondiente para cada excentricidad.

Si la resistencia está referida a la sección bruta, es decir, si en vez de R_n se toma R_b , el valor de la sollicitación máxima puede quedar definido por la misma expresión que para el caso de material homogéneo, es decir:

$$N_u = \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{h}\right) \cdot R_b \cdot b \cdot h \quad (2)$$

pero esta fórmula sólo sería aplicable en el caso de que el valor obtenido para N_u no superase al determinado mediante la fórmula teórica exacta (1).

Es decir, para poder aplicar la fórmula (2) deberá verificarse:

$$R_n \cdot S(y) \geq \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{h}\right) \cdot R_b \cdot b \cdot h$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} S(y) &\geq \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{h}\right) \cdot \frac{R_b}{R_n} \cdot b \cdot h = \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{h}\right) \cdot \rho_s \cdot b \cdot h = \\ &= \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{h}\right) \cdot S_n = \left(1 - 2 \cdot \frac{M(y)}{h \cdot S(y)}\right) \cdot S_n \end{aligned} \quad (3)$$

la igualdad entre el primer miembro y el último de esta ecuación se verifica siempre que el material se encuentre uniformemente distribuido en la sección y en particular cuando el material se encuentre repartido de manera homogénea en la sección $\rho_s \cdot b \cdot h$ representada en la figura.

Puede comprobarse, sin embargo, que para elementos resistentes con una hilera de cavidades centrada en el eje de la pieza, la expresión del último miembro de (3) se mantiene inferior a $S(y)$ cualquiera que sea el volumen de cavidades, es decir cualquiera que sea el valor de la relación $\rho_s = S_n/S_b$ entre la sección neta y la sección bruta.

Fig. 9

A continuación se efectúa dicha comprobación.

Para ello puede considerarse que el material se encuentra distribuido en dos zonas contiguas a las fibras extremas de la sección según se representa en la figura 10 con espesores de valor $\frac{\rho_s \cdot h}{2}$ y longitud b . La anchura de la cámara o cavidad interior será entonces:

$$(1 - \rho_s) \cdot h$$

Para una profundidad y de la zona comprimida, el área $S(y)$ de dicha zona comprimida y el momento estático de la sección serán:

$$\begin{aligned} S(y) &= b \cdot y - b \cdot (1 - \rho_s) \cdot h \\ M(y) &= (b \cdot h - b \cdot y) \cdot \frac{y}{2} \end{aligned}$$

y dividiendo la segunda de estas expresiones entre la primera:

$$\frac{M(y)}{S(y)} = \frac{(h - y) \cdot \frac{y}{2}}{y - (1 - \rho_s) \cdot h}$$

Llamando S_r a la expresión del último miembro de (3) y sustituyendo en ella los valores obtenidos para $S(y)$ y $M(y)$ tenemos:

$$\begin{aligned} S_r &= S_n \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{M(y)}{h \cdot S(y)}\right) = \\ &= S_n \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{(h - y) \cdot \frac{y}{2}}{h \cdot (y - (1 - \rho_s) \cdot h)}\right) = \end{aligned}$$

$$= \rho_s \cdot b \cdot h \left(1 - \frac{(h-y) \cdot y}{h \cdot (y - (1-\rho_s) \cdot h)} \right) =$$

$$= \rho_s \cdot b \cdot h - \frac{\rho_s \cdot b \cdot y(h-y)}{y - (1-\rho_s) \cdot h}$$

entonces la diferencia entre $S(y)$ y S_r es:

$$\begin{aligned} S(y) - S_r &= b \cdot y - b \cdot (1 - \rho_s) \cdot h - \rho_s \cdot b \cdot h + \\ &+ \frac{\rho_s \cdot b \cdot y(h-y)}{y - (1-\rho_s) \cdot h} = b \cdot y - b \cdot h + \frac{\rho_s \cdot b \cdot y(h-y)}{y - (1-\rho_s) \cdot h} = \\ &= b \cdot \frac{\rho_s \cdot y(h-y) - (h-y)(y - (1-\rho_s) \cdot h)}{y - (1-\rho_s) \cdot h} = \\ &= b \cdot \frac{(h-y)(\rho_s \cdot y - y + (1-\rho_s) \cdot h)}{y - (1-\rho_s) \cdot h} = \\ &= b \cdot \frac{(h-y)((h-y) - \rho_s(h-y))}{y - (1-\rho_s) \cdot h} = \\ &= b \cdot \frac{(h-y)^2 \cdot (1-\rho_s)}{y - (1-\rho_s) \cdot h} \end{aligned}$$

para valores de y comprendidos entre h y $h - \frac{\rho_s \cdot h}{2}$ la anterior expresión es positiva cual-

Fig. 10

quiera que sea el valor de ρ_s que no puede ser superior a 1, luego:

$$S(y) > S_r = S_n \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{M(y)}{h \cdot S(y)} \right)$$

es decir, sólo trabaja la zona de material más próxima al borde más comprimido:

$$(0 < y \leq \frac{\rho_s \cdot h}{2})$$

y es como si se tratase de una sección maciza.

Si $y \leq h - \frac{\rho_s \cdot h}{2}$ entonces para el centro de gravedad de la zona comprimida se tiene:

$$e_g = \frac{M(y)}{S(y)} \geq \frac{h}{2} - \frac{\rho_s \cdot h}{4}$$

En cualquier caso:

$$S(y) \geq S_n \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{M(y)}{h \cdot S(y)} \right)$$

Y por lo tanto:

$$R_n \cdot S(y) \geq \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{h} \right) \cdot R_b \cdot b \cdot l$$

cualquiera que sea el valor de ρ_s o el volumen de cavidades.

Para elementos de obra de fábrica resistentes con una hilera de cavidades centrada en el eje de la sección, se verifica entonces:

$$N_u \geq \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{h} \right) \cdot N_0$$

y puede utilizarse en el cálculo la expresión del segundo miembro que queda del lado de la seguridad.

Esta expresión puede generalizarse a otros casos de mayor número de hileras de cavidades siempre que el material se encuentre distribuido de manera homogénea a ambos lados del eje de la sección. Por ejemplo, si los espesores de los distintos tabiques que componen el elemento resistente y las distancias entre ellos se mantienen iguales.

Sección resistente homogénea equivalente

La posibilidad de extender la aplicación de las expresiones obtenidas en el caso de sección homogénea a las secciones heterogéneas indicadas en el apartado anterior, cualquiera que sea el valor de la relación sección neta/sección bruta, y quedando en todos los casos del lado de la seguridad, permite obtener valores aproximados de la sollicitación resistente o de agotamiento bajo una determinada excentricidad en aquellas obras de fábrica de sección heterogénea en las que no sea viable la aplicación de la fórmula ge-

neral aludida en las consideraciones generales de cálculo, y permite efectuar los cálculos de las mismas a partir de las características de una sección homogénea equivalente, como habitualmente se realizaría con secciones homogéneas.

A efectos de determinación de la sollicitación resistente, las características geométricas y mecánicas de la sección resistente homogénea equivalente a una sección rectangular con una hilera de cavidades centrada en el eje, pueden quedar suficientemente definidas de una forma simple por su sección bruta S_b obtenida a partir de las dimensiones nominales $b \times h$ de la pieza, por la relación ρ_s entre la sección neta y la sección bruta, y por la resistencia nominal o garantizada R_b obtenida a partir de la carga de rotura bajo compresión centrada y referida también a la sección bruta.

Las características de la sección homogénea equivalente son entonces:

– Área de la sección resistente:

$$S_b = b \times h$$

– Relación sección neta/sección bruta:

$$\rho_s = \frac{S_n}{S_b}$$

– Resistencia nominal:

$$R_b = \frac{N_o}{S_b} = \frac{N_o}{b \times h} = \frac{N_o}{S_n / \rho_s} = \rho_s \cdot R_n$$

Teniendo en cuenta esta relación entre la resistencia R_b referida a la sección bruta y la resistencia R_n referida a la sección neta, puede quedar determinado también, el módulo de deformación del material convencional correspondiente a la sección homogénea equivalente a partir del módulo de deformación E_{cm} del material constituyente y de la relación ρ_s entre la sección neta y la sección bruta mediante la expresión:

$$E_{equiv.} = \rho_s \cdot E_{cm}$$

lo cual se justifica también más adelante en las consideraciones sobre la deformabilidad.

Control de las características de la sección homogénea equivalente

El establecimiento en norma de unos valores tipificados para las dimensiones básicas y para la resistencia, con las correspondientes tolerancias y limitaciones, y la posibilidad de adaptar a ellos tanto los valores especificados o de proyecto como los valores mínimos garantizados o valores nominales, permiten ejercer un control tanto de la sección resistente como de la resistencia mecánica mediante determinaciones en laboratorio.

El valor de la relación sección neta/sección bruta que permite efectuar los estudios de resistencia sobre una sección homogénea equivalente, puede controlarse también mediante determinaciones en laboratorio a partir de la relación ρ_d entre la densidad aparente d_b de la pieza o elemento componente, y la densidad d_m del material constitutivo.

En efecto, llamando M a la masa de la pieza y V_b y V_m al volumen aparente de la pieza o bloque y al volumen del material constitutivo o parte maciza de la misma respectivamente, tenemos:

$$\rho_d = \frac{d_b}{d_m} = \frac{M/V_b}{M/V_m} = \frac{V_m}{V_b} = \rho_v$$

y si se considera, para simplificar, que las cavidades son pasantes y de superficie paralela a las paredes exteriores de la pieza, tenemos:

$$\rho_d = \frac{V_m}{V_b} = \frac{S_n \cdot h}{S_b \cdot h} = \frac{S_n}{S_b} = \rho_s$$

es decir, la relación ρ_s entre la sección neta y la sección bruta es igual a la relación de densidades y los valores de la densidad pueden determinarse en laboratorio.

Para un caso más general que abarque cavidades no pasantes, existe también la posibilidad de control de ρ_s a partir del conocimiento de la relación de densidades ρ_d o de volúmenes ρ_v y del espesor o del fondo ciego.

Para ello, puede considerarse también que la superficie de las cavidades es paralela a los paramentos exteriores, con lo cual se tiene:

Fig. 11

$$\begin{aligned} \rho_d = \rho_v = \frac{V_m}{V_b} &= \frac{S_n \cdot h + (S_b - S_n) \cdot e}{S_b \cdot h} = \\ &= \rho_s + (1 - \rho_s) \cdot \frac{e}{h} = \rho_s \cdot \left(1 - \frac{e}{h}\right) + \frac{e}{h} \end{aligned}$$

y despejando ρ_s de la expresión anterior queda:

$$\rho_s = \frac{h \cdot \rho_d - e}{h - e}$$

que nos permite efectuar un control de la relación de secciones a partir del conocimiento de la relación de densidades.

Si no existe el fondo ciego, resulta $e = 0$ y entonces: $\rho_s = \rho_d$

Resistencia mínima de los elementos compo- nentes referida a la sección neta

Para un mismo valor de la resistencia nominal o resistencia característica mínima garantizada referida a la sección bruta, la calidad del material es muy distinta según el valor de la relación sección neta/sección bruta.

Es necesario, por lo tanto, establecer una limitación para la resistencia de la pieza referida a su sección neta y ejercer el consiguiente control sobre dicha resistencia.

El valor de dicha resistencia R_n puede obtenerse a partir de la resistencia nominal R_b y de la relación ρ_s entre la sección neta y la sección bruta, según se indica a continuación:

$$R_n = \frac{R_b}{\rho_s}$$

y tanto el valor de R_b como el de ρ_s pueden obtenerse mediante determinaciones experimentales en laboratorio según ha sido ya indicado en el apartado anterior.

Para elementos prefabricados de hormigón o bloques, la resistencia R_n referida a la sección neta es del mismo orden de magnitud que la resistencia propia del hormigón obtenida a partir de resultados de ensayos de rotura de probetas cilíndricas de 15×30 cm y puede considerarse semejante a los valores obtenidos a partir de estas probetas.

Estando ya establecida una limitación en el valor mínimo de esta resistencia en 125 kg/cm^2 por la Instrucción de hormigón vigente, puede adoptarse convencionalmente el mismo valor como límite inferior de la resistencia R_n referida a la sección neta, con lo que tendremos:

$$R_n = \frac{R_b}{\rho_s} \geq 125 \text{ kg/cm}^2$$

Esta misma limitación en el valor de la resistencia referida a la sección neta, implica una limitación superior en el valor de ρ_s para un valor dado de la resistencia nominal R_b ya que deberá ser:

$$\rho_s \leq \frac{R_b}{125}$$

y de la misma manera, para un valor dado de ρ_s la resistencia nominal referida a la sección bruta deberá verificar la condición:

$$R_b \geq 125 \cdot \rho_s$$

Para elementos ejecutados con otro material distinto que el hormigón normal, el valor de la resistencia mínima exigible puede ser distinto y

habría que determinarlo mediante un estudio experimental adecuado. Sin embargo puede darse una estimación de la resistencia mínima exigible a elementos fabricados con hormigón de árido ligero multiplicando el valor fijado anteriormente por el valor:

$$\left(\frac{d_m}{2400} \right)^2$$

siendo d_m la densidad del material en kg/m^3 .

Deformabilidad

La deformación unitaria que se produce bajo la actuación de las tensiones, es una característica propia de los materiales utilizados que permite conocer el comportamiento mecánico y reológico de los elementos con ellos contruidos, y es determinante del módulo de deformación y de la rigidez que se precisa para el cálculo de las sollicitaciones en aquellos mismos elementos de obra de fábrica.

Las deformaciones unitarias varían dentro de cada sección según la distribución de las tensiones y varían también de una sección a otra. Su conocimiento llevaría a determinar de una forma precisa la forma de la elástica o curva deformada de la directriz de la pieza y por lo tanto las excentricidades de deformación o excentricidades de segundo orden.

En la determinación de estas deformaciones unitarias o acortamientos, intervienen, sin embargo, muy diversas variables y fenómenos de gran complejidad como es la falta de proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones o variación del módulo de deformación en función de la tensión, la fisuración de la obra de fábrica, la fluencia del material, la influencia de la relación entre las cargas susceptibles de una larga duración de aplicación y la carga total, etc.

Por otra parte, para las obras de fábrica el período elástico o de proporcionalidad entre las tensiones y las deformaciones es prácticamente inexistente y en general el comportamiento es poco conocido. Por todo ello, no resulta posible establecer una ley de variación de las deformaciones en función de las tensiones, por lo que en cada caso, para una definición precisa del comportamiento del material serían necesarias determinaciones experimentales en laboratorio y estudios sistematizados.

Para el caso del hormigón normal, existen, sin embargo, diagramas teóricos que representan con gran fidelidad la relación $\sigma - \varepsilon$ en condiciones de servicio que eventualmente podrían extenderse al caso de las obras de fábrica.

En particular, el Código Modelo CEB-FIP y la vigente Instrucción EH - 82 para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado recomiendan, para la determinación de las

deformaciones en el hormigón bajo cargas de corta duración, el empleo de una expresión o función hiperbólica que relaciona la tensión relativa referida a la resistencia a compresión del hormigón σ_c/f_{ck} con la deformación unitaria relativa referida a la deformación máxima en compresión centrada $\eta = \varepsilon_c/\varepsilon_{c1}$, haciendo intervenir un coeficiente k que depende de la relación entre el módulo de deformación longitudinal E_c y un módulo de deformación secante convencional obtenido a partir de la resistencia a compresión del hormigón y de la deformación máxima en compresión centrada.

Dicha expresión o función hiperbólica viene dada por:

$$\frac{\sigma_c}{f_{ck}} = \frac{\eta \cdot k - \eta^2}{1 + (k-2) \cdot \eta}$$

y si se hacen intervenir valores característicos de la resistencia, el valor de k viene dado por:

$$k = 1,1 \cdot \frac{E_{cm}}{f_{ck}/\varepsilon_{c1}}$$

donde E_{cm} o valor medio del módulo de deformación para cargas de corta duración viene dado por:

$$E_{cm} = 9500 (f_{ck} + 8)^{1/3};$$

con f_{ck} y E_{cm} en MPA

o bien por:

$$E_{cm} = 44600 (f_{ck} + 80)^{1/3};$$

$$\text{con } f_{ck} \text{ y } E_{cm} \text{ en kp/cm}^2$$

$$\text{y } \varepsilon_{c1} \text{ toma el valor: } \varepsilon_{c1} = -0,0022$$

la función hiperbólica anterior es válida para valores de ε_c que cumplan la limitación:

$$0 \geq \varepsilon_c \geq \varepsilon_{cu}$$

siendo ε_{cu} la deformación unitaria máxima de la fibra más comprimida, y estando f_{ck} limitado por el valor: $f_{ck} \geq 125 \text{ kp/cm}^2$.

Dado el carácter adimensional de las magnitudes que intervienen en la función hiperbólica, puede generalizarse su aplicación a las obras de fábrica, pero tratándose de secciones heterogéneas o con cavidades, el valor de la resistencia característica puede estar referido a ensayos de compresión realizados sobre los elementos componentes y en este caso debe sustituirse el valor de f_{ck} por la resistencia referida a la sección neta $R_{nk} = R_{bk}/\rho_s$ con lo que el valor de k será:

$$k = 1,1 \cdot \frac{E_{cm}}{R_{nk}/\varepsilon_{c1}} = 1,1 \cdot \frac{\rho_s \cdot E_{cm}}{R_{bk}/\varepsilon_{c1}}$$

con:

$$E_{cm} = 44600 \cdot (R_{nk} + 80)^{1/3} = 44600 \cdot \left(\frac{R_{bk}}{\rho_s} + 80 \right)^{1/3}$$

en kp/cm^2

lo anterior equivale a adoptar un módulo de deformación equivalente, correspondiente a material homogéneo dado por la expresión:

$$E_{equiv.} = \rho_s \cdot E_{cm}$$

con lo que queda justificado el valor adoptado para el módulo de deformación al tratar de las características de la sección homogénea equivalente.

Para elementos prefabricados de hormigón de árido ligero puede darse también una estimación del módulo de deformación longitudinal, multiplicando la expresión dada para E_{cm} por $(\frac{d_m}{2400})^2$ siendo d_m la densidad del material constituyente expresada en kg/m^3 , con lo que queda:

$$E_{lcm} = \left(\frac{d_m}{2400} \right)^2 \cdot E_{cm}$$

y si el material comprende cavidades, puede estimarse igualmente un módulo de deformación equivalente que vendrá dado por:

$$E_{equiv.} = \rho_s \cdot \left(\frac{d_m}{2400} \right)^2 \cdot E_{cm}$$

Rigidez de las obras de fábrica

La rigidez K de un elemento de obra de fábrica, que se precisa para la determinación de la sollicitación normal actuante y de la excentricidad con que está aplicada, puede obtenerse también a partir de la conocida fórmula de la Resistencia de Materiales:

$$K = \alpha \cdot \frac{E \cdot I}{L}$$

donde α es un coeficiente que tiene en cuenta la forma de vinculación en cada extremo, las características geométricas del elemento o las simplificaciones de cálculo introducidas.

Teniendo en cuenta nuevamente las consideraciones recogidas para secciones heterogéneas, puede hacerse uso también del concepto de sección resistente homogénea equivalente, y concretamente para el caso de sección rectangular $b \times h$ con cavidades homogéneamente distribuidas en el espesor de la pieza, puede introducirse en la expresión de la rigidez el momento de inercia I_b de la sección bruta con tal de que se adopte como módulo de deformación el valor obtenido para el material correspondiente a la sección homogénea equivalente.

Es decir, para dicha sección rectangular con cavidades la rigidez del elemento estructural de obra de fábrica puede determinarse mediante la expresión:

$$K = \alpha \cdot \frac{E_{\text{equiv}} \cdot I_b}{L} = \alpha \cdot \frac{(\rho_s E_{cm}) \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}{L}$$

lo cual podrá utilizarse para deducir los esfuerzos solicitantes y, por lo tanto, para obtener la sollicitación normal actuante y la excentricidad de aplicación de la carga en los extremos de la pieza.

PANDEO DE OBRAS DE FABRICA

Para poder establecer una adecuada comparación entre la sollicitación normal actuante y el valor máximo de la sollicitación normal resistente cuando debido a la esbeltez de la pieza no pueda despreciarse el pandeo, deberá tenerse en cuenta en los cálculos además de la excentricidad de primer orden dada por $e_0 = M/N$, la existencia de una excentricidad accidental debida a posibles inexactitudes geométricas o de ejecución, y la existencia también de la excentricidad adicional de segundo orden debida a la deformación producida en el elemento resistente por el efecto del pandeo (figura 12).

Fig. 12

La excentricidad accidental en obras de fábrica, puede tenerse en cuenta, del mismo modo que en obras de hormigón, estableciendo una limitación o valor mínimo para la excentricidad simple e_0 o excentricidad de primer orden.

Este valor mínimo, puede considerarse, como en el hormigón, igual al mayor de los dos valores siguientes:

$$\frac{h}{20} \text{ y } 2 \text{ cm.}$$

siendo h la dimensión lineal de la sección paralela al plano de pandeo.

No pudiéndose conocer de una manera precisa la forma de la elástica o curva deformada de la directriz en la pieza, la excentricidad máxima de segundo orden e_2 puede determinarse estableciendo unas hipótesis sobre la ley de variación de la deformada de la pieza y teniendo en cuenta las limitaciones establecidas por los estados límites de deformación.

Como ley de variación de la deformada puede admitirse una función senoidal, parabólica, catenaria, etc.

En el presente estudio nos limitaremos a determinar la excentricidad de segundo orden que corresponde a las hipótesis de deformación según la función senoidal y parabólica.

Deformada senoidal

Admitiendo que la ley de variación es senoidal puede venir representada por la función:

$$y = e_2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$$

que toma valor nulo para $x = 0$ y para $x = l$ (longitud total), es decir en los extremos de la pieza, y toma el valor máximo e_2 para $x = l/2$ es decir en el centro de la pieza.

Derivando dos veces esta función y teniendo en cuenta que por tratarse de pequeñas deformaciones la segunda derivada puede considerarse igual a la curvatura $1/r$ en cada punto, tenemos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{r} = -e_2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$$

y para $x = l/2$ resulta:

$$\frac{1}{r} = -e_2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2}$$

de donde:

$$e_2 = -\frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$$

a la misma expresión se llega a partir de la ecuación general de la elástica y de la fórmula de EULER. En efecto, la ecuación general de la elástica toma la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r} = -\frac{M}{EI}$$

y en la sección crítica será:

$$\frac{1}{r} = -\frac{N_{cri} \cdot e_2}{EI}$$

por otra parte, la fórmula de EULER es:

$$N_{cri} = \pi^2 \cdot \frac{EI}{l^2}$$

y sustituyendo este valor de la carga crítica en la ecuación anterior se obtiene:

$$e_2 = -\frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{r}$$

Deformada parabólica

Si se admite que la ley de variación de la deformada es parabólica, se puede representar por la función:

$$y = -4e_2 \cdot \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l} \right)$$

que toma valor nulo para $x = 0$ y para $x = l$, es decir en los extremos de la pieza, y toma el valor máximo e_2 para $x = l/2$ es decir en el centro de la pieza.

Derivando dos veces y teniendo en cuenta que la segunda derivada puede considerarse igual a la curvatura en cada punto, tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{r} = -\frac{8}{l^2} \cdot e_2$$

con la hipótesis adoptada y considerando pequeñas deformaciones, la curvatura es entonces constante a lo largo de la pieza y adopta el mismo valor en todos los puntos dependiendo sólo de la excentricidad máxima e_2 . Despejando esta excentricidad se tiene:

$$e_2 = -\frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{r}$$

A la misma expresión se llega suponiendo que la pieza está sometida a un esfuerzo normal con la misma excentricidad simple e_0 en los dos extremos (excentricidad constante a lo largo de la pieza), hallando la deformada por doble integración de la ley de momentos y particularizando para $x = l/2$.

En efecto, la ley de momentos de primer orden viene dada, entonces, por la expresión:

$$M = N \cdot e_0$$

y la ecuación diferencial de la elástica es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{N \cdot e_0}{EI} = \frac{1}{r}$$

integrando una vez e imponiendo la condición de que la flecha es máxima (primera derivada nula) para $x = l/2$, es decir en el centro de la pieza, tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot x + C_1; \quad -\frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{l}{2} + C_1 = 0$$

y despejando la constante C_1 :

$$C_1 = \frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{l}{2}$$

y entonces:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot x + \frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{l}{2}$$

integrando nuevamente:

$$y = -\frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot x + C_2$$

estableciendo ahora la condición de que para $x = 0$ es $y = 0$ resulta $C_2 = 0$ y la ecuación de la elástica queda de la forma parabólica:

$$y = -\frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot x$$

El valor máximo de la flecha se produce en el centro de la pieza, es decir para $x = l/2$ y viene dado por:

$$e_2 = -\frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{l^2}{8} + \frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{N \cdot e_0}{EI} \cdot \frac{l^2}{8} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{l^2}{8}$$

La excentricidad de segundo orden en función de las deformaciones

Las expresiones obtenidas anteriormente para la excentricidad de segundo orden permiten formular otra expresión en función de las deformaciones unitarias.

Para ello, deben admitirse algunas hipótesis sobre la ley de variación de las deformaciones en cada sección.

Si se admite deformación plana en la sección (figura 13), la deformación o acortamiento que se produce entre dos secciones de un elemento de obra de fábrica situadas a una distancia ds , será, para cada fibra, proporcional a la distancia de la misma a la fibra neutra de deformaciones y en particular para una fibra que experimente una deformación unitaria ε y esté situada a una distancia x_ε de la fibra neutra se tendrá:

$$\varepsilon \cdot ds = x_\varepsilon \cdot d\theta$$

y la curvatura o relación entre el ángulo girado y el arco será entonces:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\epsilon}{x_g} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{h}$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 representan las deformaciones unitarias en las fibras extremas.

Fig. 13

Si se toma como referencia la fibra más comprimida y se representa por ϵ_{cu} la deformación unitaria en agotamiento de dicha fibra y por x la profundidad de la fibra neutra de deformaciones, se tiene:

$$\frac{1}{r} = \frac{\epsilon_{cu}}{x}$$

y la excentricidad de segundo orden será entonces:

$$e_2 = -\frac{1^2}{c} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{1^2}{c} \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{x}$$

siendo c un coeficiente que toma el valor $c = \pi^2$ si se adopta deformada senoidal, y $c = 8$ si se adopta deformada parabólica.

Tanto la deformación unitaria en agotamiento ϵ_{cu} como la profundidad x de la fibra neutra de deformaciones (figura 14), dependen de las características de cada material y de la forma como se distribuyan las deformaciones en la sección. No basta entonces con admitir deformación plana y se precisa conocer estas dos magnitudes.

Sin embargo, para obras de hormigón en masa, la vigente Instrucción EH - 82 recoge una ley de variación de ambas magnitudes en función de la profundidad relativa del diagrama de compresiones.

Para una excentricidad dada e , la profundidad relativa del diagrama de compresiones que designaremos por ν viene dada, para una distribución rectangular uniforme, por la expresión:

$$\nu = \frac{y}{h} = 1 - 2 \cdot \frac{e}{h}$$

y las expresiones que proporcionan la deformación unitaria en agotamiento y la profundidad de la fibra neutra de deformaciones son las siguientes:

- para: $1 \geq \nu \geq 0,8$

$$\epsilon_{cu} = -0,002 - 0,0075(1 - \nu); \quad \frac{x}{h} = \frac{0,20}{1 - \nu}$$

- para: $\nu \leq 0,8$

$$\epsilon_{cu} = -0,0035; \quad \frac{x}{h} = 1,25 \cdot \nu$$

Si se tienen en cuenta ahora las consideraciones recogidas en el apartado referente a la deformabilidad al tratar de secciones heterogéneas o con cavidades, en donde se han adoptado tanto para la resistencia como para el módulo de deformación, los valores correspondientes a la sección resistente homogénea equivalente, las expresiones dadas para las deformaciones unitarias pueden ser aplicables también sin modificación a las secciones de hormigón que comprendan cavidades homogéneamente distribuidas.

Fig. 14

Estado límite de deformación por pandeo

Las limitaciones impuestas en la reglamentación existente para las deformaciones de los muros de obra de fábrica y por lo tanto para la excentricidad de segundo orden, dan lugar a que en muchas ocasiones se alcancen estas deformaciones límite sin haberse alcanzado todavía el agotamiento de la sección.

En este caso, puede efectuarse también una determinación de la sollicitación normal máxima que puede actuar sobre la obra de fábrica sin que se sobrepase el estado límite de deformación, teniendo en cuenta la excentricidad total e_{tot} , obtenida a partir de la excentricidad simple $e_o = M/N$, la excentricidad máxima de segundo orden e_2 y otras excentricidades adicionales e_a que puedan producirse por efecto de las imperfecciones geométricas (*).

La excentricidad total viene dada entonces por:

$$e_{tot} = e_o + e_2 + e_a$$

y la profundidad relativa del diagrama de compresiones puede determinarse según se ha indicado más arriba:

$$\nu = \frac{y}{h} = 1 - 2 \cdot \frac{e_{tot}}{h}$$

conocido este valor puede deducirse también la profundidad relativa x/h de la fibra neutra de deformaciones mediante las expresiones dadas en el apartado anterior, y puede conocerse el valor de x .

Por otra parte, siendo conocida la excentricidad máxima de segundo orden e_2 por las limitaciones

existentes, se puede obtener también la deformación unitaria que corresponde a la fibra más comprimida despejando ε de la fórmula:

$$e_2 = - \frac{l^2}{c} \cdot \frac{\varepsilon}{x}$$

con lo que se tiene:

$$\varepsilon = - \frac{c}{l^2} \cdot e_2 \cdot x$$

y del diagrama $\sigma - \varepsilon$ o de la fórmula que proporciona las tensiones relativas en función de las deformaciones unitarias relativas puede obtenerse la tensión σ o la resistencia R que ha de tenerse en cuenta en la determinación de la sollicitación normal máxima N que puede actuar sin que se sobrepase el estado límite de deformación por pandeo.

En sección rectangular y para una distribución rectangular de tensiones, esta sollicitación normal máxima viene dada por:

$$N_{max.} = \left(1 - 2 \cdot \frac{e_{tot}}{h}\right) \cdot R \cdot b \cdot h$$

(*) Para cubrir las imperfecciones geométricas y a título de seguridad complementaria, el Código Modelo CEB-FIP fija una excentricidad adicional para ser tenida en cuenta en los cálculos que viene dada por el valor:

$$e_a = \frac{l_o}{300} \leq 20 \text{ mm.}$$

siendo l_o la longitud de pandeo evaluada según la teoría de elasticidad lineal.

* * *