

pandeo de paraboloides hiperbólicos con cargas uniformes en cualquier dirección

Félix Escrig, Dr. Arquitecto
Gonzalo Martín, Arquitecto

441-2

sinopsis

Este artículo trata de la obtención de la carga crítica de pandeo en un paraboloides hiperbólico con cargas uniformes en cualquier dirección siguiendo un criterio diferente al de Reissner, comúnmente empleado hasta ahora.

Para ello, en vez de partir de un sistema general, función de tensiones y desplazamientos, se utiliza un concepto distinto: el del mínimo de la energía potencial total. Asimismo se relacionan desplazamientos, y no esfuerzos, a través de la ecuación canónica del paraboloides.

La resolución del sistema de ecuaciones resultante mediante programa de ordenador permite señalar que los valores de Reissner quedan del lado desfavorable, a pesar de no haberse empleado en este trabajo el criterio de flechas, con el que se hubiesen obtenido valores de la carga crítica de pandeo todavía más pequeños.

El perfeccionamiento del método permitirá en el futuro ampliar su campo de aplicación.

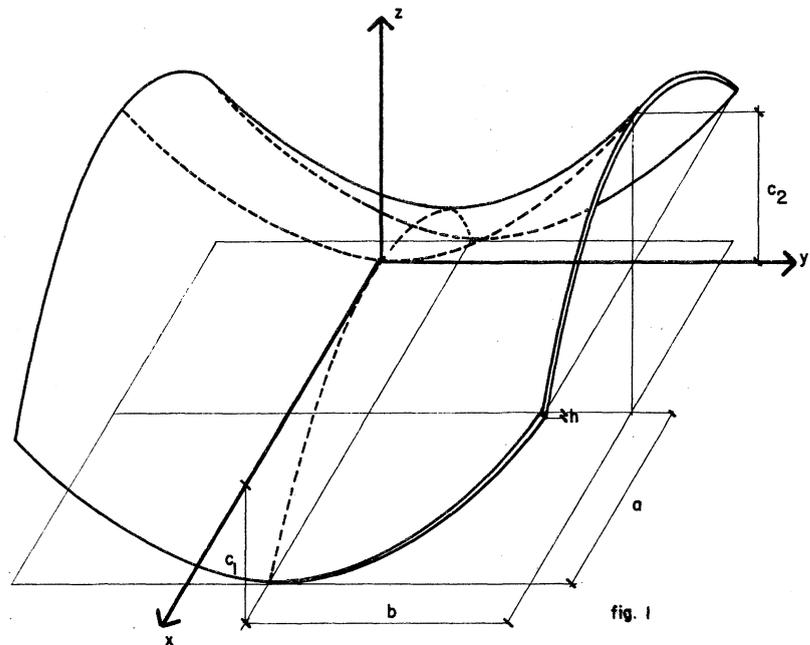


Figura 1.

El paraboloides hiperbólico puede considerarse engendrado por la traslación de una parábola paralelamente a sí misma sobre otra de concavidad opuesta contenida en un plano perpendicular a aquélla.

Por ser perpendiculares y de curvatura contraria, estas parábolas serán coordenadas curvilíneas, que además coincidirán con las direcciones principales si son las de máxima y mínima curvatura.

La ecuación de la superficie se deduce al considerar que un punto cualquiera debe estar contenido en las dos familias de parábolas. Entonces

$$z = k_1x^2 + k_2y^2 \quad [1]$$

Donde aplicando las relaciones de la figura 1 obtendremos:

$$\frac{c_1}{a^2} = k_1 ; \frac{c_2}{b^2} = k_2 \quad [2]$$

De un modo más general hubiéramos llegado a la misma ecuación sustituyendo estos valores en la ecuación general de una cuádrica:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad [3]$$

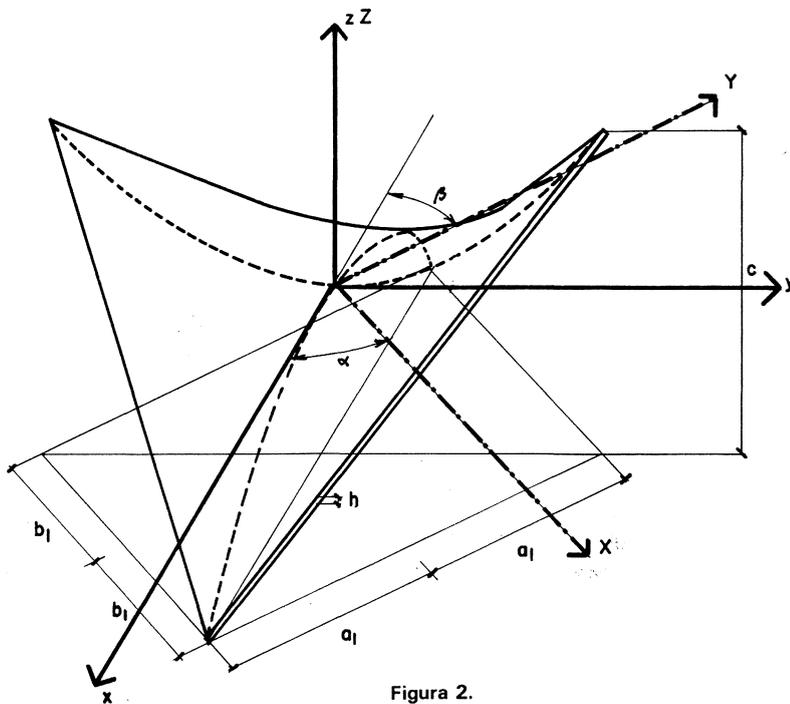


Figura 2.

A la forma [1] se la conoce como expresión canónica del paraboloides hiperbólico.

Los paraboloides hiperbólicos tienen una propiedad muy característica por la que pueden tratarse como superficies regladas, y es que en su superficie existen dos familias de líneas, generatrices y directrices, que son rectas. Para encontrarlas basta hacer un cambio de ejes mediante giro. Figura 2.

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \beta \\ y &= X \sin \alpha + Y \sin \beta \\ z &= Z \end{aligned} \quad [4]$$

Sustituyendo en [1] y operando, obtendremos la expresión:

$$z = - \left(\frac{2c_1}{a_1^2} - \frac{2c_2}{b_1^2} \right) \sin^2 \alpha XY \quad [5]$$

Los estudios de la estabilidad realizados hasta el momento en paraboloides hiperbólicos parten de la expresión anterior y abarcan aspectos muy parciales, como son bordes rectos (figura 2) y cargas exclusivamente verticales. Para este caso y con bordes empotrados, Reissner (7) obtuvo una carga crítica:

$$P_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \left(\frac{hc}{a_1 b_1} \right)^2 \quad [6]$$

que ha sido extensamente explotada en toda la literatura sobre el tema y que tan sólo se ha enriquecido con casos de ortotropía.

El procedimiento que utilizó fue partir de un sistema general, función de tensiones y desplazamientos.

$$\begin{aligned} \nabla^4 F &= (\int P_x dx)_{,yy} + (\int P_y dy)_{,xx} - \mu (P_{,xx} + P_{,yy}) + \\ &+ Eh (2z_{,xy} w_{,xy} + w_{,xy}^2 - z_{,xx} w_{,yy} - z_{,yy} w_{,xx} - w_{,xx} w_{,yy}) \end{aligned} \quad [7]$$

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w &= P_z + (z_{,xx} + w_{,xx}) F_{,yy} + (z_{,yy} + w_{,yy}) F_{,xx} - \\ &- 2(z_{,xy} + w_{,xy}) F_{,xy} - (z_{,x} + w_{,x}) \int P_x dx_{,x} - \\ &- (z_{,y} + w_{,y}) \int P_y dy_{,y} \end{aligned}$$

en donde:

$$N_x = F_{,yy} \quad ; \quad N_y = F_{,xx} \quad ; \quad N_{xy} = F_{,xy} \quad [8]$$

que incluye términos de segundo orden y que particularizado para el caso de paraboloides hiperbólicos

$$z = c \frac{xy}{a_1 b_1} ; P_x = 0 ; P_y = 0 \quad [9]$$

$$\nabla^4 F = Eh \left(\frac{2c}{a_1 b_1} w_{,xy} + w_{,xy}^2 - w_{,xx} w_{,yy} \right)$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = P_z - \frac{2c}{a_1 b_1} F_{,xy} + N_{,xx} F_{,yy} + w_{,yy} F_{,xx} - 2w_{,xy} F_{,xy} \quad [10]$$

Con las condiciones de contorno:

$$w = 0 ; w_{,x} = 0 \quad \text{para } x = 0 ; x = a_1$$

$$N_x = F_{,yy} = 0 ; N_y = F_{,xx} = 0 \quad \text{para } x = 0 ; x = a_1$$

$$w = 0 ; w_{,y} = 0 \quad \text{para } y = 0 ; y = b_1$$

$$N_x = F_{,yy} = 0 ; N_y = F_{,xx} = 0 \quad \text{para } y = 0 ; y = b_1$$
[11]

se resolvió sustituyendo w y F por series trigonométricas:

$$w = \sum w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a_1} \sin \frac{n\pi y}{b_1}$$

$$F = \sum F_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a_1} \cos \frac{n\pi y}{b_1}$$
[12]

en el que nos quedamos con un solo término.

En todo lo anterior, los subíndices x e y , precedidos de una coma, indican derivada parcial respecto a x o y tantas veces como se repitan del valor al que subindican.

Este procedimiento llevaba implícito el cálculo de los autovalores del sistema.

En este trabajo partiremos de un concepto distinto. Al plantear el mínimo de la energía potencial total V y utilizar la ecuación canónica del paraboloides hiperbólicos, relacionando desplazamientos y no esfuerzos:

$$V = U_m + U_b + \Omega \quad [13]$$

donde U_m es la energía debida a las deformaciones en el plano de la lámina:

$$U_m = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \iint \left(e_x^2 + e_y^2 + 2 e_x e_y + \frac{1}{2} (1-\mu) e_{xy}^2 \right) AB \, dx \, dy \quad [14]$$

U_b es la energía debida a flexiones:

$$U_b = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \iint \left(k_x^2 + k_y^2 + 2 k_x k_y + 2(1-\mu) k_{xy}^2 \right) AB \, dx \, dy \quad [15]$$

Ω es el potencial debido a los desplazamientos de las fuerzas exteriores.

$$\Omega = -\iint (P_x u + P_y v + P_z w) AB \, dx \, dy \quad [16]$$

De todo ello:

$$V = \iint F (w, w_{,x}, w_{,y}, w_{,xx}, w_{,yy}, w_{,xy}, u, u_{,x}, u_{,y}, v, v_{,x}, v_{,y}, x, y) dx dy \quad [17]$$

Las ecuaciones de equilibrio se obtendrán de minimizar esta función:

$$\frac{dV}{du} = 0 \quad ; \quad \frac{dV}{dv} = 0 \quad ; \quad \frac{dV}{dw} = 0 \quad [18]$$

Partimos de las deformaciones en el plano medio «e» y cambios de curvatura de la superficie media producidos por la flexión «k», con términos de segundo orden:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{u_{,x}}{A} + \frac{w_{,x}^2}{2A^2} & k_x &= -\frac{w_{,xx}}{A^2} \\ e_y &= \frac{v_{,y}}{B} + \frac{w_{,y}^2}{2B^2} & k_y &= -\frac{w_{,yy}}{B^2} \\ e_{xy} &= \frac{v_{,x}}{A} + \frac{u_{,y}}{B} + \frac{w_{,x}w_{,y}}{AB} & k_{xy} &= -\frac{w_{,xy}}{AB} \end{aligned} \quad [19] \quad [20]$$

en donde se han hecho las siguientes simplificaciones:

- $h/r \ll 1$, siendo r el menor de los radios principales de curvatura.
- Las deformaciones son pequeñas.
- El estado de deformaciones es aproximadamente plano, lo que significa que las tensiones cortantes transversales y los esfuerzos normales a la superficie media pueden despreciarse en el conjunto de la energía de deformación.
- Se desprecian los términos de orden superior al cuadrático.

A y B son los coeficientes de Lamé

$$\begin{aligned} A &= \pm \sqrt{X_{,x}^2 + Y_{,x}^2 + Z_{,x}^2} \\ B &= \pm \sqrt{X_{,y}^2 + Y_{,y}^2 + Z_{,y}^2} \end{aligned} \quad [21]$$

que corresponde a una expresión de la superficie en forma paramétrica:

$$X = X(x,y) \quad ; \quad Y = Y(x,y) \quad ; \quad Z = Z(x,y) \quad [22]$$

Para el caso de un paraboloides en forma canónica (1):

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1 + (2k_1x)^2} \\ B &= -\sqrt{1 + (2k_2y)^2} \end{aligned} \quad [23]$$

Las ecuaciones de equilibrio no lineales son:

$$\left(\frac{u_{,x}}{A^2} + \frac{w_{,x}^2}{2A^3} + \mu \left(\frac{v_{,y}}{AB} + \frac{w_{,y}^2}{2AB^2} \right) \right)_{,x} + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{u_{,y}}{B^2} + \frac{v_{,x}}{AB} + \frac{w_{,x}w_{,y}}{AB^2} \right)_{,y} \quad [24]$$

$$\frac{(1-\mu^2)}{Eh} P_x = 0$$

$$\left(\frac{v_{,y}}{B^2} + \frac{w_{,y}^2}{2B^3} + \mu \left(\frac{u_{,x}}{AB} + \frac{w_{,x}^2}{2A^2B} \right) \right)_{,y} + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{u_{,y}}{AB} + \frac{v_{,x}}{A^2} + \frac{w_{,x}w_{,y}}{A^2B} \right)_{,x} \quad [25]$$

$$\frac{(1-\mu^2)}{Eh} P_y = 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{12} \left(\frac{1}{A^4} w_{,xxxx} + \frac{2}{A^2 B^2} w_{,xxyy} + \frac{1}{B^4} w_{,yyyy} \right) - \\
& - w_{,xx} \left(\frac{u_{,x}}{A^3} + \frac{\mu v_{,y}}{A^2 B} \right) - w_{,yy} \left(\frac{v_{,y}}{B^3} + \frac{\mu u_{,x}}{A B^2} \right) - \\
& - (1 - \mu) w_{,xy} \left(\frac{u_{,y}}{A^2 B} + \frac{v_{,x}}{A B^2} \right) + \frac{1 - \mu^2}{Eh} \frac{P_x}{A} w_{,x} - \\
& - \frac{1 - \mu^2}{Eh} \frac{P_y}{B} w_{,y} - \frac{1 - \mu^2}{Eh} P_z = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

La dificultad para resolver este sistema estriba en dos razones fundamentales:

- 1.^a Existencia de derivadas parciales.
- 2.^a Existencia de términos cuadráticos.

La primera dificultad se obvia con el procedimiento de diferencias finitas, que sustituye derivadas parciales por un sistema más complejo de ecuaciones, ligando desplazamientos en puntos concretos de una malla rectangular de nudos que se superpone a la superficie en estudio.

La segunda, mediante el empleo de algún método iterativo como el que expresamos a continuación.

Puesto que lo que buscamos es la carga de pandeo, es decir, la carga para la cual la estructura se hace inestable, a dicha carga podremos llegar por escalones sucesivos, incrementos por pasos, hasta totalizarla.

Para el primer escalón resolveremos el sistema de ecuaciones anterior despreciando los términos cuadráticos.

Para el segundo paso, con la suma de cargas que corresponde a los escalones, primero, y segundo, resolveremos de nuevo el sistema lineal pero no despreciando los términos cuadráticos, sino sustituyéndolos por un valor que resulta de introducir en ellos los desplazamientos del paso primero. Con esto obtendremos un sistema de ecuaciones lineales en que los términos no lineales se sustituyen por un residuo. Precisamente en esta sustitución de unos valores por los del escalón anterior radica el error que cometemos, y éste será menor cuanto más pequeños sean los escalones de carga.

En el tercer paso se utilizarán las cargas que corresponden al tercer escalón más las anteriores, y los términos no lineales resultarán de sustituir en ellos los desplazamientos del paso segundo.

Así sucesivamente seguiremos hasta que la diferencia de desplazamientos entre dos ciclos sucesivos sea relativamente grande, en cuyo caso consideraremos que la estructura dejó de ser estable.

Si en vez de buscar la carga de pandeo queremos determinar por este procedimiento los desplazamientos teniendo en cuenta términos no lineales, podría seguirse el mismo proceso con esta carga aplicándola íntegra en el primer paso con un incremento nulo en los sucesivos. De este modo nos acercamos a la solución exacta tanto como queramos aumentando el número de pasos.

Las ecuaciones de equilibrio quedan entonces:

$$\begin{aligned}
& \frac{u_{,xx}}{A^2} + \frac{1 - \mu}{2B^2} u_{,yy} + \frac{1 + \mu}{2AB} v_{,xy} + \frac{1 - \mu^2}{Eh} P_x + \frac{w_{,x}^{\circ} w_{,xx}^{\circ}}{A^3} + \\
& + \frac{1 + \mu}{2AB^2} w_{,y}^{\circ} w_{,xy}^{\circ} + \frac{1 - \mu}{2AB^2} w_{,x}^{\circ} w_{,yy}^{\circ} = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\frac{v_{,yy}}{B^2} + \frac{1-\mu}{2A^2} v_{,xx} + \frac{1+\mu}{2AB} u_{,xy} + \frac{1-\mu^2}{Eh} P_y + \frac{w_{,y}^{\circ} w_{,yy}^{\circ}}{B^3} +$$

$$+ \frac{1+\mu}{2A^2 B} w_{,x}^{\circ} w_{,xy}^{\circ} + \frac{1-\mu}{2A^2 B} w_{,y}^{\circ} w_{,xx}^{\circ} = 0$$
[28]

$$\frac{h^2}{12} \left(\frac{B}{A^3} w_{,xxxx} + \frac{2}{AB} w_{,xxyy} + \frac{A}{B^3} w_{,yyyy} \right) - \frac{1-\mu^2}{Eh} P_z -$$

$$- \left(\frac{u_{,x}^{\circ}}{A^3} + \frac{\mu v_{,y}^{\circ}}{A^2 B} \right) w_{,xx}^{\circ} - (1+\mu) \left(\frac{u_{,y}^{\circ}}{A^2 B} + \frac{v_{,x}^{\circ}}{AB^2} w_{,xy}^{\circ} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{v_{,y}^{\circ}}{B^3} + \frac{\mu u_{,x}^{\circ}}{AB^2} \right) w_{,yy}^{\circ} \frac{(1-\mu^2) P_x^{\circ}}{EhA} + \frac{(1-\mu^2) P_y^{\circ}}{EhB} = 0$$
[29]

En donde el superíndice ° indica que estos términos no son variables, sino valores que corresponden a los obtenidos en el paso anterior.

Estas mismas ecuaciones puestas en diferencias finitas con los operadores que en esta teoría se aplican, resultan:

	a ₂	
a ₁	- 2a ₁ - 2a ₁ *	a ₁
	a ₂	

+

- a ₃ /4	*	a ₃ /4
a ₃ /4	*	- a ₃ /4

+

u
v

[30]

- a ₅ /4	a ₆	a ₅ /4
a ₄	- 2a ₄ - 2a ₆ *	a ₄
a ₅ /4	a ₆	- a ₅ /4

+
a₇ = 0

w^o

	b ₂	
b ₁	- 2b ₁ - 2b ₂ *	b ₁
	b ₂	

+

- b ₃ /4	*	b ₃ /4
b ₃ /4	*	- b ₃ /4

+

v
u

[31]

- b ₅ /4	b ₆	b ₅ /4
b ₄	- 2b ₄ - 2b ₆ *	b ₄
b ₅ /4	b ₆	- b ₅ /4

+
b₇ = 0

w^o

$$\begin{array}{ccccc}
 & & c_3 & & \\
 & c_2 & -4c_3 - 2c_2 & 2c_2 & \\
 c_1 & -4c_1 - 2c_2 & 6c_1 + 6c_3 + 4c_2^* & -4c_1 - 2c_2 & c_1 \\
 & c_2 & -4c_3 - 2c_2 & c_2 & \\
 & & c_3 & & \\
 & & & w & \\
 & & & & [32] \\
 + & \begin{array}{|c|c|c|} \hline -c_5/4 & c_6 + c_8/2 & c_5/4 \\ \hline c_4 - c_7/2 & -2c_4 - 2c_6^* & c_4 + c_7/2 \\ \hline c_5/4 & c_6 - c_8/2 & -c_5/4 \\ \hline \end{array} & + & c_9 = 0 \\
 & & & & w^o
 \end{array}$$

En donde con un asterisco se marca el punto central, y con un subíndice, el tipo de desplazamiento a que se aplica el operador.

Los coeficientes a, b y c tienen el siguiente significado:

$$a_1 = 1/A^2k^2$$

$$b_1 = 1/B^2l^2$$

$$a_2 = (1 - \mu)/2B^2l^2$$

$$b_2 = (1 - \mu)/2A^2k^2$$

$$a_3 = (1 + \mu)/2ABkl$$

$$b_3 = (1 + \mu)/2ABkl$$

$$a_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline -1/2kA^3 & * & 1/2kA^3 \\ \hline \end{array} w^o$$

$$b_4 = \begin{array}{|c|} \hline 1/2lB^3 \\ \hline * \\ \hline -1/2lB^3 \\ \hline \end{array} w^o$$

$$a_5 = \begin{array}{|c|} \hline (1 + \mu)/4lAB^2 \\ \hline * \\ \hline -(1 + \mu)/4lAB^2 \\ \hline \end{array} w^o$$

$$b_5 = \begin{array}{|c|c|} \hline -(1 + \mu)/4kA^2B & * & (1 + \mu)/4kA^2B \\ \hline \end{array} w^o$$

$$a_6 = \begin{array}{|c|c|} \hline -(1 - \mu)/4kAB^2 & * & (1 - \mu)/4kAB^2 \\ \hline \end{array} w^o$$

$$b_6 = \begin{array}{|c|} \hline (1 - \mu)/4lA^2B \\ \hline * \\ \hline -(1 + \mu)/4lA^2B \\ \hline \end{array} w^o$$

$$a_7 = (1 - \mu^2) P_x / Eh$$

$$b_7 = (1 - \mu^2) P_y / Eh \quad [33]$$

$$c_1 = Bh^2/12A^3k^4$$

$$c_2 = 2h^2/12ABk^2l^2$$

$$c_3 = Ah^2/12B^3l^3$$

$$\begin{aligned}
c_4 = & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1/2kA^3 & * & -1/2kA^3 \\ \hline \end{array} w^o + \begin{array}{|c|} \hline -\mu/2IA^2B \\ \hline * \\ \hline \mu/2IA^2B \\ \hline \end{array} w^o \\
c_5 = & \begin{array}{|c|} \hline -(1-\mu)/2kA^2B \\ \hline * \\ \hline (1-\mu)/2kA^2B \\ \hline \end{array} w^o + \begin{array}{|c|c|c|} \hline (1-\mu)/2kAB^2 & * & -(1-\mu)/2kAB^2 \\ \hline \end{array} w^o \\
c_6 = & \begin{array}{|c|} \hline -1/2IB^3 \\ \hline * \\ \hline 1/2IB^3 \\ \hline \end{array} w' + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu/2kAB^2 & * & -\mu/2kAB^2 \\ \hline \end{array} w^o
\end{aligned}$$

$$c_7 = (1 - \mu^2) P_y / EhA$$

$$c_8 = (1 - \mu^2) P_y / EhB$$

$$c_9 = -(1 - \mu^2) P_z / Eh$$

[34]

k y l son el ancho de malla en las direcciones x e y, respectivamente.

El sistema de ecuaciones, ahora lineales, que resulta de aplicar las diferencias finitas, no está completo y necesita para su resolución de cuatro ecuaciones adicionales por cada punto del contorno, dos de ellas, relacionando desplazamientos u, v, y dos, relacionando desplazamientos w.

Estas ecuaciones (prescindimos de su deducción por ser ésta elemental) son:

a) Para borde empotrado:

$$u = 0 ; v = 0 ; w = 0 ; w_{,x} = 0 \text{ ó } w_{,y} = 0 \quad [35]$$

b) Para borde articulado:

$$u = 0 ; v = 0 ; w = 0$$

$$\frac{\cos^2 \alpha + \mu \sin^2 \alpha}{A^2} W_{,xx} + \frac{\sin^2 \alpha + \mu \cos^2 \alpha}{B^2} W_{,yy} - \frac{(1 - \mu) \sin \alpha \cos \alpha}{AB} W_{,xy} = 0 \quad [36]$$

donde α tiene el significado de la figura 2.

Estas condiciones, puestas en diferencias finitas, completarán las que ya poseíamos.

Para resolver este sistema de ecuaciones, en el que las incógnitas son los desplazamientos u, v, w en cada punto de la malla generada por las diferencias finitas, elaboramos un programa en base al cual iniciaremos la explotación cuyos resultados se incluyen en el presente trabajo.

Se utilizó un ordenador H.P. 9640 A Multiprograming System del Centro de Cálculo de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla, en donde el programa se encuentra utilizable para los posibles interesados.

No vamos a describir este programa cuyas posibilidades, a partir de la teoría anterior, son:

- a) Cálculo de esfuerzos con teorías de segundo orden.
- b) Análisis de la estabilidad.

Y todo ello, para paraboloides hiperbólicos con bordes de forma arbitraria empotrados o articulados.

Las simplificaciones que hemos introducido para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales con términos cuadráticos llevan implícito un error que deberemos acotar para saber el orden de fiabilidad con el que nos movemos.

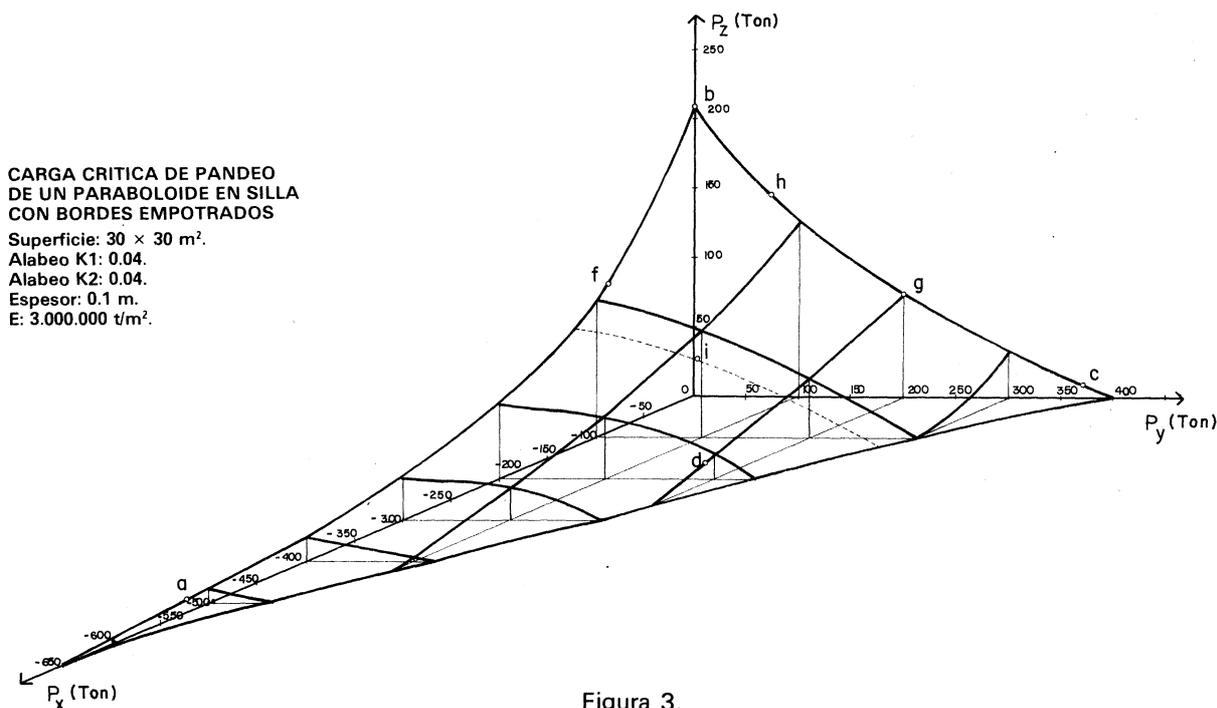
Lo que hacemos para ello es comparar los resultados que obtenemos de la aplicación de nuestro programa con los conocidos y exactos de la teoría de placas, ya que una placa es el caso límite de un paraboloide en que $k_1 = k_2 = 0$, $A = B = 1$.

Sin entrar en el desarrollo de esta comparación, para los valores manejados comprobamos que utilizando mallas en diferencias finitas de 8×8 y 12×12 y extrapolando para sus respectivos resultados y ciclos de carga de un orden del décimo de la carga de pandeo, el error es inferior al 2 por 100. Admitimos como hipótesis que en el paraboloide hiperbólico el error es del mismo orden.

Vamos a analizar ahora algunos casos particulares, cada uno de ellos con cargas uniformemente repartidas en distintas direcciones en el espacio, es decir, relaciones variables de las componentes P_x P_y P_z

El proceso seguido es el de calcular la carga de pandeo para determinadas direcciones de las fuerzas y sobre un gráfico tridimensional ajustar una superficie que complete la totalidad de las direcciones. Con los puntos a, b, c, d, e, f se señalan en las figuras 3, 5, 7, 9 los valores calculados con el programa. La superficie se ajusta de una manera aproximada.

Igualmente se incluye la traducción de esta superficie a curvas de nivel. Figuras 4, 6, 8 y 10.



CARGA CRITICA DE PANDEO DE UN PARABOLOIDE EN SILLA CON BORDES EMPOTRADOS

Superficie: $30 \times 30 \text{ m}^2$.
 Alabeo K1: 0.04.
 Alabeo K2: 0.04.
 Espesor: 0.01 m.
 E: $3.000.000 \text{ t/m}^2$.

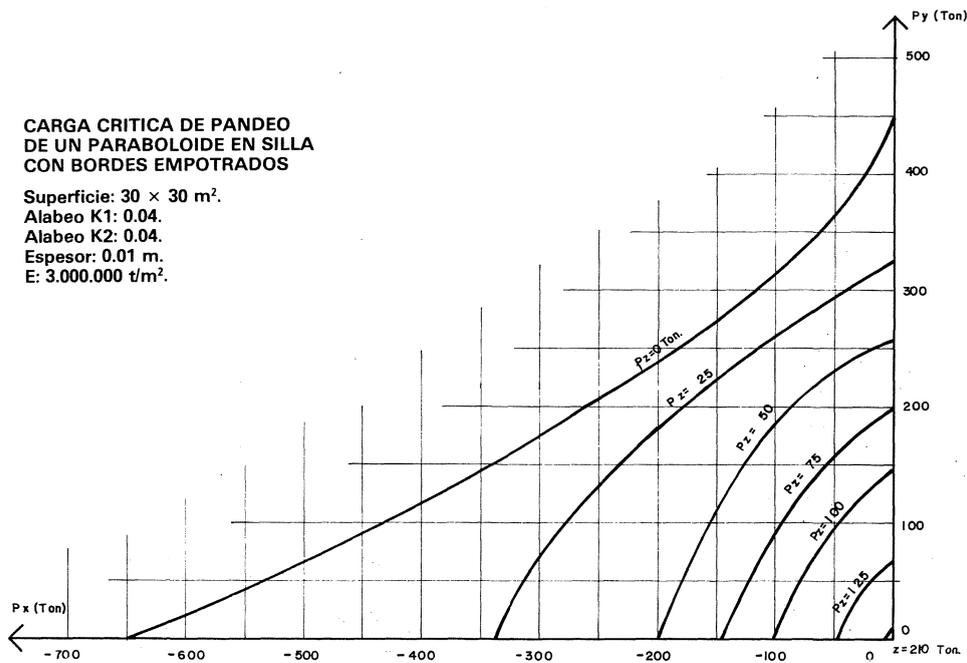


Figura 4.

De todos estos resultados, si bien no podemos obtener una formulación compacta, sí sacaremos unas conclusiones generales de utilidad para el cálculo y dimensionamiento de paraboloides hiperbólicos.

a) En primer lugar, comparando con la carga de Reissner P_r , la carga crítica P_{cr} realmente obtenida es:

- En paraboloides en silla con bordes articulados $P_{cr} = 0,26P_r$.
- En paraboloides en silla con bordes empotrados $P_{cr} = 0,92P_r$.
- En paraboloides con bordes rectos y empotrados $P_{cr} = 0,41P_r$.
- En paraboloides con bordes rectos y empotrados $P_{cr} = 0,72P_r$.

b) Las cargas P_x y P_y tienen gran importancia para acelerar o retrasar la carga de pandeo. Si actúan en los sentidos que indica la figura 11, que corresponde en planta a la figura 1, pueden llegar a provocar el pandeo por sí mismas del mismo modo que una pieza comprimida axialmente. En sentido contrario, figura 12, no pueden producir el pandeo y disminuyen e incluso anulan los

CARGA CRITICA DE PANDEO DE UN PARABOLOIDE EN SILLA CON BORDES ARTICULADOS

Superficie: $30 \times 30 \text{ m}^2$.
 Alabeo K1: 0.04.
 Alabeo K2: 0.04.
 Espesor: 0.1 m.
 E: $3.000.000 \text{ t/m}^2$.

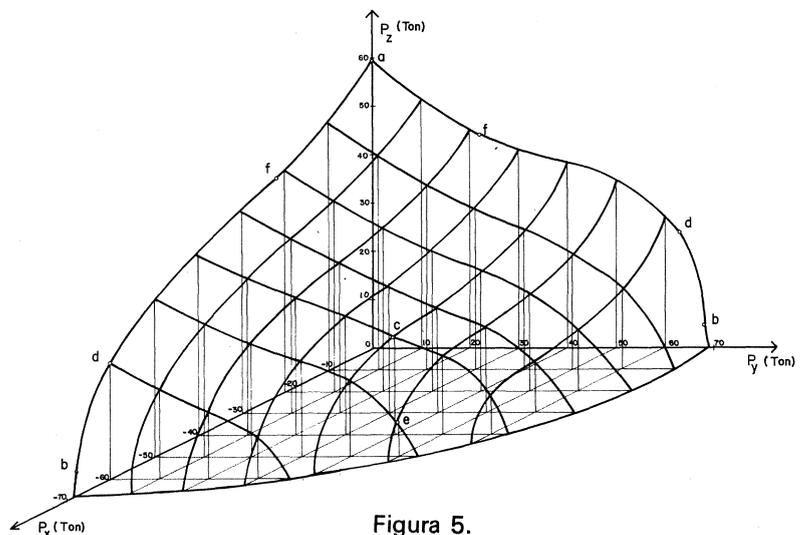


Figura 5.

efectos de P_z . De alguna manera podemos decir que el paraboloides está totalmente en tracción. En otras direcciones, figuras 13, 14, el fenómeno dependerá de la magnitud relativa de P_x y P_y , pues mientras una de ellas comprime, la otra tracciona.

- c) El tipo de contorno influye notablemente en la resistencia al pandeo con fuerzas P_x y P_y . En general, por la antimetría de forma respecto de un plano tangente al vértice de la estructura, pandea con cargas asimétricas, excepto para paraboloides en silla con bordes empotrados.
- d) En general, los valores de pandeo de P_x y P_y son mayores que los de P_z lo cual puede servir como criterio de predimensionamiento al ser el valor P_{zcr} fácil de obtener.
- e) De una forma simplificada y a efectos de predimensionado, los valores P_x , P_y , P_z que compuestos hacen la estructura inestable, pueden situarse sobre una superficie plana que une los vértices ($P_x = 0, P_y = 0$), ($P_x = 0, P_z = 0$), ($P_y = 0, P_z = 0$).
- f) El haber utilizado sistemas de ecuaciones no lineales, resueltos por métodos iterativos, nos aporta un mejor conocimiento del funcionamiento de la estructura que de haberlo hecho por un procedimiento de autovalores, como es habitual. En primer lugar obtenemos valores más bajos de las cargas críticas. En segundo lugar nos permite fijar aquéllos en función de unas flechas máximas admisibles.

Los valores de Reissner quedan todos del lado desfavorable y aun los nuestros no se han limitado con el criterio de flechas con el que hubiéramos obtenidos valores de pandeo todavía más bajos.

CARGA CRÍTICA DE PANDEO DE UN PARABOLOIDE EN SILLA CON BORDES ARTICULADOS

Superficie: $30 \times 30 \text{ m}^2$.
 Alabeo K1: 0.04.
 Alabeo K2: 0.04.
 Espesor: 0.1 m.
 E: $3.000.000 \text{ t/m}^2$.

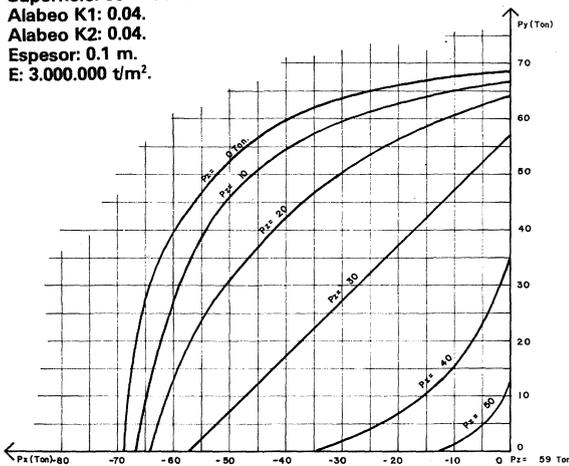


Figura 6.

CARGA CRÍTICA DE PANDEO DE UN PARABOLOIDE CON BORDES RECTOS Y EMPOTRADOS

Superficie: $30 \times 30 \text{ m}^2$.
 Alabeo K1: 0.04.
 Alabeo K2: 0.04.
 Espesor: 0.01 m.
 E: $3.000.000 \text{ t/m}^2$.

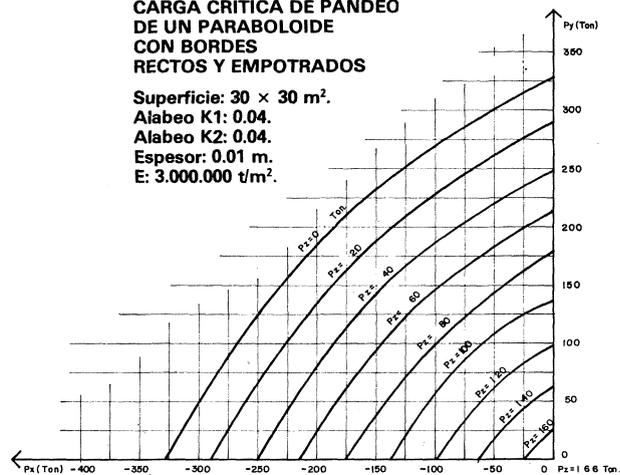


Figura 8.

CARGA CRÍTICA DE PANDEO DE UN PARABOLOIDE CON BORDES RECTOS Y EMPOTRADOS

Superficie: $30 \times 30 \text{ m}^2$.
 Alabeo K1: 0.04.
 Alabeo K2: 0.04.
 Espesor: 0.1 m.
 E: $3.000.000 \text{ t/m}^2$.

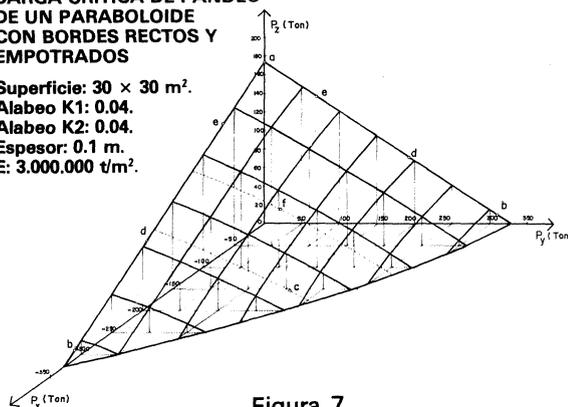


Figura 7.

CARGA CRÍTICA DE PANDEO DE UN PARABOLOIDE CON BORDES RECTOS Y ARTICULADOS

Superficie: $30 \times 30 \text{ m}^2$.
 Alabeo K1: 0.04.
 Alabeo K2: 0.04.
 Espesor: 0.01 m.
 E: $3.000.000 \text{ t/m}^2$.

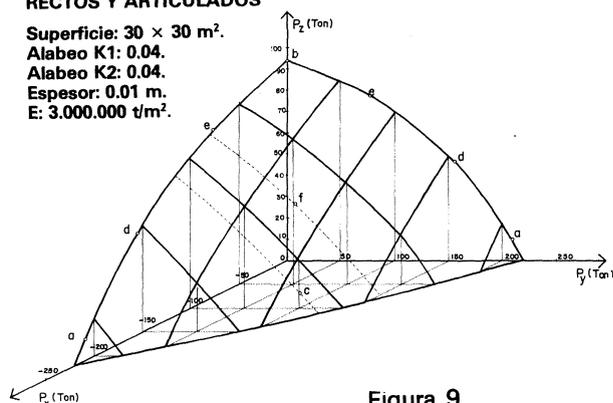
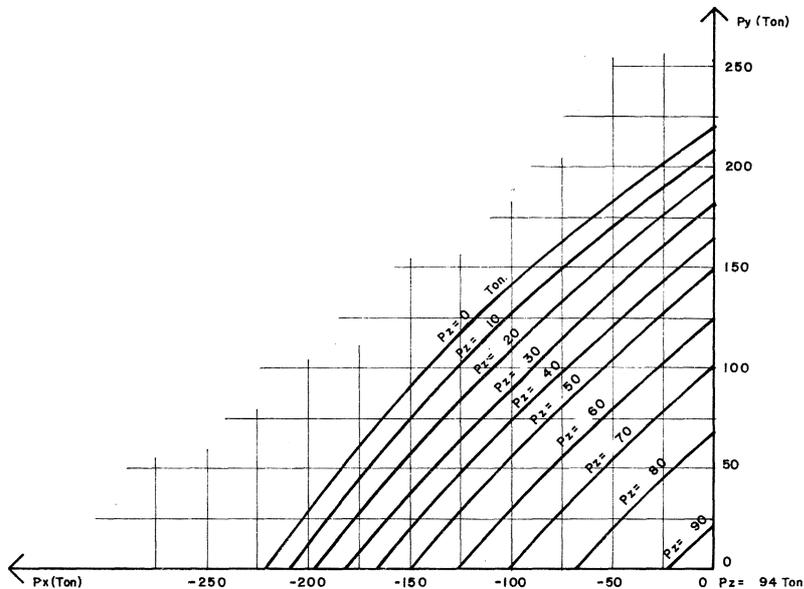


Figura 9.



CARGA CRITICA DE PANDEO DE UN PARABOLOIDE CON BORDES RECTOS Y ARTICULADOS

Superficie: $30 \times 30 \text{ m}^2$.
 Alabeo K1: 0.04.
 Alabeo K2: 0.04.
 Espesor: 0.1 m.
 $E: 3.000.000 \text{ t/m}^2$.

Figura 10.

Estas conclusiones responden de una manera elemental al análisis de los casos particulares desarrollados, pero las posibilidades del programa son mucho más extensas. Nosotros vamos a seguir este estudio ampliándolo a los siguientes casos:

1. Cargas puntuales y concentradas.
2. Cargas no uniformes.
3. Introduciendo una nueva subrutina calcularemos los esfuerzos y las limitaciones de carga por agotamiento del material.

Estos tres temas no requieren ningún cambio conceptual y son una consecuencia lógica del proceso de nuestro trabajo. Su utilidad puede todavía ampliarse del siguiente modo:

4. Si en vez de utilizar un módulo de elasticidad E constante sustituimos éste por una curva de valores reales relacionando tensión-deformación, podremos obtener el comportamiento no lineal de los paraboloides incluyendo la no linealidad elástica del material.

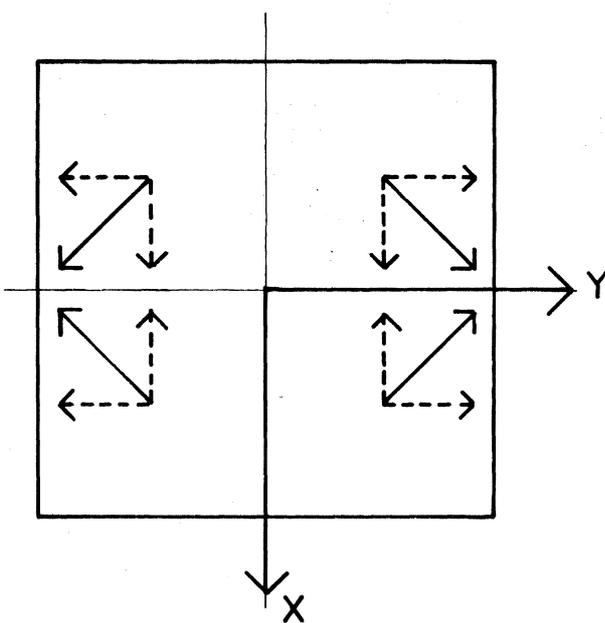


Figura 11.

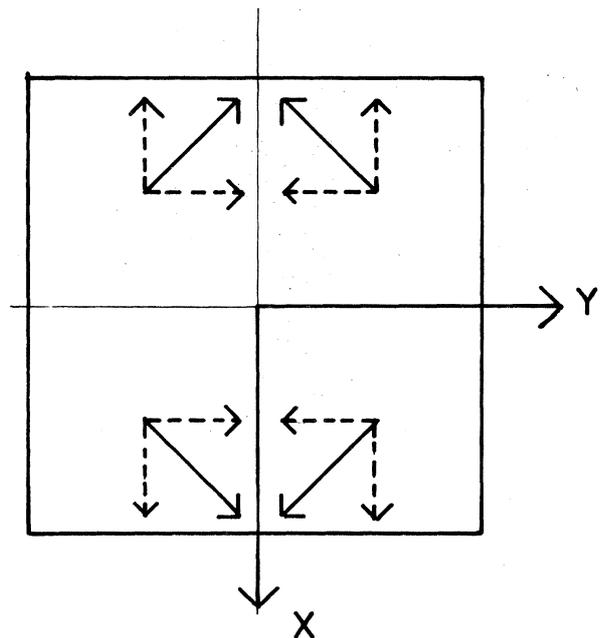


Figura 12.

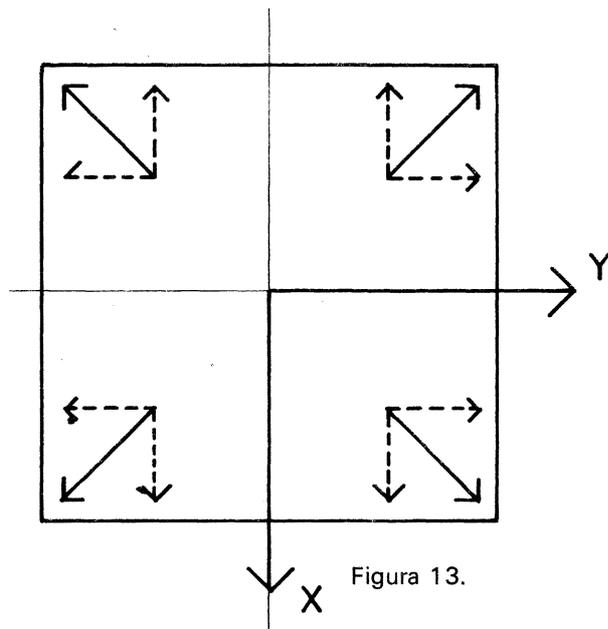


Figura 13.

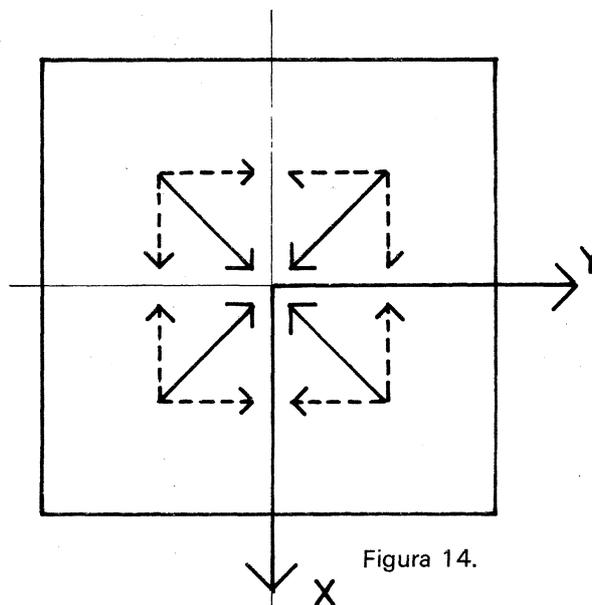


Figura 14.

5. Igualmente, si en vez de utilizar unos coeficientes de Lamé A y B constantes en todos los ciclos y ligados a la geometría inicial de la estructura los elaboramos en cada ciclo con los desplazamientos existentes, podremos refinar el estudio incluyendo las grandes deformaciones.

BIBLIOGRAFIA

1. BANAVALKAR, P. V., y GERGELY, P.: «Analysis of Thin Steel Hyperbolic Paraboloid Shells». ASCE Str. Div. Vol. 98, noviembre 1972.
2. BANERJEE, A. K.: «Analysis of Orthotropic Hyperbolic Paraboloid Shells». Dissertation Abstracts. V. 34: 4 (B). Ph. D. Thesis. Cornell Univ. (1973).
3. BEG, M. I.: «Finite Difference Approach to Hyperbolic Paraboloids». ASCE Str. Div. Febrero 1972.
4. DAYARATMAN, P.: «Buckling and Bending Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells». Dissertation Abstracts. Ph. D. Thesis Univ. of Colorado (1962).
5. LEONE, D.: «Buckling of Hyperbolic Paraboloid Shells». Ph. D. Thesis. Rensselaer Polytechnic Institute (1972).
6. NOVOZHILOV, V. V.: «Thin Shell Theory». Wolters-Noordhoff Publishing. Groningen, 1970.
7. REISSNER, E.: «On Some aspects of the theory of thin Elastic Shells». Journ. of the Boston Soc. of C. E. (1955).

résumé

FLAMBEMENT DES PARABOLOIDES HYPERBOLIQUES AVEC DES CHARGES UNIFORMES EN TOUTE DIRECTION

Félix Escrig, Dr. architecte
Gonzalo Martín, architecte

Cet article porte sur l'obtention de la charge critique de flambement dans un paraboloïde hyperbolique ayant des charges uniformes en toute direction, suivant un critère différent de celui de Reissner, généralement suivi jusqu'à présent.

Pour cela, au lieu de partir d'un système général, fonction de contraintes et de déplacements, on utilise un concept différent: celui du minimum de l'énergie potentielle totale. Des déplacements, et non pas des efforts, sont rapportés par l'équation canonique du paraboloïde.

La résolution, par un programme d'ordinateur, du système d'équations qui en résulte permet de signaler que les valeurs de Reissner sont du côté défavorable, bien qu'on n'ait pas suivi, dans ce travail, le critère de flèches qui aurait permis d'obtenir des valeurs de la charge critique de flambement encore plus petites.

Le perfectionnement de la méthode permettra, à l'avenir, d'élargir son domaine d'application.

summary

HYPERBOLIC PARABOLOID BUCKLING WITH EVEN LOADS IN ANY DIRECTION

Félix Escrig, Dr. Architect
Gonzalo Martín, Architect

This article discusses how to obtain the critical buckling load in a hyperbolic paraboloid, with even loads in any direction, following a different criterion to Reissner, that has commonly been used up until now.

Consequently, instead of using a general system, function of tensions and displacements, a different concept is used: that of minimum of the total potential energy. Likewise, displacements and not efforts are related, through the paraboloid canonic equation.

The equation system is resolved through a computer program that permits the indication that the Reissner values remain on the unfavourable side, in spite of the fact that the arrows criterion has not been used in this work, and with which even smaller buckling critical load values would have been obtained.

In the future, by perfecting this method, its field of application can be increased.

zusammenfassung

BIEGUNG HYPERBOLISCHER PARABOLOIDE MIT GLEICHMAESSIGEN LASTEN IN JEDER RICHTUNG

Dr. Félix Escrig, Architekt
Gonzalo Martín, Architekt

Dieser Artikel handelt von der Berechnung der kritischen Last auf Grund der Biegung in hyperbolischen Paraboloiden unter gleichförmiger Belastung in allen Richtungen, wobei ein von Reissner abweichendes Kriterium Berücksichtigung findet, denn bisher wurde normalerweise das erste angewandt.

Anstatt von einem allgemeinen System, Spannungs- und Gleitfunktionen auszugehen, wird ein unterschiedliches Konzept eingesetzt; und zwar das der minimalen Gesamtpotentialenergie. Weiterhin werden Verschiebungen, nicht Belastungen, über die kanonische Gleichung des Paraboloides in Zusammenhang gebracht.

Die Lösung des erhaltenen Gleichungssystem mit Hilfe eines Computerprogrammes ermöglicht die Angabe, dass die Werte Reissners auf der ungünstigen Seite liegen, obgleich bei dieser Arbeit nicht die Pfeilkriterien eingesetzt wurden, mit welchen man noch kleinere Werte für die kritische Biegebelastung erhalten hätte.

Die Vollständigkeit der Methode wird in der Zukunft eine Erweiterung ihres Anwendungsbereiches ermöglichen.