

FRACTURA DEL HORMIGÓN: METODOS DE CALCULO NUMERICO (*)

(FRACTURE MECHANICS OF CONCRETE:
NUMERICAL METHODS)

Manuel Elices,
Escuela de Ingenieros de Caminos
Universidad Politécnica de Madrid.

450-17

RESUMEN

Los métodos de la Mecánica de la Fractura empiezan a utilizarse para estudiar la fractura del hormigón y en este artículo se presenta una síntesis del estado del arte. En primer lugar se consideran aquellas situaciones en que es aplicable la Mecánica de la Fractura en régimen elástico y lineal. Cuando la aproximación anterior no es aplicable, los modelos utilizados pueden agruparse en dos grandes familias; los modelos de fisura con cohesión y los modelos de deterioro. De los primeros se comentan los modelos de Hillerborg y de Bazant y de entre los segundos el de Sih. El artículo termina considerando las tres formas en que se pueden generar ecuaciones constitutivas válidas hasta fractura; por vía analítica, experimental o numérica. Dentro de esta última se destaca el "hormigón numérico".

SUMMARY

Nowadays Fracture Mechanics methods can be employed in engineering design to prevent concrete fracture. The paper summarizes the state of the art of this subject. First of all the application of Linear Elastic Fracture Mechanics to concrete is discussed. Whenever this approximation is no longer applicable, cohesive crack models as well as damage models have been proposed. Cohesive models due to Hillerborg and Bazant are commented, as well as the strain energy theory of damage due to Sih. The paper ends with consideration of analytical, experimental and numerical approaches to fracture constitutive equations, underlining the new concept of "numerical concrete".

INTRODUCCION

Las técnicas para el cálculo numérico de estructuras se han desarrollado vigorosamente durante estos últimos años: actualmente es posible calcular estructuras sofisticadas sometidas a complejos estados tensionales, a efectos térmicos o a la acción de un impacto. En paralelo con el desarrollo de las técnicas de cálculo ha surgido la demanda de modelos que caractericen el material de forma más refinada: teniendo en cuenta su comportamiento bajo estados multiaxiales, la influencia del tiempo —como en la fluencia y la relajación—, el deterioro y otros fenómenos.

En relación con el hormigón, resulta cada vez más clara la necesidad de introducir su comportamiento a tracción para poder predecir algunos aspectos de elementos sometidos a flexión o a punzonamiento, o cuando se pretende modelizar la adherencia o el agotamiento. Como el comportamiento a tracción y la fisuración están relacionados, es natural que las técnicas de la Mecánica de la Fractura empiecen a incorporarse en las ecuaciones constitutivas del hormigón. El propósito de este artículo

es presentar un resumen de esta situación —la fractura del hormigón a tracción— y explorar las tendencias futuras.

Al tratar de modelizar una fisura en el hormigón aparecen dos aspectos esenciales: el primero, es la forma de introducirla en la malla de los elementos finitos —ya que este método es el usual para abordar estos problemas— y el segundo aspecto es establecer un criterio para estimar el crecimiento y la dirección de las fisuras.

Al comienzo, hace casi veinte años, las fisuras se modelaron discretamente (Ngo y Scordelis, 1967, Mufti y otros, 1970), es decir, la fisura se formaba al separar los bordes de dos elementos que antes eran comunes. Cuando la dirección de la trayectoria era conocida de antemano se podían prever nudos dobles a lo largo de los elementos que iban a configurar la fisura. Cuando la dirección no se conocía, todos los nudos eran dobles y solamente se desdoblaron los que indicaba el criterio de fractura. Este planteamiento presentó, desde el principio, dos inconvenientes serios: dudas razonables sobre la influencia de la malla en la dirección de las fisuras y un enorme esfuerzo de cálculo que iba aumentando a medida que avanzaba la fisura —al aumentar el número de grados de libertad y la anchura de la matriz de rigidez—. Parte de estos in-

(*) Este trabajo está basado en una comunicación presentada durante el primer Workshop Hispano-Británico de Ecuaciones Constitutivas en Ingeniería Civil, organizado por el CEDEX (MOPU). Madrid, septiembre, 1985 (M. Pastor et al.).

convenientes se superaron introduciendo el concepto de «fisura difusa» por Rashid (1968) y desarrollado por Bazant y sus colaboradores (Bazant, 1985) en forma del modelo de una banda de elementos finitos fisurados (el «crack band model»).

Actualmente, se dispone de algoritmos que, automáticamente, rehacen y refinan la malla en los alrededores del fondo de la fisura para poder acomodar la dirección de crecimiento de acuerdo con el criterio de fractura utilizado y con independencia de las constricciones impuestas por la geometría previa de la malla. En esta línea de trabajo ha destacado A. Ingraffea y sus colaboradores (Sauoma, 1981. Ingraffea y Sauoma, 1985) que han desarrollado potentes métodos de cálculo basados en la interacción y adaptación de los programas durante su ejecución (Perucchio y otros, 1982, Perucchio e Ingraffea, 1983).

El criterio usado inicialmente para decidir la inestabilidad y la dirección de crecimiento de las fisuras no estuvo basado en consideraciones de la Mecánica de la Fractura, sino en simples consideraciones tensionales; se suponía que cuando la tensión en el elemento situado enfrente de la fisura alcanzaba un valor determinado, éste se «rompía» y la fisura avanzaba en la dirección normal a la dirección de la tracción mayor. El éxito relativo de este criterio primitivo puede ser debido a que las estructuras analizadas fueran prácticamente insensibles al criterio utilizado (Bazant y Cedolin, 1979) o a la tenacidad de fractura del hormigón (Ingraffea y Sauoma, 1985).

A medida que se ha ido estudiando con más detalle la rotura de elementos de hormigón se han detectado situaciones donde el criterio tensional no explica satisfactoriamente los resultados experimentales y ha sido preciso recurrir a criterios utilizados en Mecánica de la Fractura; Hillerborg (1985) cita algunos ejemplos de elementos estructurales de hormigón en masa y Carpinteri (1985) necesita utilizar un criterio de fractura, distinto del tensional, para justificar el efecto del tamaño en la carga de rotura (Elices, 1985). No obstante, debido a que el hormigón tiene un proceso de fractura distinto al de los materiales que sirvieron para cimentar la Mecánica de la Fractura, no es de extrañar que todavía existan controversias en cuanto a la aplicación de esta nueva disciplina. Los criterios de fractura en su forma más simple —los que corresponden a la fractura en régimen elástico y lineal— sólo son aplicables al hormigón en casos extremos (grandes dimensiones), y en estas circunstancias han proporcionado resultados satisfactorios. En situaciones normales, incluyendo elementos de hormigón armado, es preciso recurrir a la Mecánica de la Fractura en régimen no lineal e irreversible para estudiar determinados tipos de rotura. Estos criterios, basados en las teorías más recientes de fractura, permiten interpretar muchos resultados experimentales y posiblemente contribuirán, durante la

década de los 80, al asentamiento de la Mecánica de la Fractura aplicada al hormigón.

FRACTURA EN REGIMEN ELASTICO Y LINEAL

Para estudiar la fractura del hormigón a tracción se partirá de la aproximación basada en la fisura discreta y se utilizarán dos modelos: el primero, basado en la Mecánica de la Fractura en régimen elástico y lineal, se tratará a continuación. El segundo, impropriamente llamado no lineal, tiene en cuenta la disipación de energía por microfisuración y el deterioro del hormigón, y será descrito en el siguiente apartado.

Los parámetros que caracterizan la aproximación lineal son los factores de intensidad de tensiones — K_I , K_{II} y K_{III} — y la tenacidad de fractura del material, K_{Ic} (Elices, 1986). En esta aproximación se supone que el tamaño de la región de fractura (process zone) es despreciable frente a la longitud de la fisura y a las dimensiones del elemento estructural que se considera y que el campo tensional en los alrededores del fondo de la fisura varía como $r^{-1/2}$ (donde r es la distancia desde el punto al fondo de la fisura). En estas circunstancias, para conocer las tensiones y deformaciones alrededor de la fisura, basta con el conocimiento de los factores de intensidad de tensiones K . El segundo parámetro, la tenacidad de fractura, es una propiedad del material y su aceptación supone que cuando el factor de intensidad de tensiones alcanza un valor crítico la fisura se propaga de forma inestable. Parece ser que estas dos hipótesis se cumplen de forma aceptable cuando la longitud de las fisuras es de varios metros. Esta circunstancia hace que la aproximación lineal, muy simple, sea atractiva para estudiar el comportamiento de fisuras en estructuras grandes, como las presas, por ejemplo.

El proceso operativo para problemas bidimensionales, descrito con cierto detalle en otro artículo de esta revista (Elices, Llorca e Ingraffea, 1985), consta, en esencia, de los siguientes pasos:

1. Cálculo de los factores de intensidad de tensiones

El primer paso consiste en el cálculo de los factores de intensidad de tensiones necesarios para poder estudiar la estabilidad y el crecimiento de la fisura. Este cálculo se realiza a partir del conocimiento de los desplazamientos (u , v) según la siguiente expresión (Ingraffea y Manu, 1978):

$$K_I = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{G}{(\kappa + 1)} [4(v_B - v_D) + v_E - v_C] \quad (1a)$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \frac{G}{(\kappa + 1)} [4(u_B - u_D) + u_E - u_C] \quad (1b)$$

donde, G es el módulo de rigidez transversal, $\kappa = 3 - 4\nu$ para deformación plana y $(3 - \nu) / (1 + \nu)$ para tensión plana, ν es el coeficiente de Poisson y las características geométricas se indican en la figura 1.

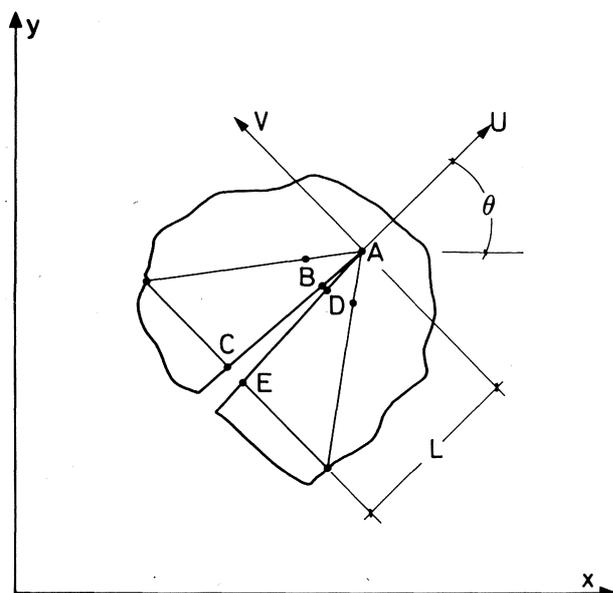


Fig. 1.—Elementos singulares que rodean el fondo de una fisura y notación utilizada.

La precisión de los factores de intensidad de tensiones es función de la bondad de la solución obtenida para los desplazamientos cerca del fondo de la fisura. Al principio la precisión se mejoraba usando fuerza bruta, es decir, aumentando el número de los elementos finitos —que eran triángulos en los que la deformación era constante— y refinando la malla alrededor del fondo de la fisura. Actualmente, se incorpora en los elementos finitos la forma cómo varían los desplazamientos en esta región, que es proporcional a $r^{1/2}$. En la práctica se utilizan elementos con distintas geometrías, pero lo más cómodo es utilizar triángulos isoparamétricos con nudos situados a una cuarta parte (Barsoun, 1976; Freese, C. E. y Tracey, 1976; Astiz, 1986).

2. Estudio de la estabilidad de la fisura

En este paso se determina si la fisura puede crecer o no y en el caso de que crezca la dirección que tomará.

Para fisuras sometidas a estados biaxiales, donde la dirección de propagación puede ser distinta de la

dirección inicial, se han formulado varios criterios de inestabilidad que predicen la carga crítica y la dirección de propagación (análogamente al planeamiento plástico donde se pueden usar los criterios de plastificación de Mises o de Tresca). Los criterios más aceptados están basados en la tensión circunferencial máxima (Erdogan y Sih, 1963), en la variación de la densidad de la energía almacenada por deformación (Sih, 1973) y en la generalización del criterio clásico de la tasa de liberación de energía (citado por primera vez por Erdogan y Sih, 1963).

El criterio de la tensión circunferencial máxima (Fig. 1) supone que la fisura se inicie en el plano normal a la dirección de la σ_θ máxima y que la propagación empiece cuando σ_θ (máx) $\sqrt{2\pi r}$ alcanza un valor crítico, K_{Ic} , que se supone es una propiedad del material. La dirección de propagación, θ_0 , viene dada por:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (2)$$

y la inestabilidad se inicia cuando se cumple:

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0 \right) = K_{Ic} \quad (3)$$

El criterio basado en la densidad de energía supone que el parámetro característico es el factor densidad de energía de deformación, S , definido así:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S}{r} \quad (4)$$

donde dW/dV es la densidad de energía debida a la deformación y r es la distancia desde el fondo de la fisura al lugar donde se evalúa dW/dV (ver, por ejemplo Sih, 1974). En este criterio, la dirección de propagación de la fisura es aquella que minimiza a S , es decir, el valor de θ para el que:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (5)$$

y la inestabilidad se supone que se inicia cuando el valor mínimo de S alcanza un valor crítico, S_{cr} , que es una propiedad del material.

Por último, el criterio basado en la tasa de liberación de energía G (para la definición ver, por ejemplo, Elices, 1986), estipula que la fisura se propaga en la dirección θ_0 para la cual $G(\theta)$ es máxima e inicia su propagación cuando se alcanza un valor crítico, G_c , es decir, cuando:

$$\text{Máx } G(\theta) = G_c \quad (6)$$

Las tres teorías coinciden cuando la grieta se propaga en la dirección inicial, es decir, cuando $\theta_0 = 0$.

En esta circunstancia se puede establecer una relación entre los parámetros característicos del material K_{Ic} , S_{cr} y G_c .

Si la fisura es inestable, según el criterio elegido, se continúa con el paso siguiente. Si es estable, es preciso aumentar la carga y estudiar otra vez la estabilidad.

3. Propagación de la fisura

Cuando se alcanzan las condiciones críticas, la fisura inicia la propagación y ésta continúa mientras disponga de suficiente energía para ello. En estructuras frágiles, determinados tipos de sollicitación proporcionan suficiente energía para que, una vez iniciada la fisuración, se propague inestablemente hasta la rotura final (Fig. 2a), mientras que para otros tipos de sollicitación (Fig. 2b) el crecimiento es estable y para que la fisura avance es preciso ir incrementando la carga.

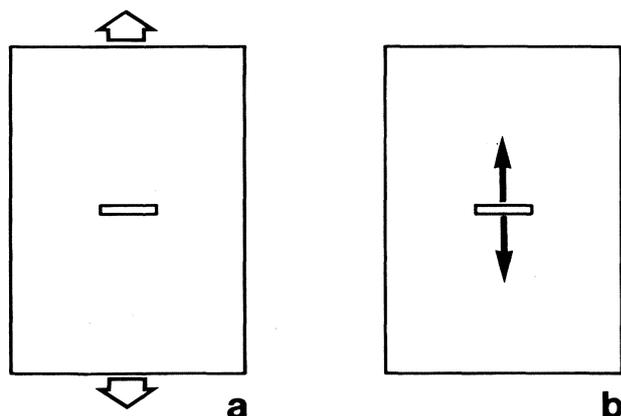


Fig. 2.—La estabilidad del crecimiento de una fisura puede depender del tipo de sollicitación. En a el crecimiento es inestable y en b puede ser estable.

El estudio de la propagación se suele plantear de dos formas alternativas: calculando el incremento (positivo o negativo) de carga necesario para que la fisura avance una longitud prefijada, o bien, dando una variación a la carga, calculando el avance de la fisura. Esta etapa de cálculo es delicada y se han desarrollado programas que rehacen y refinan automáticamente la malla en los alrededores del fondo de la fisura (ver, por ejemplo, Blandford y otros, 1981).

Las etapas 1, 2 y 3 se repiten hasta que el elemento estructural se rompe o bien hasta que la fisura se detiene.

La aplicabilidad y las ventajas de esta aproximación han quedado patentes en el ejemplo, ya clásico, de la presa de Fontana, que se describe con cierto detalle en otro artículo de esta revista (Elices, Llorca e Ingrassia, 1985). A continuación sólo se comentan algunos resultados relacionados con el método que se acaba de esbozar.

En 1972 se observó una enorme grieta en la presa de gravedad de Fontana, Tennessee (ver Sloan y Abraham, 1978). La fisura se iniciaba en el paramento de aguas abajo, interceptaba una galería de servicio y se prolongaba hacia la cimentación, como muestra la figura 3. Diversos estudios indicaron que el agrietamiento podía ser debido a la acción conjunta de la dilatación térmica y la presencia de un hormigón expansivo.

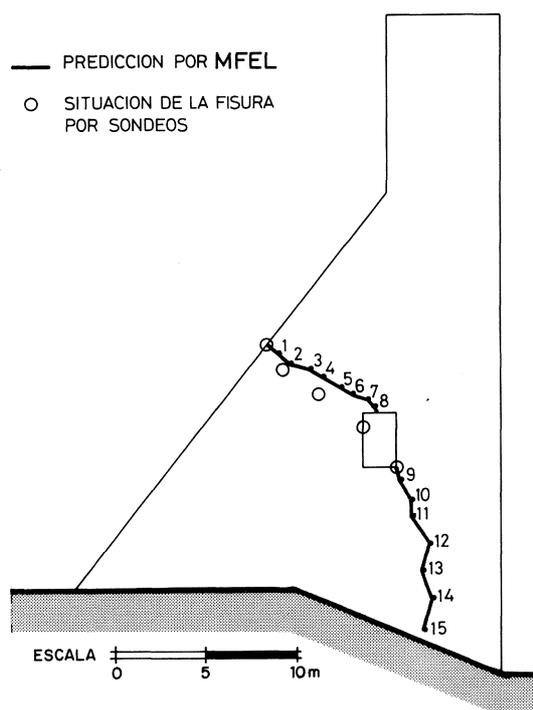


Fig. 3.—Sección transversal de la presa de Fontana y situación de la grieta.

Entre los objetivos del estudio figuraba la predicción de la trayectoria de la grieta después de atravesar la galería de servicio, ya que esta información era difícil obtenerla mediante sondeos. Las dimensiones de la estructura y el tamaño de la fisura aconsejaron utilizar la aproximación lineal y el problema se simplificó, aún más, por la naturaleza de la presa que permitió un estudio bidimensional.

La propagación de la fisura se estudió siguiendo los pasos señalados anteriormente y los resultados teóricos coincidieron bastante bien con los resultados a partir de sondeos en la región entre el paramento de aguas abajo y la galería. Esta coincidencia avaló, en cierto modo, las predicciones a partir de la galería indicando que la grieta se dirigía hacia la cimentación y no hacia la base del paramento de aguas arriba, como se muestra en la figura 3. Conviene mencionar que en este estudio se utilizaron los tres criterios de inestabilidad que se acaban de resumir y que los resultados —en cuanto a la dirección θ_0 — fueron prácticamente los mismos, como se comenta en el apartado que viene a continuación.

MODELOS DE FRACTURA MAS REALISTAS

Cuando la región donde se inician los procesos de fractura no es despreciable, en comparación con el tamaño de la grieta, la aproximación elástica no es aplicable, entre otras razones, porque la distribución de tensiones alrededor del fondo de la fisura ya no puede describirse mediante los factores de intensidad de tensiones u otros parámetros equivalentes. Además, en estas circunstancias, la disipación de energía por microfisuración del hormigón no es despreciable y no es posible incorporarla dentro del modelo elástico porque esta energía depende de la historia de cargas. Todo ello obliga al abandono de los métodos de la Mecánica de la Fractura en régimen elástico y a modelizar la fractura del hormigón de una forma más realista.

Parece obvio que la fractura en el hormigón está ligada al comportamiento de este material en tracción. Los ensayos realizados en los laboratorios indican que la respuesta del hormigón solicitado a tracción está controlada por la formación de microfisuras, que inicialmente se forman en toda la probeta hasta que en una región las tracciones alcanzan un determinado valor f_t . A partir de este instante la deformación debida a las microfisuras se localiza en una banda (Fig. 4), que es la región de fractura que precede a la formación de la macrogrieta.

Ahora, para describir el comportamiento del elemento estructural hacen falta dos tipos de ecuaciones constitutivas, como muestra la figura 4; uno para el material «sano» situado fuera de la región de fractura y otro para el material «deteriorado». El resto de este apartado se dedica a revisar las tendencias actuales para caracterizar este material deteriorado, agrupadas en dos escuelas; una se basa en los modelos unidimensionales de zona cohesiva, desarrollados inicialmente para incluir la plastificación en el fondo de la fisura (Dugdale, 1960, Barenblatt, 1962, Bilby y otros, 1963) y que podemos agrupar bajo el nombre de modelos de fisura con cohesión (o modelos de «fisura ficticia» como los

llaman algunos autores de habla inglesa) y la otra escuela, promovida y alentada por G. C. Sih, se basa en una generalización del criterio de la densidad de energía de deformación (Sih, 1984, Sih, 1985).

Modelos de fisura con cohesión

Las fisuras con una zona cohesiva se introdujeron para evitar la singularidad que aparece en la aproximación elástica-lineal, en ella la distribución de tensiones es del tipo indicado en la figura 4, donde se ha supuesto que la máxima tracción permisible es f_t . La región comprendida entre este valor y el fondo de la fisura es la zona cohesiva, donde el material todavía es capaz de ejercer una cierta cohesión, aún habiendo superado la deformación correspondiente al valor de f_t . Para más detalles véanse, por ejemplo, los artículos de Bazant (1985) y de Hillerborg (1985).

Una característica de los modelos de fisura cohesiva es la suposición de que la energía de fractura G_F —es decir, la energía necesaria para crear una unidad de área de fisura—, es una propiedad del material. Este parámetro, que desgraciadamente se interpreta de distintas formas por otros autores, se analiza con detalle en otro artículo de esta revista (Planas y Elices 1985b). El valor de G_F es proporcional al área encerrada por la curva $\sigma - \epsilon^f$, donde ϵ^f es la deformación correspondiente a la fisura como se indica en la figura 5*. Se ha comprobado numéricamente que los modelos de fisura cohesiva son sensibles, no sólo al valor de G_F , sino a la forma de la curva $\sigma - \epsilon^f$, como se comenta a continuación. Por consiguiente es preciso especificar tres parámetros, G_F , f_t y la forma de curva, para describir el comportamiento en modo I de la fisura cohesiva.

En estos modelos la deformación en la región de fractura se estudia, como ya se ha indicado, suponiendo dos contribuciones, la deformación del hormigón entre las microfisuras y la deformación por abertura de las microfisuras (Fig. 5).

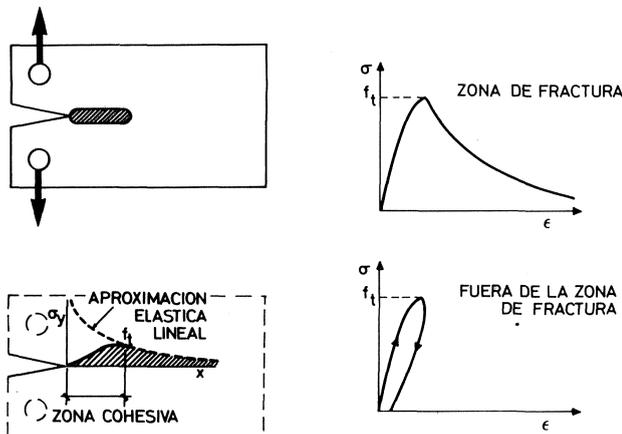


Fig. 4.—Probeta de hormigón con una región microfisurada. Comportamiento del hormigón ($\sigma - \epsilon$) en la región microfisurada y fuera de ella.

— La deformación debida al hormigón, ϵ^h , suele considerarse elástica y lineal, basándose en que los pocos resultados experimentales disponibles así lo indican, y, además, porque las tensiones que se alcanzan en esta zona suelen ser pequeñas en comparación con la resistencia a compresión del hormigón. No obstante la introducción de una región no lineal podría explicar algunos resultados experimentales en la medida de la energía de fractura (Planas y Elices, 1985a).

(*) Nótese que cuando se considere una banda fisurada, como en el modelo de Bazant, ϵ^f es la deformación correspondiente a la anchura de la banda, mientras que cuando se considera una fisura, como en el modelo de Hillerborg, ϵ^f debe sustituirse por un desplazamiento w . Estos aspectos deben consultarse en las referencias citadas ya que el propósito de este artículo es dar una visión panorámica de la fractura aplicada al hormigón y no una descripción detallada de estos modelos.

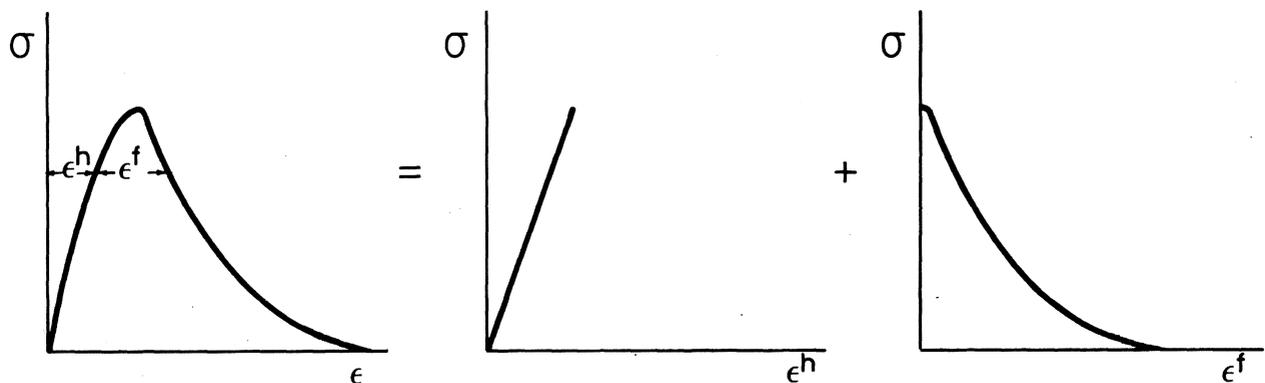


Fig. 5.—La deformación en la región de fractura se modeliza suponiendo dos contribuciones: $\epsilon = \epsilon^h + \epsilon^f$. ϵ^h es la deformación del hormigón entre las microfisuras. ϵ^f es la deformación por abertura de las microfisuras.

— La deformación debida a las microfisuras se indica mediante ϵ^f . Esta contribución actúa sobre una banda estrecha, que es la anchura de la zona de fractura. En algunos modelos la anchura es infinitesimal (Hillerborg, 1985, Ingraffea y Sauoma, 1985) y en otros es la correspondiente al tamaño del elemento finito (Bazant, 1985). En este último caso ϵ^f depende del tamaño de la malla y para evitar este inconveniente y conseguir que el modelo sea objetivo se han adoptado diversas soluciones, como propone Bazant en el trabajo citado, ajustando de forma adecuada la relación $\sigma - \epsilon^f$ para que la energía de fractura se mantenga constante.

A continuación se resume, de forma esquemática, uno de los modelos más completos de fisura cohesiva (para más detalles ver Rots y otros, 1985). La hipótesis más característica de este modelo es la separación del campo de deformaciones, $\Delta \epsilon$, en dos contribuciones: la del hormigón $\Delta \epsilon^h$ y la de la fisura $\Delta \epsilon^f$:

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^h + \Delta \epsilon^f \quad (7)$$

Esta distinción permite tratar por separado el hormigón «sano» entre las fisuras y el hormigón que se ha «deteriorado» y que está representado mediante la región de fractura o por la interfase de la fisura.

Para el hormigón «sano» podemos escribir:

$$\Delta \sigma = D^h \Delta \epsilon^h = D^h \Delta \epsilon \quad (8)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\Delta \epsilon^f = 0 \cdot D^h$ es la matriz de rigidez adecuada y, en principio, podría incluir plasticidad, fluencia u otros fenómenos, aunque en la práctica, como ya se ha indicado, suele suponerse un comportamiento elástico y lineal.

Para el hormigón «deteriorado» se supone que:

$$\Delta s^f = D^f \Delta \epsilon^f \quad (9)$$

donde se ha utilizado la notación (s^f , ϵ^f) para las tensiones y deformaciones con relación a un sistema de referencia local ligado a la fisura, como indica la figura 6 (en este resumen se supone la presencia de una sola fisura pero el modelo es generalizable a un elemento con un sistema de fisuras). Las deformaciones locales ϵ^f y γ^f son los desplazamientos COD (Crack Opening Displacement) y CSD (Crack Sliding Displacement) utilizados en la Mecánica de la Fractura y que también se han indicado en la figura 6.

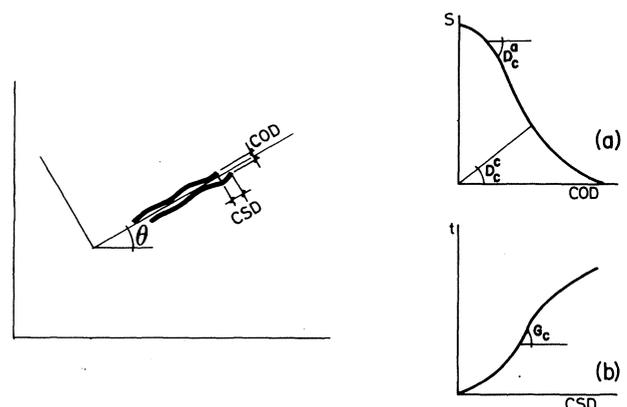


Fig. 6.—Sistemas de referencia global y local. Relación entre tensiones y deformaciones locales.

La relación entre las tensiones y deformaciones locales y globales puede establecerse mediante la correspondiente matriz de la transformación, es decir:

$$\Delta \epsilon^f = N \Delta \epsilon \quad \text{y} \quad \Delta s^f = N^T \Delta \sigma \quad (10)$$

La matriz de rigidez D^f para el material deteriorado se define así:

$$D^f = \begin{vmatrix} D_c & 0 \\ 0 & G_c \end{vmatrix} \quad (11)$$

donde $D_c = D_c^a < 0$, cuando la fisura se abre y $D_c = D_c^c > 0$ cuando está cerrada. Ambos módulos se indican también en la figura 6, junto con el módulo tangencial G_c . Idealmente, las curvas indicadas en la figura 6 deberían obtenerse a partir de ensayos directos de tracción y de esfuerzo cortante, pero en la práctica estos ensayos son muy difíciles de realizar y se utiliza una recta, o a lo sumo un diagrama bilineal para la curva de tracción directa. Por otra parte, la hipótesis de que los términos no diagonales de la ecuación (11) sean nulos, implica que no existe interacción entre la transferencia de carga en las direcciones normal y transversal a la fisura.

Esta hipótesis está justificada cuando la rotura se produce con predominio del modo I; en otras circunstancias deberían tenerse en cuenta estos términos que, en principio, pueden incorporarse en D^f . La influencia de los términos no diagonales en roturas en modo mixto, así como la búsqueda de expresiones más realistas para G_c , son actualmente objetivos prioritarios para los investigadores en este campo.

Las relaciones tensión-deformación para el hormigón fisurado pueden obtenerse a partir de (8) y (7),

$$\Delta\sigma = D^h \Delta\varepsilon^h = D^h (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^f)$$

Esta ecuación se puede transformar teniendo en cuenta (9) y (10) y al final se llega a:

$$\Delta\sigma = [D^h - D^h N (D^f + N^T D^h N)^{-1} N^T D^h] \Delta\varepsilon \quad (12)$$

que relaciona las tensiones globales con las deformaciones globales y muestra que la rigidez del hormigón fisurado es menor que la del hormigón sano, D^h .

Entre los modelos de fisura con cohesión, el modelo de la fisura difusa, debido a Bazant (ver un resumen en Bazant, 1985), es uno de los más utilizados y por este motivo es deseable comprobar cómo está relacionado con la expresión (12) que, en principio, es muy general. Este ejercicio lo han realizado los autores del trabajo que se ha resumido (Rots y otros, 1985), y han comprobado que ambas relaciones $\Delta\sigma - \Delta\varepsilon$ son equivalentes cuando se considera una sola fisura, los términos no diagonales de (11) son nulos y se supone que el hormigón sano se comporta de forma elástica y lineal. Como estas condiciones se suponen con frecuencia —como en los ejemplos que se comentan a continuación— ambos modelos, el de Bazant y el descrito, son equivalentes y solamente cuando alguna de ellas no se cumple, este modelo resulta ventajoso.

Vamos a concluir este resumen contrastando algunos resultados experimentales clásicos con las predicciones teóricas del modelo descrito. Cuando la rotura se produce en el modo I la concordancia es excelente, tanto en los valores de la carga máxima como en la región de descarga.

El primer ejemplo está basado en los resultados de Petersson (1981) que ensayó y analizó vigas entalladas de hormigón sin armar. Los detalles de la experimentación y del cálculo se pueden consultar en la referencia citada y en el trabajo de Rots (1983). El resultado final se ha resumido en la figura 7, en la que se ha dibujado la viga, el tipo de sollicitación (tanto el ensayo como el cálculo se han hecho controlando el desplazamiento en el centro de la viga), y los resultados experimentales y numéricos de la carga en función del desplazamiento.

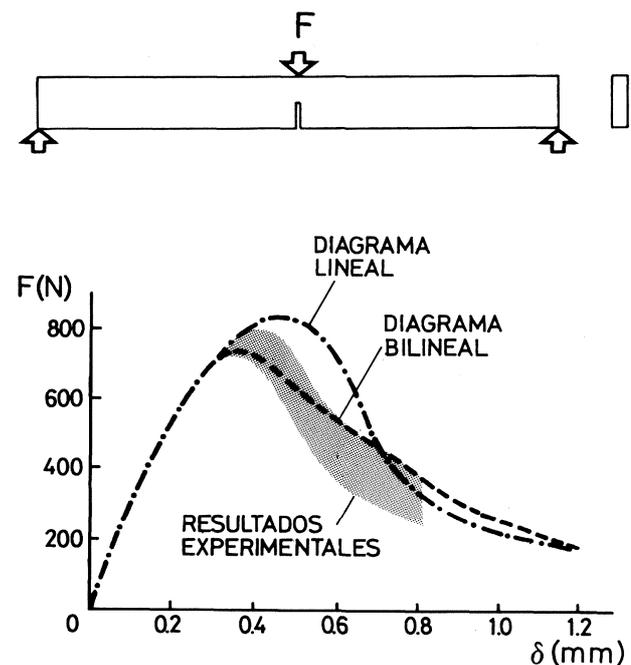


Fig. 7.—Predicción teórica (Rots, 1983) y resultados experimentales (Petersson, 1981) para una viga entallada de hormigón.

Petersson estimó un valor de la energía de fractura, G_F , de 124 N/m (este valor es proporcional al área encerrada por la curva 6a). Manteniendo este valor se han hecho cálculos con dos tipos de diagramas, uno lineal y otro bilineal. Ambos resultados se indican en la figura 7, que muestra que la aproximación bilineal se acerca a los resultados experimentales.

Para el segundo ejemplo se han utilizado los resultados de Sok, Barón y Francois (1979), que ensayaron dos vigas en voladizo con sus extremos empotrados, geometría usada frecuentemente en Mecánica de la Fractura porque el ligamento que queda detrás de la entalla es mayor que en la viga entallada y permite que la zona de fractura se desarrolle con menos coacciones. Los valores de la carga en función del desplazamiento de los labios de la entalla se han representado en la figura 8.

Nuevamente, las predicciones teóricas concuerdan muy bien con las experimentales, en particular cuando se utiliza una aproximación bilineal para el comportamiento del hormigón a tracción. Como en estos ensayos no se midió la energía de fractura, el valor utilizado en los cálculos se ha deducido obli-

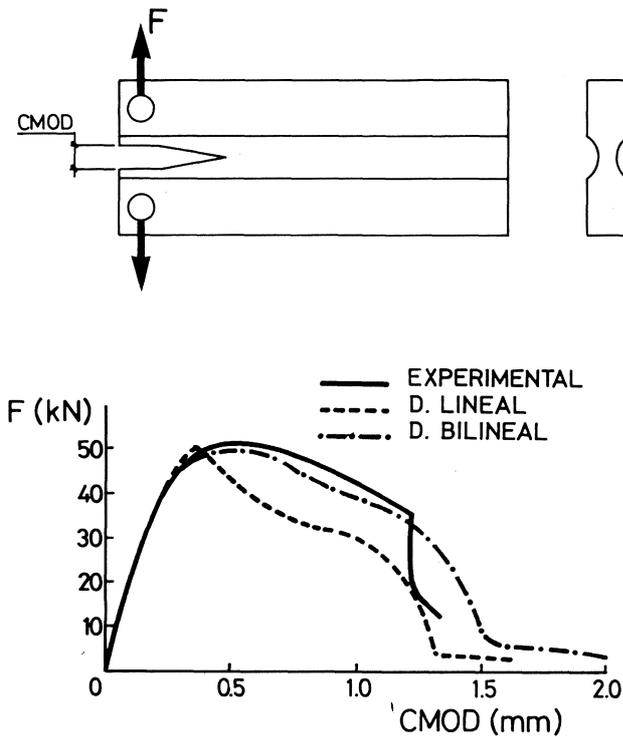


Fig. 8.—Predicción teórica (Rots, 1983) y resultados experimentales (Sok, Barón y Franco, 1979) para una viga en doble voladizo.

gando a que la carga máxima calculada coincida con el valor medido, obteniéndose para el modelo lineal $G_F = 250$ N/m.

En ambos ejemplos se ha comprobado que los resultados son muy sensibles al modelo seleccionado para el comportamiento del hormigón en la región de descarga (Figs. 5 y 6a), en particular, al valor de la energía de fractura G_F y a la forma del diagrama. Esta dependencia, así como la presunción de que G_F , tal como se define, es una característica del material, deben estudiarse con más detenimiento (Planas y Elices, 1985). Otro aspecto que se analizó en el curso del estudio numérico realizado por Rots es la influencia del tamaño y forma de la malla de los elementos finitos. Parece ser que cuando la forma de la rotura está dominada por el modo I se pueden conseguir resultados objetivos adecuando el tamaño de la malla de forma que G_F se mantenga constante. En cualquier caso, Bazant ha propuesto que para obtener resultados consistentes el tamaño mínimo sea del orden de tres veces el máximo tamaño del árido.

Cuando la rotura se produce en un modo mixto, es decir, cuando intervienen los modos I y II, los resultados siguen siendo buenos, aunque no tanto como en el caso anterior. Para analizar esta situación los autores del modelo descrito han elegido los ensayos realizados por Arrea e Ingraffea (1982) en vigas entalladas de hormigón sin armar solicitadas como se indica en la figura 9, donde también se han representado los valores de la carga en función del desplazamiento de los labios de la fisura obtenidos experimental y numéricamente.

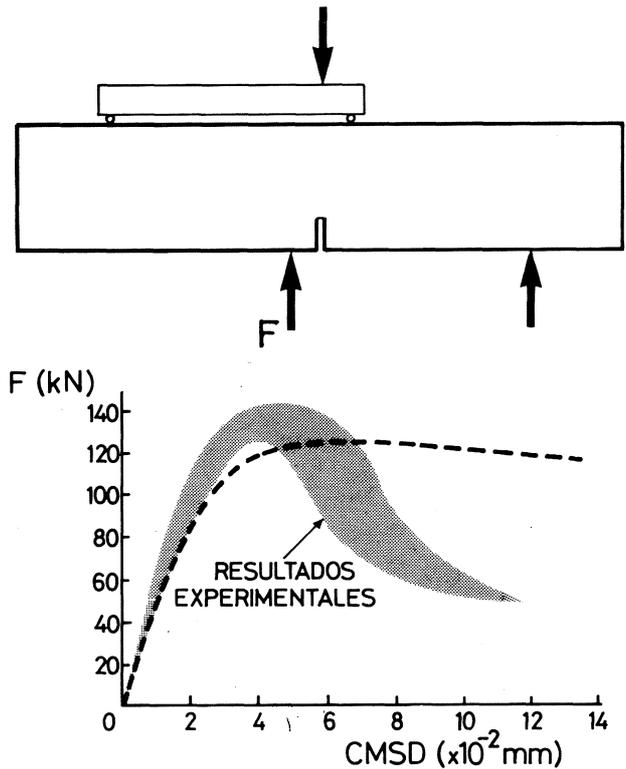


Fig. 9.—Predicción teórica (Rots, 1983) y resultados experimentales (Arrea, Ingraffea, 1982) para una viga entallada solicitada en modo mixto.

Al comparar los resultados se observa que la predicción es buena, hasta que se alcanza la carga máxima, pero que los resultados numéricos no predicen adecuadamente la rama de descarga. Esta discrepancia puede ser debida a varias causas: una de ellas es que el ensayo se hizo controlando el desplazamiento de los labios de la entalla, mientras que el cálculo se realizó incrementando el desplazamiento del punto de aplicación de la carga. Otra causa, probablemente más importante, fueron las inestabilidades que aparecieron en el cálculo numérico y que están asociadas al tipo de malla elegido. Además, parece ser que la objetividad en este tipo de problemas no está claramente establecida (Rots, 1983).

El modelo de la fisura con cohesión también se ha utilizado para analizar el comportamiento de elementos de hormigón armado. En el artículo citado (Rots y otros, 1985) se estudian dos tipos de vigas armadas y empotradas en sus extremos; uno rompe por esfuerzo cortante y otro por una combinación de esfuerzo cortante y compresión en los empotramientos. En las vigas armadas las inestabilidades numéricas a veces desaparecen, pero lo más sorprendente es la buena predicción de la situación de las fisuras que están bastante localizadas. Las predicciones de la carga en función del desplazamiento no son tan buenas como en los elementos de hormigón en masa, en parte porque el hormigón sometido a mayores cargas que en los ejemplos anteriores no se ha modelizado con tanta precisión.

En la actualidad, ésta es una línea de investigación muy activa.

Modelos basados en la densidad de energía de deformación

La teoría de la densidad de energía de deformación, propuesta por G. C. Sih (Sih, 1973a, 1973b, 1973c, 1974), es capaz de explicar de forma unificada la iniciación de la fractura o de la plastificación en un sólido homogéneo o no, sometido a sollicitaciones muy generales. El parámetro fundamental que utiliza la teoría es el factor de la densidad de energía de deformación, S , capaz de predecir la iniciación de la fractura y la dirección de propagación, así como de la plastificación.

La densidad de energía de deformación dW/dV se define de la siguiente forma:

$$\frac{dW}{dV} = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (13)$$

y el factor S , en los alrededores de una fisura, así:

$$S = r (dW/dV) \quad (14)$$

donde r es la distancia desde el fondo de la fisura al punto que se considera.

Las hipótesis básicas de la teoría son:

1. La **dirección** en que se inicia la fractura es aquella para la que S es mínimo. Es decir, si se calcula el valor de S sobre los puntos de una esfera de radio r_0 , la dirección en la que se iniciará la fractura es aquella que une el origen con el punto correspondiente a S_{\min} .
2. La **iniciación** de la fractura ocurre cuando S_{\min} alcanza un valor crítico S_{cr} , que es una propiedad del material.
3. El **incremento** de la longitud de la fisura se supone proporcional a S_{\min} , de forma que S_{\min}/r permanezca constante e igual a un valor crítico de dW/dV , que se obtiene a partir de un ensayo de tracción simple. $(dW/dV)_c$ es el área encerrada por el diagrama de tensiones y deformaciones verdaderas (no ingenieriles).

Esta última hipótesis se suele escribir de la siguiente forma:

$$\left(\frac{dW}{dV} \right)_c = \frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \dots = \frac{S_j}{r_j} = \text{cte.}$$

La fisura puede propagarse de forma estable y acabar deteniéndose cuando S_j/r_j se aproxima a S_0/r_0

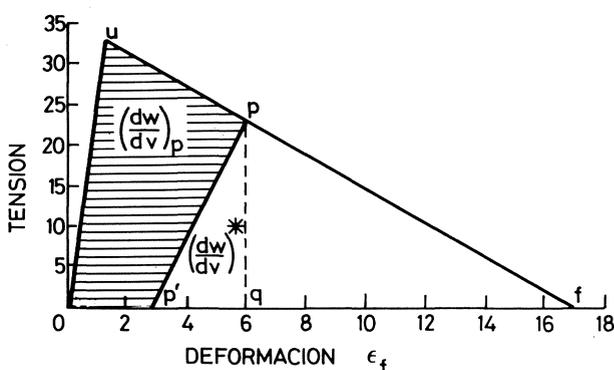
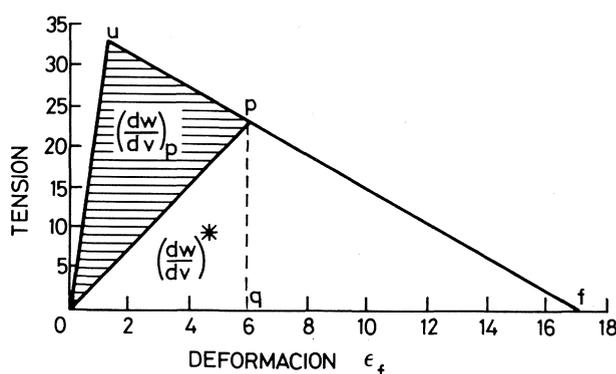
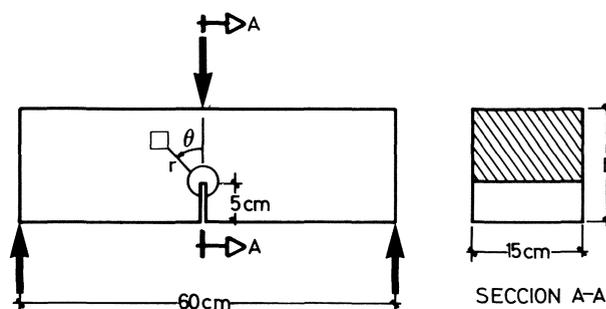


Fig. 10.—Características geométricas de la viga y posibles diagramas del comportamiento del hormigón.

o, por el contrario, cuando S_j/r_j tiende a S_c/r_c la fisura puede volverse inestable. En el primer caso, r_0 es una distancia característica para cada material, del orden de 10^{-2} a 10^{-1} mm, a partir de la cual el medio puede considerarse continuo (Sih y Kipp, 1974). En el segundo caso r_c se deduce a partir de $(dW/dV)_c$ y S_c que son parámetros del material. Una exposición más detallada de la teoría de Sih puede consultarse en la monografía de Elices y Sánchez Gálvez (1985).

Esta teoría se ha utilizado satisfactoriamente en materiales metálicos muy dúctiles, en materiales compuestos y parece ser que también puede explicar la fractura del hormigón. Con este propósito se resume un estudio del comportamiento de una viga entallada de hormigón en masa (para más detalle ver Sih, 1984b y 1985).

Las características geométricas de la viga se resumen en la figura 10. Para estudiar la influencia del tamaño se ha dejado el canto variable, habiéndose realizado cálculos para $b = 15, 30, 45, 90, 222$ y 310 cm. La sollicitación se ha hecho controlando el desplazamiento del punto de aplicación de la carga $\Delta\delta$, el efecto de la velocidad de carga se ha simulado estudiando las siguientes velocidades: $\Delta\delta = 4 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}$ y $1 \cdot 10^{-3}$ cm. Finalmente el material se ha caracterizado mediante los diagramas simplificados que también se indican en la figura 10. Para simular hormigones de distintas rigideces se ha variado la deformación máxima ϵ^f y la densidad de energía crítica, como indica la tabla.

Hormigón	Deformación máxima	Densidad de energ. crit.
A	$16 \cdot 10^{-3}$	2.636 N/m ²
B	$8 \cdot 10^{-3}$	1.386 N/m ²
C	$4 \cdot 10^{-3}$	754 N/m ²

Los cálculos se han realizado con los dos modelos indicados en la figura 10; en el primero se supone que no hay deformación remanente después de una descarga, mientras que en el segundo sí. En ambos casos la energía que debe considerarse no es el área $oupq$, sino la energía disponible $(dW/dV)^*$, una vez descontada la energía disipada durante el proceso —área rayada en las figuras—. En el caso más simple de la descarga elástica resulta:

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)^* = \frac{1}{2} (\sigma_u \epsilon_u + \sigma_u \epsilon_f - \sigma_u \epsilon - \sigma \epsilon_u) \quad (15)$$

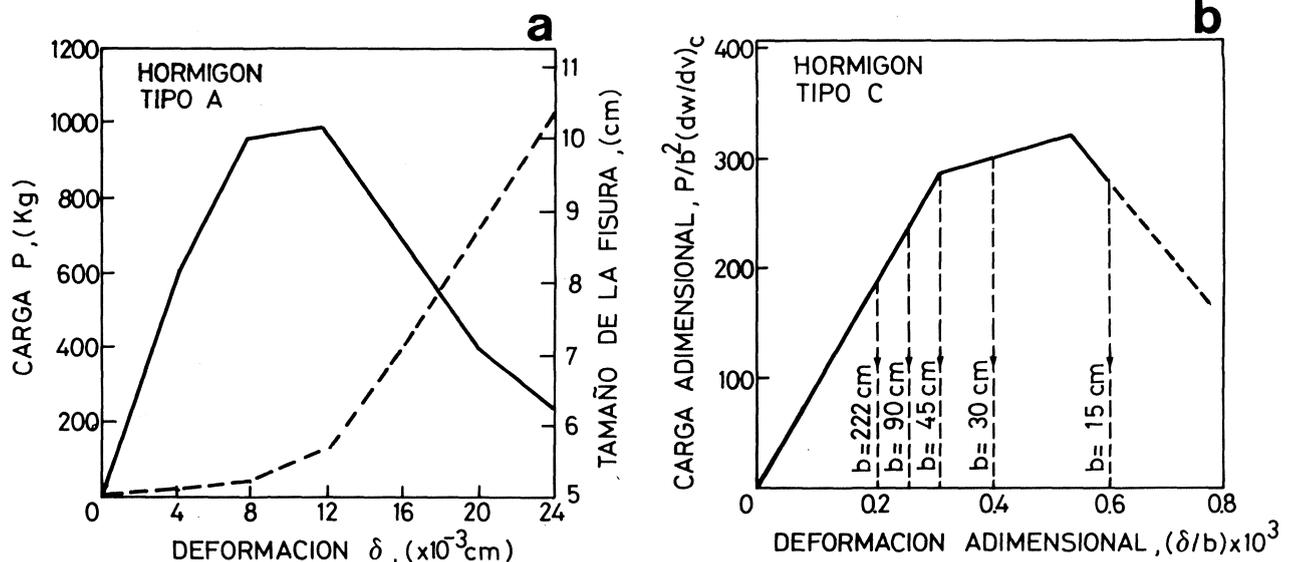
Los resultados obtenidos con ambos modelos son cualitativamente semejantes, en particular con relación al factor de densidad de energía que es pará-

metro característico de este modelo, y por consiguiente sólo se indican a continuación los resultados obtenidos con el modelo de descarga elástica, porque los cálculos son más sencillos.

El análisis se ha realizado con un programa de elementos finitos. Por la simetría del elemento estructural sólo se ha estudiado media viga, en la que se ha dibujado una malla con 52 elementos y 309 nudos. Se han utilizado elementos isoparamétricos en forma de cuadrilátero, con doce nudos, que han permitido obtener una solución cúbica de desplazamientos y de segundo orden para las tensiones y las deformaciones. Alrededor del fondo de la fisura se ha supuesto que el campo de la densidad de energía era proporcional a $1/r$, espaciando los nudos a $1/9$ y a $4/9$ en los elementos adyacentes al borde de la fisura.

La predicción de las curvas carga-desplazamiento es uno de los objetivos más interesantes en el cálculo de elementos estructurales de hormigón. En la figura 11a se muestra un resultado para una viga de 15 cm de canto, sollicitada con $\Delta\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ cm y para material del tipo A. La curva, $F - \Delta\delta$, exhibe las características típicas de un resultado experimental; la presencia de una carga máxima y de una región de descarga estable. Por desgracia, los cálculos no se han basado en resultados experimentales y no es posible comprobar la precisión de las predicciones de este modelo. También se ha representado en la figura el crecimiento estable de la fisura a medida que aumenta la deformación. Estos resultados permiten correlacionar las pérdidas de rigidez del elemento estructural a medida que la fisura va avanzando.

Este modelo también permite estimar la influencia del tamaño en el desencadenamiento de una rotura frágil, fenómeno conocido por los proyectistas



Predicción de la curva carga-desplazamiento y del crecimiento de la fisura.

Predicción de un aumento de la fragilidad con el tamaño (efecto del tamaño), (Sih, 1984b y 1985).

Fig. 11.

pero que todavía no se ha explicado satisfactoriamente (ver, por ejemplo, Elices, 1985). En la figura 11b se han representado las curvas carga-desplazamiento para vigas de distinto canto, fabricadas con un material del tipo C, que es el más frágil. En ellas conviene distinguir dos tipos de inestabilidades; una inestabilidad estructural que ocurre después de alcanzar la carga máxima (a partir de este momento el ensayo sólo puede ser estable si se hace controlando las deformaciones) y una inestabilidad local que se inicia cuando la fisura alcanza el tamaño crítico y se dispara. En la figura se observa que para $b = 15$ cm, la fisura empieza a propagarse antes de que se alcance la inestabilidad estructural y, además, se obtiene una descarga estable. Si se repiten los cálculos para vigas de mayor canto, la fisura se vuelve inestable antes y la viga exhibe una inestabilidad representada por las líneas verticales indicadas en la figura. En ella puede apreciarse el «efecto del tamaño» y deducir que para cantos superiores a un valor comprendido entre 15 y 30 cm la carga máxima que puede soportar depende del tamaño, ya que la fractura está controlada por la inestabilidad de la fisura y no del elemento estructural.

Hay otras formas de deterioro del material, además de la generación y propagación de una fisura, que este modelo también es capaz de explicar de forma coherente. Cuando se estudian materiales metálicos la plastificación es una forma de deterioro y en los hormigones ocurre un fenómeno análogo, en el sentido de que también se produce una disipación de energía, y que se caracteriza por la aparición de una región microfisurada.

Estas regiones están asociadas con los valores extremales de S : la teoría postula que la iniciación de la fisuración está relacionada con los valores mínimos de S —como ya se ha comentado— y que la iniciación y dirección de la plastificación, o microfisuración, lo está con los valores máximos de S . En la figura 12 se muestran las predicciones de este modelo para la viga que se estudia.

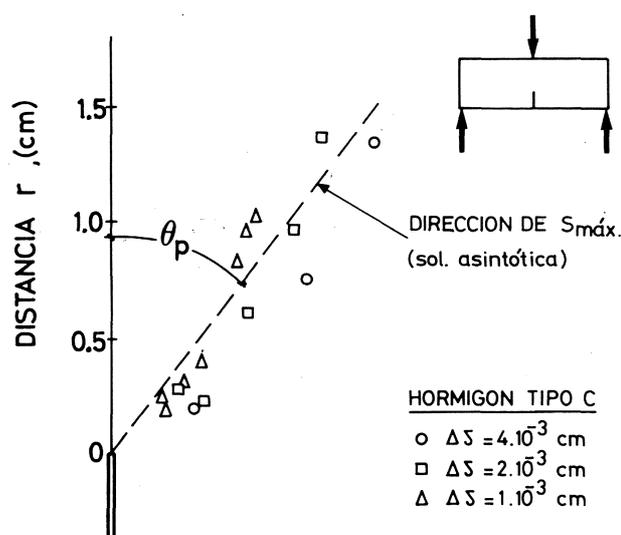


Fig. 12.—Iniciación de la fractura y de la plastificación según la teoría de la densidad de la energía de deformación (Sih y Matic, 1983).

Como referencia se ha indicado la solución asintótica en régimen elástico. A partir de esta solución analítica se ha calculado $S(r_0, \theta)$, el valor mínimo corresponde a $\theta_0 = 0$ e indica, como era de esperar, la dirección de propagación de la fisura, el valor máximo corresponde a $\theta_p = \arccos(1 - 2\nu)$, que para $\nu = 0,1$ es $\theta_p = 36,8^\circ$. Se puede observar que los resultados obtenidos por el método de elementos finitos para el hormigón del tipo C y para distintas velocidades de sollicitación coinciden bastante bien con la solución asintótica. Para metales también se han obtenido resultados análogos (Sih y Matic, 1983).

La teoría de la densidad de energía de deformación permite explicar de forma unificada cómo se induce la fragilidad al aumentar el tamaño del elemento estructural, al crecer la velocidad de sollicitación o al variar la rigidez del material. Estos resultados están resumidos esquemáticamente en la figura 13 y los detalles pueden consultarse en las referencias citadas de G. C. Sih. En las tres figuras se ha repre-

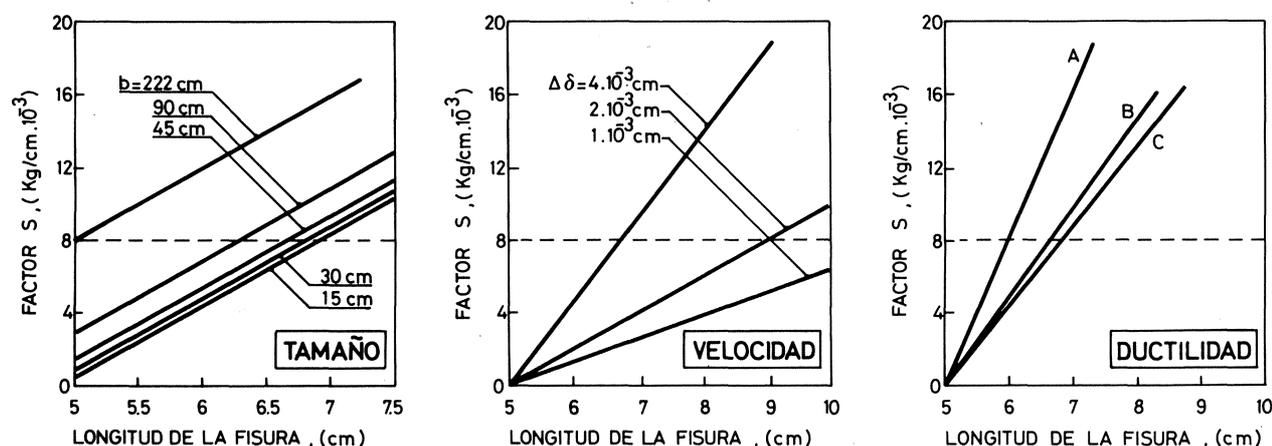


Fig. 13.—Inducción de la fragilidad (a) al aumentar el tamaño del elemento estructural, (b) al crecer la velocidad de sollicitación o (c) al variar la rigidez del material (Sih, 1985).

sentado el factor S , en función del tamaño de la fisura; en todos los casos esta variación es lineal. El valor crítico de la fisura se obtiene cuando se conoce el valor crítico de S .

La primera figura muestra el efecto del tamaño en el hormigón del tipo C. Para elementos estructurales semejantes las rectas S -a son paralelas y la ordenada en el origen crece al crecer el tamaño (el canto de la viga, en el ejemplo que consideramos). Para un valor crítico de S ($8 \cdot 10^{-3}$ kg/cm), puede observarse que la longitud de crecimiento estable de la fisura disminuye a medida que aumenta el canto y que para $b = 222$ cm la fisura es inestable desde el instante inicial en que se alcanza el valor crítico.

La segunda figura refleja la influencia de la velocidad de sollicitación, también para el mismo hormigón C, e indica que el crecimiento estable es mayor cuanto menor es la sollicitación. Finalmente, en la tercera figura se ha considerado la influencia de rigidez, representando los valores de S para la misma viga fabricada con los tres tipos de hormigón y sollicitada con $\Delta\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ cm. Como era de esperar intuitivamente el hormigón menos rígido es el que permite un mayor crecimiento estable de la fisura.

CONSIDERACIONES FINALES

El propósito de este artículo era ofrecer una panorámica del estado de la Mecánica de la Fractura aplicada al hormigón, destacando aquellos aspectos relacionados con las ecuaciones constitutivas, o con más precisión, cómo tratar el problema de una fisura producida por esfuerzos de tracción. Para grandes macizos se ha indicado que los modelos sencillos de la Mecánica de la Fractura en régimen elástico y lineal pueden dar resultados satisfactorios, mientras que en circunstancias normales es preciso recurrir a modelos no lineales en los que el hormigón exhibe una rama de ablandamiento en función de la deformación (strain-softening).

Para establecer estos modelos, o ecuaciones constitutivas, se utilizan tres métodos distintos y en cierto modo complementarios. Los dos primeros son clásicos; uno es el método analítico —o deductivo— donde los parámetros se deducen a partir de las propiedades físicas de los componentes del hormigón y el otro es el método experimental en el que se intuye un modelo parametrizado que se ajusta a partir de resultados experimentales. En la práctica se utilizan modelos mixtos basados en lo que se conoce del comportamiento mecánico del hormigón y complementados con algunos parámetros empíricos. El tercer método, la simulación numérica, parte de una concepción distinta y sólo actualmente, debido al desarrollo de los ordenadores, ha sido posible ponerlo en práctica.

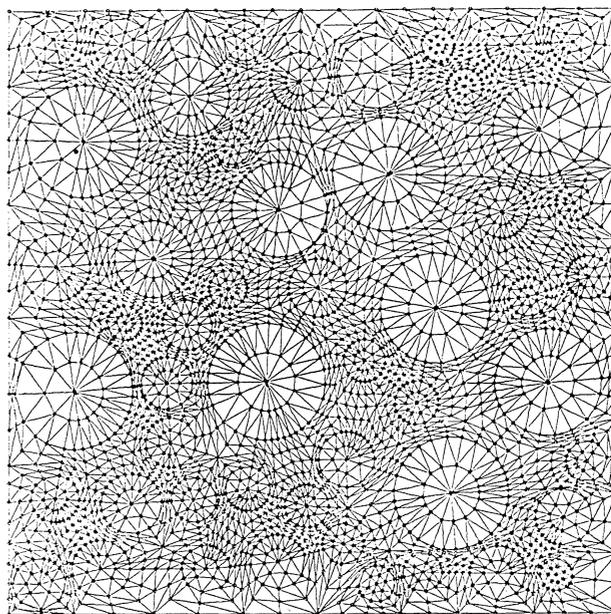


Fig. 14.—"Hormigón numérico" modelizado con elementos finitos triangulares (Wittman, Roelfstra, Sadonki, 1985).

Un primer paso en esta dirección es el dado por F. Wittman y sus colaboradores (Wittman, Roelfstra, Sadonki, 1985) que han desarrollado un modelo numérico para simular el comportamiento del hormigón y que ellos llaman «hormigón numérico». Los resultados obtenidos hasta el momento son alentadores; por este procedimiento es posible estudiar la influencia en el comportamiento mecánico de la distribución granulométrica, la distribución de la fase dispersada (árido) en la fase dispersante (matriz de mortero) y la morfología de las inclusiones (áridos de machaqueo o no), factores que es muy difícil tener en cuenta con un estudio analítico. Mediante el «hormigón numérico», ver figura 14, es posible estudiar la distribución de las **microtensiones** y **microdeformaciones** que originarán las **microgrietas**, elementos clave para estudiar la fisuración del hormigón (ver, por ejemplo, los trabajos de Zaitsev, 1983).

La retracción es otro fenómeno que se ha abordado a través del «hormigón numérico». En una probeta de hormigón la distribución de la humedad es heterogénea y en consecuencia las retracciones varían de un lugar a otro causando, como es sabido, una microfisuración. El problema, a este nivel, es intratable analíticamente, pero puede estudiarse numéricamente. La figura 15 (tomada de la tesis de Roelfstra, 1984) muestra un modelo de hormigón para este propósito. Otro problema parecido es el de la microfisuración por incompatibilidad térmica entre los áridos y la matriz, que también es susceptible de un tratamiento análogo. Otros problemas complejos, como los derivados de la interacción entre la microfisuración y los fenómenos diferidos como la retracción o la fluencia, también pueden estudiarse, en principio, mediante el «hormigón numérico» que será, sin duda, un valioso complemento de los modelos analíticos y experimentales.

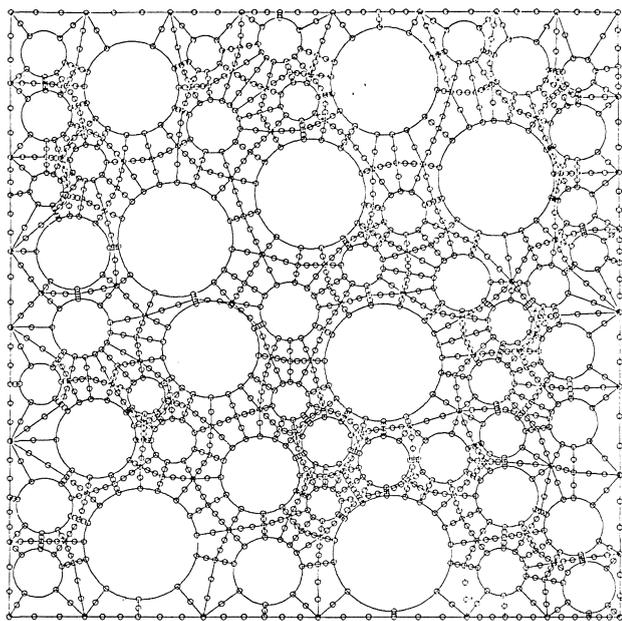


Fig. 15.—"Hormigón numérico", modelizado con elementos finitos, para estudiar la difusión del agua y la retracción (Roelfstra, 1984).

Con independencia del método elegido —analítico, experimental o numérico—, parece razonable construir el modelo partiendo del comportamiento de sus componentes a un nivel inferior al que se va a utilizar. Dicho de otra forma, no considerar de en-

trada el hormigón como un sólido homogéneo caracterizado por un conjunto de parámetros, que a veces suele ser difícil interpretar físicamente, sino tratarlo como un material heterogéneo, estimar las propiedades de sus componentes, estudiar su compatibilidad y trabajar con valores medios, cuando sea conveniente considerarlo homogéneo, que será la mayor parte de las veces. Este planteamiento tiene, en principio, dos ventajas: En primer lugar los parámetros característicos del hormigón se obtienen a partir de parámetros de los componentes (estos últimos se pueden calcular o medir con independencia de los parámetros del hormigón) y en ningún caso aparecen parámetros globales ajustables que pueden dejar dudas sobre la validez de las predicciones cuando se opera en condiciones distintas a las del ajuste. Esta situación nos lleva a la segunda ventaja de los modelos realizados a partir de un segundo nivel que es la de poder estimar los límites de validez del modelo o de los parámetros macroscópicos cuando se conocen las limitaciones de los componentes, problema que en general es más sencillo porque suele tratarse de materiales homogéneos.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su agradecimiento a los profesores Jaime Planas, Javier Llorca y Pablo Maturana, por sus valiosas sugerencias durante la preparación de este trabajo.

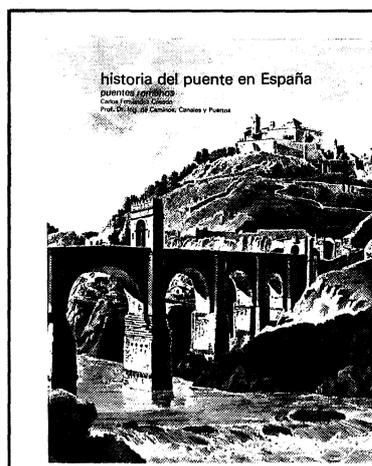
REFERENCIAS

- ARREA, M., e INGRAFFEA, A. R. (1982): «Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete». Report No. 81-13. Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, New York.
- ASTIZ, M. A.: «An incompatible singular elastic elemento for two and three dimensional crack problems». Aceptado para su publicación, en *Int. J. of Fracture*.
- BARENBLATT, G. I. (1962): «The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture». *Advances in Appl. Mech.*, 7: 55-129.
- BARSOUM, R. S. (1976): «On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics». *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 1: 25-37.
- BAZANT, Z. P., y Cedolin, L. (1979): «Blunt crack band propagation in finite element analysis». *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 105, No. EM2: 297-315.
- BAZANT, Z. P. (1985): «Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structures». En *Fracture Mechanics of Concrete* (Sih, DiTommaso, Eds.), Martinus Nijhoff Publishers.
- BILBY, B. A.; COTTRELL, A. H., y SWIDEN, K. H. (1963): «The spread of plastic yield from a notch». *Proc. Roy Soc. A* 272: 304-310.
- BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R., y LIGGETT, J. A. (1981): «Automatic two-dimensional quasi-static and fatigue crack propagation using the boundary element method». Department of Structural Engineering Report 81-3, School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, N. Y.
- CARPINTERI, A. (1985): «Scale effects in fracture of plain and reinforced concrete structures». En *Fracture Mechanics of Concrete* (Sih, DiTommaso, Eds.), Martinus Nijhoff Publishers.
- DUGDALE, D. S. (1960): «Yielding of steel sheets containing slits». *J. Mech. Phys. Sol.*, 8: 100-108.
- ELICES, M. (1985): «La influencia del tamaño en la fragilidad de un elemento estructural». *Tecnología 2000*, Univ. Politécnica de Madrid.
- ELICES, M., y SANCHEZ GALVEZ, V. (1985): «El criterio de la densidad de energía». Pendiente de su publicación.
- ELICES, M.; LLORCA, J., e INGRAFFEA, A. R. (1985): «Fractura de hormigón en régimen elástico y lineal. Un ejemplo: La presa de Fontana». En este n.º de Informes de la Construcción.
- ELICES, M. (1985): «Mecánica de la fractura». E. T. S. Ing. Caminos. UPM.
- ERDOGAN, F., y SIH, G. C. (1963): «On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear». *ASME Journal of basic Engineering*, Vol. 85: 519-527.
- FREESE, C. E., y TRACEY, D. M. (1976): «The natural isoparametric triangle versus collapsed quadrilateral for elastic crack analysis». *International Journal of Fracture*, Vol. 12: 767.
- HILLERBORG, A. (1985): «Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete». En *Fracture Mechanics of Concrete* (Sih, DiTommaso, Eds.) Martinus Nijhoff Publishers.
- INGRAFFEA, A. R. y MANU, C. (1978): «Stress-intensity factor computation in three dimensions with quarter-point crack tip elements». *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, No. 6: 235-248.
- INGRAFFEA, A. R., y SAUOMA, V. (1985): «Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete». En *Fracture Mechanics of Concrete* (Sih, DiTommaso, Eds.), Martinus Nijhoff Publishers.
- MUFTI, A. A.; MIRZA, M. S.; McCUTCHEON, J. O., y HOUDE, J. (1970): «A study of the behaviour of reinforced concrete elements». *Structural Concrete Series No. 70-5*, McGill University.

- NGO, D. y SCORDELIS, A. C. (1967): «Finite element analysis of reinforced concrete beams». *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 64: No. 14: 152-163.
- PERUCCHIO, R.; INGRAFFEA, A. R., y ABEL, J. F. (1982): «Interactive computer graphic preprocessing for three-dimensional finite element analysis». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, No. 6: 909-926.
- PERUCCHIO, R., e INGRAFFEA, A. R. (1983): «Interactive computer graphic preprocessing for three-dimensional boundary-integral elemento analysis». *Computers and Structures*, Vol. 16, No. 1-4: 153-166.
- PETERSSON, P. E. (1981): «Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials». Report No. TVBM-1006, Division of Building Materials, University of Lund, Sweden.
- PLANAS, J., y ELICES, M. (1985a): «Towards a measure of G_f : An analysis of experimental results». *Proceedings Int. Conf. on Fracture Mechanics of Concrete*. Lausanne.
- PLANAS, J., y ELICES, M. (1985b): «Fractura del hormigón en régimen lineal. Intentos para medir la energía de fractura G_f ». En este n.º de Informes de la Construcción.
- RASHID, Y. R. (1968): «Analysis of prestressed concrete pressure vessels». *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 7, No. 4: 334-344.
- ROELFSTRA, P. E. (1984): «Tesis Doctoral. Laboratorio de Materiales de Construcción». EPF-Laussane.
- ROTS, J. G. (1983a): «Analysis of crack propagation and fracture of concrete with DIANA». Report No. BI-83-26, Institute TNO for Building Materials and Building Structures, Rijswijk, The Netherlands.
- ROTS, J. G.; NAUTA, P.; KUSTERS, G., y BLAAUWENDRAAD, J. (1985): «Smearred crack approach and fracture localization in concrete». *Heron*, Vol. 30: 1-48.
- SAOUMA, V. E. (1981): «Finite element analysis of reinforced concrete: A fracture mechanics approach». Ph. D. Dissertation, School of Civil and Environmental Engineering, Corneel University.
- SIH, G. C. (1973): «Some basic problems in fracture mechanics and new concepts». *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 5: 365.
- SIH, G. C. (1973a): «Some basic problems in fracture mechanics and new concepts». *Engineering Fracture Mechanics*, 5: 365-377.
- SIH, G. C. (1973b): «Energy-density concept in fracture mechanics». *Engineering Fracture Mechanics*, 5: 1037-1040.
- SIH, G. C. (1973c): «A special theory of crack propagation: Methods of analysis and solutions of crack problems». *Mechanics of Fracture 1*, edited by G. C. Sih, Noordhoff International Publishing, Leyden, pp. XXI-XLV.
- SIH, G. C. (1974): «Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems». *International Journal of Fracture*, 10: 305-321.
- SIH, G. C., y KIPP, M. E. (1974): «Discussion». *International Journal of Fracture*, 10: 261-265.
- SIH, G. C., y MALIC, P. (1983): «A pseudo-linear analysis of yielding and crack growth: Strain energy criterion». En *Defects, Fracture and Fatigue* (G. C. Sih y J. W. Provan Eds.), Martinus Nijhoff Publishers, pp. 223-232.
- SIH, G. C. (1984b): «Mechanics of material damage in concrete». En *Fracture Mechanics of Concrete* (A. Carpinteri e Ingrassia, Eds.), Martinus Nijhoff Publishers.
- SIH, G. C. (1985): «Non-linear response of concrete: Interaction size, loading step and material property». NATO Workshop (S. P. Shah Ed.), Northwestern University.
- SLOAN, R. C., y ABRAHAM, T. J. (1978): «TVS cuts deep slot in dam, ends cracking problems». *Civil Engineering*, Vol. 48, No. 1: 66-70.
- SOK, C.; BARON, J., y FRANCOIS, D. (1979): «Mécanique de la rupture appliquée au béton hydraulique». *Cement and Concrete Research*, Vol. 9: 641-648.
- WITTMANN, F. H.; ROELFSTRA, P. E., y SADONKI, H. (1985): «Simulation and analysis of composite structures». *Mat. Sc. and Eng.*
- ZAITSEV, V. B. (1983): «Crack propagation in a composite material». En *Fracture Mechanics of Concrete* (F. H. Wittman, Ed.), Elsevier, pp. 251-300.



publicación del I.E.T.c.c.



historia del puente en España puentes romanos

Carlos Fernández Casado
Prof. Dr. Ing. de Caminos,
Canales y Puertos

Unos apéndices añadidos a los doce artículos originales informan sobre las variaciones experimentadas por algunos puentes más importantes como la del traslado de las ruinas mejor conservadas del puente de Alconétar, que corrió el peligro de quedar sumergido en el embalse de Alcántara, y la reparación de la cimentación de una de las pilas centrales del puente de este mismo nombre que fue detectada, al quedar durante unos días cortado el curso del Tajo, para realizar el montaje de los desagües de fondo correspondientes a la presa del citado embalse.

Un volumen encuadernado en cuché, a dos colores, de 21 x 27,5 cm, compuesto de 554 páginas, 105 grabados, 14 dibujos, 753 fotos blanco y negro, 24 fotos color y 110 dibujos de línea.
Madrid, 1981.

Precios: España, 3.000 ptas.; extranjero, 43 \$ USA.