

cálculos estructurales basados en la Instrucción **EH-73** ejemplos

JULIAN NAVARRO GUTIERREZ,
Dr. arquitecto

400 - 4

sinopsis

Se trata de varios ejemplos de cálculo con la teoría de rotura incluida en la Instrucción EH-73. En el ejemplo 1.º se estudia una barra de sección rectangular constante con carga uniforme y perpendicular a su eje, es decir, con secciones en situación de flexión simple; se analizan tres casos particulares entre los posibles de este ejemplo. En el ejemplo 2.º se considera el caso de un pórtico compuesto por un dintel y dos columnas, para que en el cálculo de las secciones intervengan cargas axiales, o sea, para que las secciones de las barras se hallen en situación de flexión compuesta; las cargas exteriores de esta estructura, cuyo cálculo general se realiza mediante las fórmulas de cualquier formulario de esta materia, producen acciones en las secciones de sus barras en las que predomina la flexión. Finalmente, en el ejemplo 3.º interviene el mismo pórtico del anterior, pero con unas cargas exteriores elegidas de manera que en algunas de sus barras predominen las acciones axiales, es decir, que se presenten secciones en situación de compresión compuesta. De este modo se intenta dar una información concreta y casi general sobre la aplicación de la mencionada teoría de la rotura al cálculo de las barras de sección rectangular constante.

IDEAS GENERALES

La vigencia, ya con carácter exclusivo, de la «Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado EH-73» plantea cuestiones de adaptación que se han de ir paulatinamente resolviendo. Aquí vamos a tomar en consideración su capítulo VII. CALCULO DE SECCIONES. Es necesario disponer de métodos ágiles y sencillos para el proyecto de las estructuras, que conduzcan fácilmente a las soluciones de los problemas de dimensionamiento de sus secciones. El texto de la Instrucción, que es suficiente para lo que pretende determinar, no se presta a los cálculos inductivos ni a las variadas operaciones de cálculo. En mi libro *Cálculo de las secciones de hormigón armado con el criterio de rotura de la Instrucción EH-73*, editado por la Escuela Universitaria de Arquitectura Técnica de Madrid, en el presente año 1977, doy un repertorio numeroso de planteamientos resueltos, que quizás sea incrementable en futuras ediciones. Creo, sin embargo, que la mayor parte de los planteamientos usuales figuran en él, y que los omitidos involuntariamente pueden ser deducidos fácilmente de su contexto. Creo también que para informar sobre la aplicación de este capítulo VII de la Instrucción el procedimiento más directo es desarrollar ante el lector algunos ejemplos numéricos. Para la realización de estos cálculos he elegido algunos ejemplos muy sencillos. Lo que interesa en ellos no es la obtención de las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes o esfuerzos axiales. Lo que en ellos interesa es la obtención o determinación de sus secciones. Vamos a considerar exclusivamente seccio-

nes rectangulares, cuyos parámetros definidores son: b y h para la sección de hormigón, U'_s para la armadura comprimida o para la más comprimida, U_s para la armadura traccionada o para la menos comprimida. A veces en vez del parámetro h puede figurar el d o canto útil, relacionados por la igualdad $h = d(1 + \varrho)$, en la que ϱ representa el coeficiente de recubrimiento de las armaduras, siendo $d' = \varrho \cdot d$ el espesor de dicho recubrimiento. Las notaciones U'_s , U_s de las armaduras corresponden a sus capacidades mecánicas y no a las dimensiones de sus secciones. La carga exterior de una sección es una fuerza N perpendicular a su plano, aplicada en un punto de su eje de simetría, que es el paralelo a la dimensión h o d , a la distancia e del centro de U_s . La distancia del punto de aplicación de N al centro de la sección de hormigón es ε . El momento flector o momento central es $M = N \cdot \varepsilon$. El momento excéntrico es $N \cdot e$. Si f_c es el coeficiente de fluencia del hormigón, se llama parámetro selector al número $Z = N/(b \cdot e \cdot f_c)$ o al número $Z = N/(4b \cdot \varepsilon \cdot f_c)$, según los casos. El parámetro selector indica la situación mecánica de la sección. Las situaciones mecánicas posibles de una sección son: de compresión compuesta, de sección neutra, de flexión compuesta. Si con U_c se representa la capacidad mecánica de la sección de hormigón, otro parámetro muy importante es el r definido por la igualdad $U'_s = r \cdot U_c$. Pues bien, a cada valor de Z corresponde un intervalo determinado del parámetro r . A cada valor de r corresponde una sección posible y todas las secciones posibles son las correspondientes a los valores de r en el indicado intervalo. Muy importante también es, dentro de a sección $b \cdot h$ o $b \cdot d$, la profundidad y del rectángulo $b \cdot y$ y del área de hormigón comprimido. Son esenciales las situaciones siguientes:

- en compresión (compuesta o simple) $y = h$;
- en sección neutra $y = d$;
- en flexión (compuesta o simple) $y \leq 0,45d$.

El momento exterior excéntrico y el momento tope de la sección son iguales siempre en los dos casos primeros, y en el caso tercero también cuando $y = 0,45d$. El parámetro selector determina la distribución de los esfuerzos interiores del hormigón en todos los casos en que el momento exterior excéntrico es igual al momento tope de la sección.

El parámetro selector puede tener cualquier valor del campo de los números reales. A cada valor de ϱ corresponden dos intervalos finitos y uno semiinfinito de los posibles valores de Z . Dichos intervalos son:

con e		S. NEUTRAS			S. NEUTRAS				con ε
ϱ		Inf.	Sup.			Inf.	Sup.		ϱ
0,06	0	1,220	1,579	∞	0	0,604	1,625	∞	0,06
0,08	0	1,203	1,644	∞	0	0,605	1,692	∞	0,08
0,10	0	1,188	1,709	∞	0	0,606	1,761	∞	0,10
0,12	0	1,172	1,783	∞	0	0,607	1,834	∞	0,12
0,14	0	1,157	1,857	∞	0	0,607	1,911	∞	0,14
0,16	0	1,142	1,933	∞	0	0,608	1,990	∞	0,16
0,18	0	1,128	2,012	∞	0	0,609	2,074	∞	0,18
0,20	0	1,114	2,100	∞	0	0,610	2,162	∞	0,20
0,22	0	1,101	2,190	∞	0	0,611	2,254	∞	0,22
		FLEX. COMPR.				FLEX. COMPR.			

Por ejemplo, si es $\varrho = 0,22$, los tres intervalos posibles del valor Z , calculado con e , son $(0, 1,101)$, $(1,101, 2,190)$, $(2,190, \infty)$, respectivamente correspondientes a flexión, a sección neutra y a compresión.

Queda sobreentendido que la compresión simple, como caso particular de la compuesta, corresponde a $\varepsilon = 0$ o $e = 0,50(d - d')$, y que la flexión simple, como caso particular de la compuesta, corresponde a $N = 0$.

La construcción de una barra estructural exige, no la determinación de una, sino la de todas sus secciones. Naturalmente, esto se hace calculando algunas de ellas e interpolando después los resultados. Por ejemplo, si se trata de una viga de sección constante sobre dos apoyos con cargas verticales, se calcula la sección más cargada, o sea, la de mayor momento flector, determinando en ella los parámetros b , h , U'_s , U_s ; seguidamente se calculan otras en las que b y h ya figuran como datos, etc.

En todos los cálculos tiene que haber dos incógnitas, puesto que son dos las ecuaciones del equilibrio en la rotura de la sección, y todas las restantes magnitudes tienen que ser conocidas. El par de incógnitas puede ser: (d, U_s) , (U'_s, U_s) , (y, U_s) , etc.

Si las dimensiones $b \cdot h$ de la sección han quedado ya establecidas, puede haber en la barra sitios en los que estas dimensiones excedan a las que serían requeridas por las acciones exteriores que en ellos se ejercen. En tal caso es indudable que estas secciones no pueden cumplir las ecuaciones de la rotura. Por consiguiente, hay generalmente en cada barra unas partes que se pueden calcular con dichas ecuaciones y otras que no. Como separación entre unas y otras partes intervienen las secciones límite. Como datos de una sección límite se tienen b , d , d' , N , f_c . Cuando sea $N/(b \cdot f_c) \geq d'$ se adoptarán los valores $y = N/(b \cdot f_c)$, $U'_s = U_s = 0,04U_c$. Cuando sea $N/(b \cdot f_c) < d'$ se adoptarán los valores $y = d'$, $U'_s = 0,04U_c$, y para la otra armadura $U_s = (b \cdot d' \cdot f_c) + U'_s - N$.

Una vez determinada la sección límite de este modo, se calcula el momento flector que le corresponde y seguidamente, mediante la ley de momentos flectores, se calculan las abscisas de las secciones límite. En particular, cuando es $y = d'$ el momento excéntrico vale $m = (0,04 + 0,96\varrho - 0,50\varrho^2) d \cdot U_c = \lambda \cdot d \cdot U_c$, con:

$\lambda =$	0,0994	0,1200	0,1410	0,1624	0,1842	0,2064	0,2290	0,2520	0,2754
$\varrho =$	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22

En una sección no comprimida la expresión de su momento tope es

$$\mu = [0,35 + r(1 - \varrho)] d \cdot U_c.$$

Los valores de r han de estar comprendidos entre 0,04 y 0,50.

En la figura 1 se muestran las notaciones utilizadas para las principales magnitudes que intervienen en una sección rectangular.

En la figura 2 se muestran las distribuciones características de los esfuerzos interiores del hormigón y de las armaduras:

- A) La profundidad de la zona comprimida es $y = h$, y las dos armaduras U'_s , U_s están comprimidas. Corresponde a la situación de compresión compuesta o de compresión simple.
- B.1) La profundidad de la zona comprimida es $y = d$, y las dos armaduras U'_s , U_s están comprimidas. Corresponde a la situación de sección neutra.
- B.2) La profundidad de la zona comprimida es $y = d$, con la armadura U'_s en compresión y la armadura U_s en tracción. Corresponde a la situación de sección neutra.
- C) La profundidad y de la zona comprimida está entre los límites $d' \leq y \leq 0,45d$, con la armadura U'_s en compresión y la armadura U_s en tracción. Corresponde a la situación de flexión compuesta o flexión simple.
- D.1) La profundidad de la zona comprimida es $y = d'$, U'_s está en compresión, U_s está en tracción. Corresponde a situación de sección límite.
- D.2) La profundidad de la zona comprimida es $y = d'$, ambas armaduras están en tracción. Corresponde a situación de sección límite.

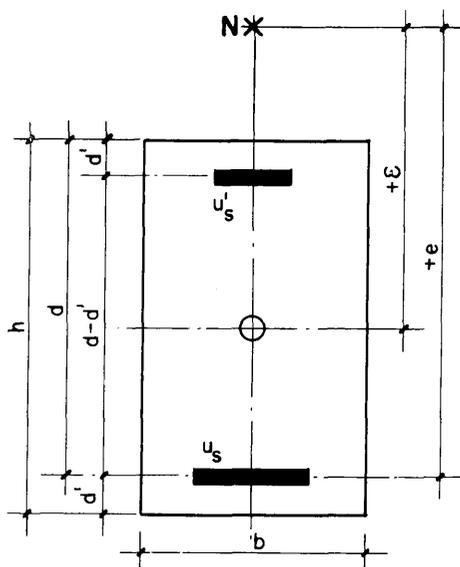


Fig. 1

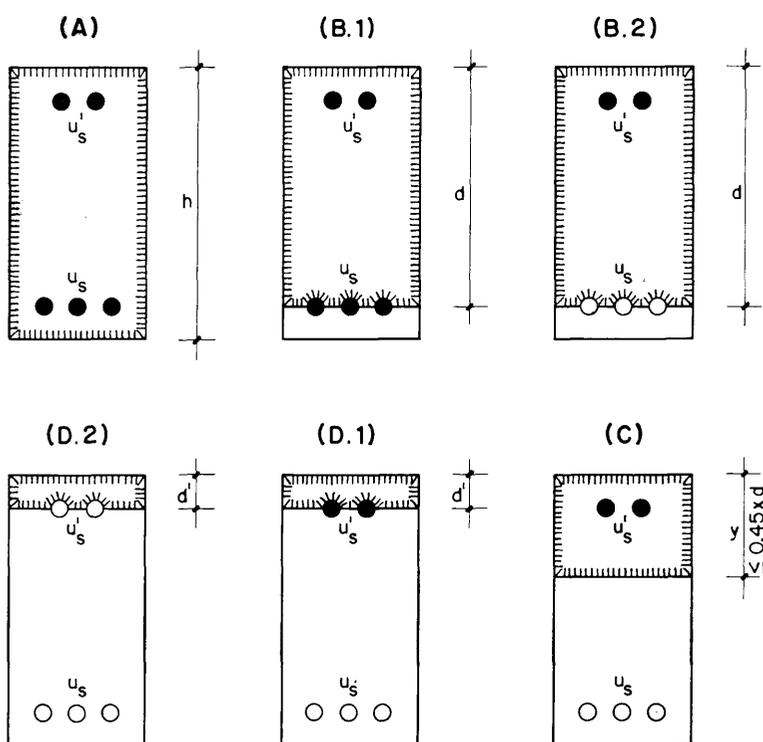


Fig. 2

En los ejemplos que se desarrollarán más adelante se presentan varios casos particulares de cálculos de secciones, enlazados unos con otros para llegar a la determinación completa de cada barra. Estas concatenaciones son iguales o muy parecidas a las que se presentan cuando los cálculos están basados en la parte elástica del diagrama fuerza-deformación.

En todos los ejemplos siguientes se supone que el hormigón y el acero empleados corresponden a las designaciones H-150, S-4.000, respectivamente. Ambos materiales son compatibles en virtud del artículo 28.3 de la I. EH-73. Los coeficientes minorados de estos materiales, respectivamente, son:

$$f_c = 150/1,50 = 100 \text{ kp/cm}^2 \text{ (coef. de min. del hormigón = 1,5);}$$

$$f_s = 4.000/1,15 = 3.478 \text{ kp/cm}^2 \text{ (coef. de min. del acero = 1,15).}$$

Coefficiente minorado del esfuerzo cortante en el hormigón según el artículo 35.2 de la I. EH-73:

$$f_t = (0,50 \sqrt{150})/1,15 = 5,32 \approx 5 \text{ kp/cm}^2.$$

Coefficiente de mayoración para las acciones o cargas: 1,6.

Antes de terminar este párrafo preliminar debe quedar advertido que las comprobaciones incorporadas al final de algunos cálculos miden realmente el grado de precisión de los procesos empleados en relación con sus hipótesis de partida. No miden, en absoluto, el grado de exactitud de las soluciones en relación con el proceso físico real y verdadero, que está fundamentalmente condicionado por la simplificación utilizada del gráfico esfuerzo-deformación.

EJEMPLO 1.º

Viga *AB*, figura 3, de un tramo, de sección rectangular constante, sobre dos apoyos *A*, *B*, con carga uniforme vertical de valor $c = 2.500 \text{ kp/m}$. La luz entre apoyos es $L = 10 \text{ m}$. El ancho de la sección es $b = 35 \text{ cm}$. La carga mayorada vale $2.500 \times 1,6 = 4.000 \text{ kp/m}$.

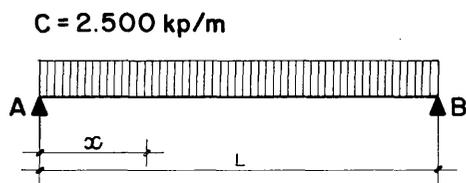


Fig. 3

El planteamiento inicial para el cálculo de esta barra puede ser establecido de muchas maneras. Entre ellas elegimos, como suficientemente informativos, los siguientes:

- Se atribuye a la altura h de la sección un valor bastante grande, por ejemplo $h = 3b = 105 \text{ cm}$, comprobando que está permitido por el artículo 32.1.b) de la I. EH-73; pero advirtiéndose que los cocientes h/b muy grandes no son recomendables por corresponder a vigas que pueden tener una flexibilidad lateral excesiva.
- Se adoptan como incógnitas de la sección h , o el canto útil d , y la armadura U_s , junto con las condiciones de que en la sección central sea mínima la armadura de compresión, $U'_s = 0,04U_c$, y sea máxima la profundidad del hormigón comprimido, $y = 0,45d$. En esta sección, con esta situación, el momento exterior es igual al momento tope de ella.
- Se adoptan como incógnitas de la sección central h o d , y la armadura de tracción U_s , debiendo ser máxima la armadura de compresión, $U'_s = 0,50U_c$, y también máxima la profundidad del hormigón comprimido, $y = 0,45d$. El valor que resulta para d en este caso es el mínimo absoluto entre todos los posibles. El momento exterior de esta sección es igual a su momento tope.

En todas las secciones de la viga es $N = 0$ y, por consiguiente, es $Z = 0$. El correspondiente intervalo de r es $(0,00; 0,50)$. Sin embargo, debe utilizarse solamente el intervalo $(0,04; 0,50)$.

Caso a) Las dos dimensiones de la sección de hormigón están previamente determinadas. Sus valores son $b = 35 \text{ cm}$, $h = 105 \text{ cm}$. El peso propio unitario mayorado de la barra es $0,35 \times 1,05 \times 2.500 \times 1,6 = 1.470 \text{ kp/m}$ y la carga de cálculo mayorada que resulta es $4.000 + 1.470 = 5.470 \text{ kp/m}$. Todas las secciones están en flexión simple, porque siempre es $N = 0$, y la sección central soporta el momento máximo, cuyo valor mayorado es $M = (5.470 \times 10^2/8) \times 100 = 6.837.500 \text{ cm} \cdot \text{kp}$. Para aplicar las condiciones de compatibilidad que figuran

en la Instrucción, cuya conocida forma es $U'_s(d - d') \leq M \leq 0,35d \cdot U_c + U'_s(d - d')$, hay que determinar el coeficiente de recubrimiento $\varrho = 0,06$ y calcular las siguientes magnitudes:

$d = h/(1 + \varrho) = 105/1,06 = 99,06$ cm; $d' = 0,06 \times 99,06 = 5,94$ cm; $U_c = b \cdot d \cdot f_c = 35 \times 99,06 \times 100 = 346.710$ kp. Conocidas estas magnitudes se pueden calcular, independientemente de las cargas exteriores, el momento de la sección límite, y los momentos tope mínimo y máximo de la sección de hormigón. Dichos valores en este caso son:

$$m = \lambda \cdot d \cdot U_c = 0,0994 \times 99,06 \times 346.710 = 3.413.902 \text{ cm} \cdot \text{kp};$$

$$\mu_1 = [0,35 + 0,04 \times (1 - 0,06)] \times 99,06 \times 346.710 = 13.312.158 \text{ cm} \cdot \text{kp};$$

$$\mu_2 = [0,35 + 0,50 \times (1 - 0,06)] \times 99,06 \times 346.710 = 28.162.976 \text{ cm} \cdot \text{kp};$$

y las condiciones de compatibilidad para este caso son: $m < M < \mu_1 < \mu_2$.

Si la primera condición no se cumpliese, es decir, cuando $m > M$ la sección no es adecuada, es demasiado grande. La condición $M < \mu_1$ indica que ningún momento tope de la sección puede ser igual a M , es decir, que ha de ser $y < 0,45d = 0,45 \times 99,06 = 44,58$ cm, y también que la armadura de compresión puede tener el valor mínimo $U'_s = 0,04U_c$. Por consiguiente, como datos de la sección central se conocen b , d , M , U'_s y ϱ . Sus incógnitas son U_s e y , que se pueden obtener con el proceso 9.2 en la siguiente forma:

$$p = \frac{M}{d \cdot U_c} - r(1 - \varrho) = \frac{6.837.500}{99,06 \times 346.710} - 0,04 \times 0,94 = 0,199 - 0,0376 = 0,161.$$

A este valor de $p = 0,161$ corresponde en el gráfico GR-9 el valor $q = 0,177$, y con él se prosigue el cálculo:

$$y = q \cdot d = 0,177 \times 99,06 = 17,53 \text{ cm};$$

$$U'_s = r \cdot U_c = 0,04 \times 346.710 = 13.868 \text{ kp};$$

$$U_s = q \cdot U_c + U'_s = 0,177 \times 346.710 + 13.868 = 75.236 \text{ kp};$$

$$A'_s = U'_s/f_s = 13.868/3.478 = 3,99 \text{ cm}^2;$$

$$A_s = U_s/f_s = 75.236/3.478 = 21,63 \text{ cm}^2.$$

El 100 % de aprovechamiento de la sección de hormigón corresponde, como se ha visto, al valor $y = 44,58$ cm. Como el valor calculado en la sección central es $y = 17,53$ cm, en este caso el aprovechamiento de la sección de hormigón es solamente el 39 %.

Es muy importante hallar la situación de las secciones de la viga cuyo momento flector es igual al momento m de la sección límite. Puesto que la ley de momentos flectores es $M = 27.350x - 2.735x^2$, en $m \cdot \text{kp}$, y con el origen de las abscisas en A , figura 3, las abscisas de dichas secciones son las raíces de $34.139,02 = 27.350x - 2.735x^2$, cuyos valores son $x_1 = 1,46$ m, $x_2 = 8,54$ m. La armadura de compresión en la sección límite es $U'_s = 0,04U_c = 13.868$ kp, y la armadura de tracción vale $U_s = (35 \times 5,94 \times 100) + 13.868 = 34.658$ kp.

Entre cada extremo de la viga y su sección límite más próxima todas las secciones deben ser iguales a dicha sección límite.

En el tramo situado entre las dos secciones límite todas las secciones son calculables con el mismo proceso 9.2.

Por ejemplo, en la sección cuya abscisa es $x = 3$ m, el momento flector vale $M = (3 \times 27.350) - (9 \times 2.735) = 57.435 \text{ m} \cdot \text{kp} = 5.743.500 \text{ cm} \cdot \text{kp}$. En esta

sección el valor de U'_s ha de ser el correspondiente a $r = 0,04$ y, por consiguiente, las dos incógnitas de ella son U_s y la profundidad y . Se calcularán:

$$p = \frac{5.743.500}{99,06 \times 346.710} - 0,04(1 - 0,06) = 0,13 \quad ; \quad q = 0,138 \text{ (GR-9);}$$

$$y = 0,138 \times 99,06 = 13,67 \text{ cm} \quad ; \quad U'_s = 13.868 \text{ kp;}$$

$$U_s = (0,138 \times 346.710) + 13.868 = 61.714 \text{ kp.}$$

Caso b) No se conoce el canto útil d y se quiere calcularlo en la sección central con el máximo aprovechamiento de la sección de hormigón y la mínima armadura de compresión. Hace falta «suponer» un valor de h para poder calcular el peso propio de la viga. Con $h = 0,75$ m, el peso propio mayorado es:

$$0,35 \times 0,75 \times 2.500 \times 1,6 = 1.050 \text{ kp/m;}$$

y la carga de cálculo mayorada es: $4.000 + 1.050 = 5.050$ kp/m. El momento máximo vale: $(5.050 \times 10^2/8) \times 100 = 6.312.500$ m · kp. En la sección central las incógnitas son d y U_s . Corresponde a este caso de cálculo el proceso 9.1. Adoptando el coeficiente de recubrimiento $\varrho = 0,08$, se obtiene:

$$K_3 = 0,45 + r = 0,45 + 0,04 = 0,49;$$

$$K_4 = 0,35 + r(1 - \varrho) = 0,35 + (0,04 \times 0,92) = 0,3868;$$

$$d = \sqrt{\frac{6.312.500}{0,3868 \times 35 \times 100}} = 68,28 \text{ cm;}$$

$$d' = 0,08 \times 68,28 = 5,46 \text{ cm;}$$

$$h = d + d' = 68,28 + 5,46 = 73,74 \text{ cm;}$$

$$U_c = 35 \times 68,28 \times 100 = 238.980 \text{ kp;}$$

$$U'_s = 0,04 \times 238.980 = 9.559 \text{ kp;}$$

$$U_s = K_3 \cdot U_c = 0,49 \times 238.980 = 117.100 \text{ kp;}$$

$$A'_s = 9.559/3.478 = 2,75 \text{ cm}^2;$$

$$A_s = 117.100/3.478 = 33,67 \text{ cm}^2.$$

El momento de la sección límite es:

$$m = \lambda \cdot d \cdot U_c = 0,12 \times 68,28 \times 238.980 = 1.958.107 \text{ cm} \cdot \text{kp,}$$

y como la ley de los momentos flectores es $25.250x - 2.525x^2$, las abscisas de las secciones límite son las raíces de la ecuación:

$$19.581,07 = 25.250x - 2.525x^2,$$

cuyos valores son $x_1 = 0,85$ m; $x_2 = 9,15$ m. La armadura de tracción en la sección límite vale:

$$U_s = (35 \times 5,46 \times 100) + 9.559 = 28.669 \text{ kp.}$$

Todas las secciones pertenecientes a los intervalos (0,00; 0,85), (9,15; 10,00) serán iguales a la sección límite.

Todas las secciones situadas en el intervalo (0,85; 9,15) son calculables con el proceso 9.2. En cada una de ellas son datos las dimensiones de la sección de hormigón y la armadura de compresión, que es la mínima, $U'_s = 9.559$ kp. Las incógnitas son, en cada sección, la armadura de tracción U_s y la profundidad

de la zona de hormigón comprimido. A continuación se indican los números que resultan al hacer los cálculos correspondientes a dos secciones:

x	M	p	q	y	U'_s	U_s
2,20	43.329	0,229	0,263	17,96	9.559	72.411
3,60	58.176	0,320	0,398	27,18	9.559	104.673
m	m · kp			cm	kp	kp

Caso c) No se conoce el canto útil d y se quiere determinarlo en la sección central, con el máximo aprovechamiento de la sección de hormigón y la máxima armadura de compresión. Análogamente al caso anterior, para determinar el peso propio de la viga es preciso presuponer un cierto valor de h con $h = 50$ cm, por ejemplo la carga de cálculo mayorada es $(0,35 \times 0,50 \times 2.500 \times 1,6) + 4.000 = 4.700$ kp/m. Como valor del momento flector máximo se obtiene: $(4.700 \times 10^2/8) \times 100 = 5.875.000$ cm · kp. El proceso de cálculo es también en este caso el 9.1, con el valor $r = 0,50$ correspondiente a la armadura de compresión máxima. Para el coeficiente de recubrimiento se adopta $\rho = 0,10$.

Se obtiene sucesivamente:

$$K_3 = 0,45 + r = 0,45 + 0,50 = 0,95;$$

$$K_4 = 0,35 + r(1 - \rho) = 0,35 + (0,50 \times 0,90) = 0,80;$$

$$d = \sqrt{\frac{5.875.000}{0,80 \times 35 \times 100}} = 45,81 \text{ cm};$$

$$d' = 45,81 \times 0,10 = 4,58 \text{ cm};$$

$$h = 45,81 + 4,58 = 50,39 \text{ cm};$$

$$y = 0,45d = 0,45 \times 45,81 = 20,61 \text{ cm};$$

$$U_c = 35 \times 45,81 \times 100 = 160.335 \text{ kp};$$

$$U'_s = 0,50 \times 160.335 = 80.168 \text{ kp};$$

$$A'_s = 80.168/3.478 = 23,05 \text{ cm}^2;$$

$$U_s = 0,95 \times 160.335 = 152.318 \text{ kp};$$

$$A_s = 152.318/3.478 = 43,79 \text{ cm}^2.$$

El momento de la sección límite es:

$$m = \lambda \cdot d \cdot U_c = 0,141 \times 45,81 \times 160.335 = 1.035.637 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

Como la ley de los momentos flectores es $23.500x - 2.350x^2$, las abscisas de las secciones límite son las raíces de la ecuación:

$$10.356,37 = 23.500x - 2.350x^2,$$

cuyos valores son $x_1 = 0,46$ m; $x_2 = 9,54$ m. La armadura de compresión de una sección límite es $U'_s = 0,04 \times 160.335 = 6.413$ kp, y su armadura de tracción es $U_s = (35 \times 4,58 \times 100) + 6.413 = 22.443$ kp.

En los intervalos (0,00; 0,46), (9,54; 10,00) todas las secciones serán iguales a la sección límite.

En el intervalo (0,46; 9,54) todas las secciones son calculables, pero el cálculo posee un cierto grado de libertad que el operador tiene que utilizar a su gusto. Nosotros vamos a determinar un entorno simétrico, del punto central de la viga, en el que todas las secciones estarán en situación de momento tope. En la sección central el momento exterior es igual al momento tope máximo de la sección calculada. En las secciones extremas de dicho entorno el momento exterior es igual al momento tope mínimo de la sección calculada, cuyo valor es:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [0,35 + 0,04(1 - 0,10)] d \cdot U_c = 0,386 \times 45,81 \times 160.335 = \\ &= 2.835.149 \text{ cm} \cdot \text{kp}, \end{aligned}$$

y las abscisas de las secciones que tienen el momento flector μ_1 son las raíces de $28.351,49 = 23.500x - 2.350x^2$, cuyos valores son $x_3 = 1,40$ m, $x_4 = 8,60$ m. La armadura de compresión en estas secciones vale $U'_s = 6.413$ kp. La armadura de tracción vale: $U_s = (35 \times 20,61 \times 100) + 6.413 = 78.548$ kp.

Para calcular una sección cualquiera del indicado entorno se dispone del momento flector M correspondiente, de las dimensiones b , d y de la profundidad del hormigón comprimido. Las incógnitas en este caso son U'_s , U_s y se determinan mediante el proceso 9.3, cuya secuencia es:

$$\begin{aligned} K_4 &= M/(d \cdot U_c); \\ r &= (K_4 - 0,35)/(1 - \rho); \\ K_3 &= 0,45 + r; \\ U'_s &= r \cdot U_c; \\ U_s &= K_3 \cdot U_c. \end{aligned}$$

Aplicado a las secciones de abscisas $x = 2,60$ m y $x = 3,8$ m, los resultados son:

x	M	K_4	r	K_3	U'_s	U_s
2,60	45.214	0,616	0,296	0,746	47.459	119.610
3,80	55.366	0,754	0,449	0,899	71.990	144.141
m	m · kp				kp	kp

En todas las secciones de este entorno la diferencia entre las capacidades mecánicas de sus armaduras, o sea, $U_s - U'_s$, es la misma y tiene que ser igual a la carga en el área de hormigón comprimido o sea, $35 \times 20,61 \times 100 = 72.135$ kp. Las pequeñas discrepancias son debidas a la inevitable intervención de números aproximados y son insignificantes si se expresan en %.

Dentro de la parte calculable y fuera del entorno considerado anteriormente quedan los intervalos $(x_1, x_3) = (0,46, 1,40)$, $(x_4, x_2) = (8,60, 9,54)$ iguales por simetría. Dentro de ellos el valor de $U'_s = 0,04U_c$ permanece constante. Para calcular una de sus secciones se tienen como datos, el momento flector M correspondiente a la sección, las dimensiones de la sección de hormigón y la armadura de compresión U'_s , que es la mínima. En cada sección las incógnitas son la armadura de tracción U_s y la profundidad de la zona de hormigón comprimido y . Su obtención se realiza mediante el proceso 9.2. Por ejemplo, con $x = 0,92$ m, es $M = 19.631$ m · kp, y sucesivamente

$$p = \frac{1.963.100}{45,81 \times 160.335} - (0,04 \times 0,90) = 0,231; \quad q = 0,267 \text{ (en el GR-9);}$$

$$y = 0,267 \times 45,81 = 12,23 \text{ cm; } U_s = (0,267 \times 160.335) + 6.413 = 49.222 \text{ kp.}$$

Véase la figura 4 como resumen de los resultados obtenidos para las armaduras longitudinales.

Se ha dejado para este Caso *c*) una indicación sobre el cálculo de las armaduras transversales, porque le corresponden las más fuertes relativamente, al ser el canto d calculado en este caso el más pequeño posible, en relación con la carga dada y el ancho b de la sección también prefijado.

En una sección de la viga, de abscisa x en metros, referida al extremo *A* de ella, figura 3, el esfuerzo cortante total vale, en kp: $-23.500 + 4.700x$. El esfuerzo cortante medio o unitario en dicha sección es:

$$k = (-23.500 + 4.700x)/(0,90b \cdot d).$$

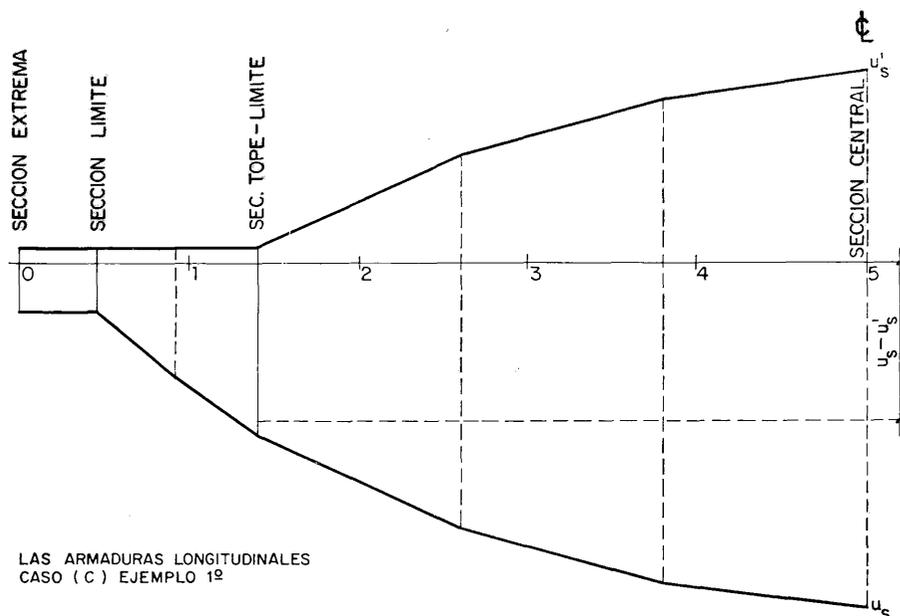


Fig. 4

En la misma sección la resistencia al esfuerzo cortante está expresada por la suma $5 + Z$, en la que 5 es la parte debida al hormigón y Z la parte producida por los estribos. (No relacionar esta significación de Z con la anterior). En secciones con $b = 35$ cm, estribos $\varnothing 6$ de dos ramas y 25 cm de equidistancia equivalen a $Z = 2,25$ kp/cm². La barra con esta armadura transversal puede resistir los esfuerzos cortantes totales iguales o menores que: $(0,90 \times 35 \times 45,81) \times (5 + 2,25) = 10.491$ kp. Dichos esfuerzos totales están entre las dos secciones cuyas abscisas son las raíces de las dos ecuaciones

$$\pm 10.491 = -23.500 + 4.700x,$$

que son $x_1 = 2,77$ m, $x_2 = 7,23$ m. Si los estribos fuesen del $\varnothing 8$ con dos ramas y equidistancia de 12,5 cm, sería: $Z = 8$ kp/cm², y la correspondiente resistencia de la sección resultaría: $(5 + 8) \times (0,90 \times 35 \times 45,81) = 18.759$ kp. Estos estribos se colocarían entre las secciones cuyas abscisas son las raíces de las dos ecuaciones

$$\pm 18.759 = -23.500 + 4.700x,$$

que son $x_3 = 1,00$ m, $x_4 = 9,00$ m, excluyendo en el intervalo (x_3, x_4) la parte del intervalo (x_1, x_2) que ya tiene sus propios estribos. La repetición de este proceso, cada vez con una disposición más fuerte de estribos, se puede seguir hasta cubrir la totalidad de la viga. Pero también se puede proceder de otro modo: si la última distribución de estribos se lleva hasta los dos extremos de la viga, el diagrama de los esfuerzos K queda cubierto, menos dos picos triangulares próximos a dichos extremos. Dichos picos representan sendas fuerzas cortantes no equilibradas que existen en la sección media horizontal de la viga y cuyo valor, por cada pico, es:

$$[(23.500 - 18.759)/(0,90 \times 35 \times 45,81)] \times 0,50 \times 100 \times 35 = 5.750 \text{ kp}.$$

Cada una de estas fuerzas cortantes horizontales se puede equilibrar con barras inclinadas a 45°, cuya sección ha de ser:

$$\omega = 5.750 \times \cos 45^\circ / 3.478 = 1,17 \text{ cm}^2.$$

La proyección del baricentro del pico triangular sobre el eje medio horizontal de la viga es el punto por donde deben pasar las barras inclinadas.

Para terminar este Ejemplo 1.º incluimos las comprobaciones directas de las secciones centrales obtenidas en los tres casos considerados.

I. *Comprobación de la sección más cargada en el Caso a):*

$$M = 6.837.500 \text{ cm} \cdot \text{kp}; y = 17,53 \text{ cm}; d = 99,06 \text{ cm}; \\ U'_s = 13.868 \text{ kp}; U_s = 75.236 \text{ kp} .$$

Momento de los esfuerzos de la sección referido al centro de U_s :

$$(35 \times 17,53 \times 100) \times [99,06 - (0,50 \times 17,53)] + (13.868 \times 99,06 \times 0,94) = \\ = 6.831.388 \text{ cm} \cdot \text{kp} .$$

La diferencia, en %, es:

$$(6.837.500 - 6.831.388) \times 100/6.837.500 = 0,1 \% .$$

$$\text{Resultantes: } (35 \times 17,53 \times 100) + 13.868 = 75.223 \text{ kp} .$$

$$\text{Diferencia, en \%: } (75.236 - 75.223) \times 100/75.236 = 0,02 \% .$$

II. *Comprobación de la sección más cargada en el Caso b):*

$$M = 6.312.500 \text{ cm} \cdot \text{kp}; d = 68,28 \text{ cm}; y = 0,45 \times 68,28 = 30,726 \text{ cm}; \\ U'_s = 9.559 \text{ kp}; U_s = 117.100 \text{ kp} .$$

Momento de los esfuerzos de la sección referido al centro de U_s :

$$(35 \times 30,726 \times 100) \times [68,28 - (0,50 \times 30,726)] + (9.559 \times 68,28 \times 0,92) = \\ = 6.291.220 \text{ cm} \cdot \text{kp} .$$

La diferencia, en %, es:

$$(6.312.500 - 6.291.220) \times 100/6.312.500 = 0,3 \% .$$

$$\text{Resultantes: } (35 \times 30,726 \times 100) + 9.559 = 117.100 \text{ kp} .$$

III. *Comprobación de la sección más cargada en el Caso c):*

$$M = 5.875.000 \text{ cm} \cdot \text{kp}; d = 45,81 \text{ cm}; y = 20,61 \text{ cm}; \\ U'_s = 80.168 \text{ kp}; U_s = 152.318 \text{ kp}; \rho = 0,10 .$$

Momento de los esfuerzos de la sección referido al centro de U_s :

$$(35 \times 20,61 \times 100) \times [45,81 - (0,50 \times 20,61)] + (80.168 \times 45,81 \times 0,90) = \\ = 5.866.399 \text{ cm} \cdot \text{kp} .$$

La diferencia, en %, es:

$$(5.875.000 - 5.866.399) \times 100/5.875.000 = 0,15 \% .$$

$$\text{Resultantes: } (35 \times 20,61 \times 100) + 80.168 = 152.303 \text{ kp} .$$

La diferencia, en %, es:

$$(152.318 - 152.303) \times 100/152.318 = 0,01 \%$$

EJEMPLO 2.º

Se trata de estudiar una estructura sencilla, en cuyas barras se produzcan esfuerzos axiales como consecuencia de las cargas exteriores. Se considera la estructura representada en la figura 5, compuesta por un dintel de 10,30 m de longitud y dos jambas o columnas de 5,30 m de longitud cada una. En el dintel se supone actuando una carga uniforme y vertical de 2.500 kp/m. Los nudos C y D son empotramientos. Los extremos A y B son empotramientos en el firme. Cada barra es de sección rectangular o cuadrada constante. Si las dimensiones de la sección del dintel son h_1 , b_1 y las de una de las dos jambas, iguales entre sí, son h_2 , b_2 , se han de cumplir las condiciones: $h_1 = 2h_2$; $b_1 = b_2$.

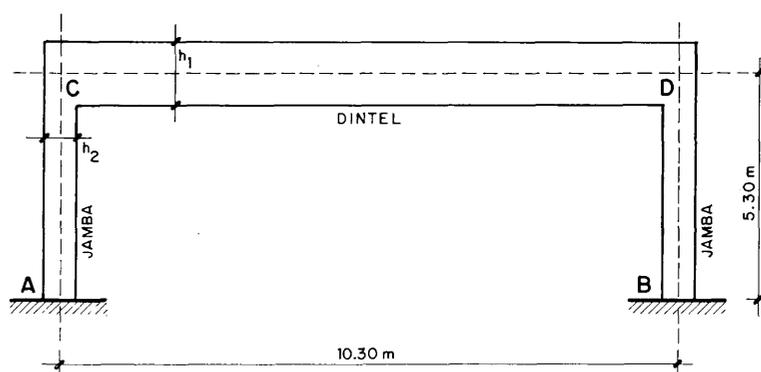


Fig. 5

Para determinar provisionalmente en cada barra su peso propio, se supone que las dimensiones de la sección del dintel son 60×30 cm y que las de la sección de cada jamba son 30×30 cm. El peso propio unitario del dintel es $0,60 \times 0,30 \times 2.500 = 450$ kp/m. La carga de cálculo en el dintel es $2.500 + 450 = 2.950$ kp/m. La carga de cálculo mayorada es $2.950 \times 1,6 = 4.720$ kp/m. El peso propio de una columna es $0,30 \times 0,30 \times 2.500 \times 5,3 = 1.192,5$ kp, y este peso mayorado vale $1.192,5 \times 1,6 = 1.908$ kp.

Las fórmulas para el cálculo general de las acciones en las barras están tomadas del *Beton Kalender I. 1975*, página 585. La relación de momentos de inercia dintel-jamba vale 8 y resulta: $k = 8 \times 5,30/10,30 = 4,1165$. En el dintel se produce una compresión constante, cuyo valor es:

$$N_1 = 4.720 \times 10,3^2 / [4 \times 5,3 (4,1165 + 2)] = 3.862 \text{ kp.}$$

En la sección superior de una columna la carga axial es: $N_2 = 0,50 \times 4.720 \times 10,30 = 24.308$ kp. En su sección inferior la carga es: $N'_2 = 24.308 + 1.908 = 26.216$ kp.

Los momentos en los nudos son:

$$M_C = M_D = -2 \times 3.862 \times 5,30/3 = -13.645,73 \text{ m} \cdot \text{kp} = -1.364.573 \text{ cm} \cdot \text{kp.}$$

Los momentos en los empotramientos en el cemento son:

$$M_A = M_B = +6.822,87 \text{ m} \cdot \text{kp} = 682.287 \text{ cm} \cdot \text{kp.}$$

El valor del momento positivo en el dintel es:

$$M_{CD} = (4.720 \times 10,3^2/8) - 13.645,73 = + 48.947,37 \text{ m} \cdot \text{kp} = + 4.894.737 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

Se establecerán los coeficientes de recubrimiento siguientes: en las columnas $\varrho = 0,14$, y en el dintel $\varrho = 0,08$.

Cálculo de una columna

Se considera su sección superior. En ella: $M = -1.364.573 \text{ cm} \cdot \text{kp}$; $N_2 = 24.308$; $b = 30 \text{ cm}$; $f_c = 100 \text{ kp/cm}^2$. La excentricidad central de la carga es $\varepsilon = 1.364.573/24.308 = 56,14 \text{ cm}$. El valor del parámetro selector es $Z = 24.308/(4 \times 30 \times 56,14 \times 100) = 0,036$, según las indicaciones incluidas en el prólogo, como es $\varrho = 0,14$, y el valor de Z es inferior a $0,607$, la situación de esta sección es de flexión. El canto mínimo absoluto posible corresponde a la determinación de h_2 en situación de momento tope y armadura máxima, mediante el proceso 10.2.

En el gráfico GR-11 correspondiente a $\varrho = 0,14$ al valor de $Z = 0,036$ corresponde el intervalo $(-0,098 ; 0,352)$ del parámetro r . La sección más pequeña corresponde a $r = 0,352$ y su cálculo es:

$$K_3 = 0,45 + r = 0,45 + 0,352 = 0,802;$$

$$K_4 = 0,35 + r(1 - \varrho) = 0,35 + 0,352(1 - 0,14) = 0,653;$$

$$d = \sqrt{\frac{N \cdot \varepsilon}{K_4 \cdot b \cdot f_c}} = \sqrt{\frac{1.364.573}{0,653 \times 30 \times 100}} = 26,39 \text{ cm};$$

$$d' = 26,39 \times 0,14 = 3,69 \text{ cm};$$

$$h = d + d' = 26,39 + 3,69 = 30,08 \text{ cm};$$

$$U_c = 30 \times 26,39 \times 100 = 79.170 \text{ kp};$$

$$U'_s = r \cdot U_c + 0,50N = (0,352 \times 79.170) + 12.154 = 40.022 \text{ kp};$$

$$U_s = K_3 \cdot U_c - 0,50N = (0,802 \times 79.170) - 12.154 = 51.340 \text{ kp}.$$

Como se ve, la armadura de compresión es aproximadamente igual a $0,50U_c$.

Como esta sección pertenece a una columna de esbeltez $530/30 = 18 > 10$, en virtud del artículo 40 de la Instrucción, para evitar el pandeo tendría que repetirse su cálculo sumando a la excentricidad real ε otra adicional, cuyo valor en este caso es:

$$\varepsilon_a = \left(3 + \frac{4.000}{3.500} \right) \frac{30,08 + 20 \times 56,14}{30,08 + 10 \times 56,14} \times \frac{530}{30,08} \times 10^{-4} = 0,01.$$

Dada la pequeñez de la corrección no se considera necesaria la corrección del cálculo.

En la sección inferior de la columna los datos son:

$$M = 682.287 \text{ cm} \cdot \text{kp};$$

$$N'_2 = 26.216 \text{ kp};$$

$$b = 30 \text{ cm};$$

$$d = 26,39 \text{ cm};$$

$$f_c = 100 \text{ kp/cm}^2.$$

La excentricidad central de la carga es: $\varepsilon = 682.287/26.216 = 26,03 \text{ cm}$, y se verifica: $Z = 26.216/(4 \times 30 \times 26,03 \times 100) = 0,084 < 0,607$, es decir, que también se halla esta sección en flexión. La excentricidad referida al centro de U_s es: $e = \varepsilon + 0,50(d - d') = 26,03 + (0,50 \times 26,39 \times 0,86) = 37,3777 \text{ cm}$. Si en esta sec-

ción se supone la máxima armadura de compresión, las condiciones de compatibilidad son:

$$0,50 \times 79.170 \times 26,39 \times 0,86 < 26.216 \times 37,3777 < [0,35 + (0,50 \times 0,86)] \times 26,39 \times 79.170,$$

$$\text{o sea: } 898.397 < 979.894 < 1.269.651.$$

De lo que se deduce que los datos son compatibles, y según el proceso 10.3 se tiene:

$$p = \frac{979.894}{26,39 \times 79.170} - r \times 0,86 = 0,469 - r \times 0,86 \text{ (ver GR-9).}$$

Los valores de p han de ser positivos y han de estar comprendidos entre 0,00 y 0,35; según esta fórmula los valores de r han de estar comprendidos entre $r = (0,469 - 0,35)/0,86 = 0,14$ y $r = 0,469/0,86 = 0,545$; pero este último ha de ser sustituido por el valor $r = 0,50$, establecido por la Instrucción. Se elige el valor $r = 0,14$ porque es mayor que 0,04 y corresponde al mayor aprovechamiento de la sección de hormigón, puesto que para él es $q = 0,45$.

Es decir, en esta sección el momento exterior es igual al momento tope de la sección correspondiente a $r = 0,14$, y el resto del cálculo es:

$$U'_s = r \cdot U_c = 0,14 \times 79.170 = 11.084 \text{ kp};$$

$$U_s = q \cdot U_c + U'_s - N = (0,45 \times 79.170) + 11.084 - 26.216 = 20.495 \text{ kp.}$$

Como sección límite, en este caso, se adopta la que tiene las dos armaduras mínimas $U'_s = U_s = 0,04 \times 79.170 = 3.167 \text{ kp}$, y como profundidad de la zona comprimida el valor $y = 26.216/(30 \times 100) = 8,74 \text{ cm} > d' = 0,14 \times 26,39 = 3,69 \text{ cm}$. El momento central de esta sección vale: $26.216 \times 0,50 \times (30,08 - 8,74) = 279.725 \text{ cm} \cdot \text{kp} = 2.797,25 \text{ m} \cdot \text{kp}$. Tomando como origen de abscisas el punto A, figura 5, la ley de momentos flectores o momentos centrales en la columna, en $\text{m} \cdot \text{kp}$, es: $M = 6.822,87 - 3.862x$, y las secciones límite son las correspondientes a las raíces de las dos ecuaciones $\pm 2.797,25 = 6.822,87 - 3.862x$, cuyos valores son $x_1 = 1,04 \text{ m}$, $x_2 = 2,49 \text{ m}$. En la parte situada entre estas dos abscisas todas las secciones serán iguales a la sección límite. En las dos partes de la columna restante todas las secciones son calculables con el proceso 10.3.

Cálculo del dintel

En la sección central se dispone de los siguientes datos: $M_{CD} = 4.894.737 \text{ cm} \cdot \text{kp}$; $N_1 = 3.862 \text{ kp}$; $b = 30 \text{ cm}$; $h = 60 \text{ cm}$; $\rho = 0,08$; $f_c = 100 \text{ kp/cm}^2$. La excentricidad central de la carga es: $\varepsilon = 4.894.737/3.862 = 1.267 \text{ cm}$. El valor del parámetro selector: $Z = 3.862/(4 \times 30 \times 1.267 \times 100) = 0,0003 < 0,605$, y según lo indicado en el prólogo, la sección está en situación de flexión compuesta. Se obtienen las magnitudes: $d = h/(1 + \rho) = 60/1,08 = 55,56 \text{ cm}$.

$$d' = \rho \cdot d = 0,08 \times 55,56 = 4,44 \text{ cm}; \quad U_c = 30 \times 55,56 \times 100 = 166.680 \text{ kp};$$

$$e = \varepsilon + 0,50(d - d') = 1.267 + 0,50(55,56 - 4,44) = 1.292,56 \text{ cm.}$$

El momento tope mínimo de esta sección corresponde a $r = 0,04$, y su valor es:

$$\mu_1 = (0,35 + 0,04 \times 0,92) \times 55,56 \times 166.680 = 3.582.054 \text{ cm} \cdot \text{kp.}$$

Su momento tope máximo corresponde a $r = 0,50$, y su valor es:

$$\mu_2 = (0,35 + 0,50 \times 0,92) \times 55,56 \times 166.680 = 7.501.200 \text{ cm} \cdot \text{kp.}$$

El momento excéntrico o momento de la carga N exterior en el centro de U_s es: $N \cdot e = 3.862 \times 1.292,56 = 4.991.867 \text{ cm} \cdot \text{kp}$. Resultan, pues, las relaciones $\mu_1 < N \cdot e < \mu_2$, en virtud de las cuales esta sección central tiene que ser calculada en la situación de momento tope con el proceso 10.1 bis o con el proceso 10.2 bis.

Como éste es un ejemplo de carácter informativo, se van a desarrollar ambos procesos, sirviéndose de recíproca comprobación:

Con el proceso 10.1 bis:

$$\begin{aligned} Z &= 3.862 / (30 \times 1.292,56 \times 100) = 0,001; \\ K_4 &= N \cdot e / (d \cdot U_c) = 4.991.867 / (55,56 \times 166.680) = 0,539; \\ r &= (K_4 - 0,35) / (1 - \rho) = (0,539 - 0,35) / 0,92 = 0,205; \\ K_3 &= 0,45 + r = 0,45 + 0,205 = 0,655; \\ U'_s &= 0,205 \times 166.680 = 34.169 \text{ kp}; \\ U_s &= 0,655 \times 166.680 - 3.862 = 105.313 \text{ kp}. \end{aligned}$$

Con el proceso 10,2 bis: $Z = 0,0003$ (hallado antes):

$$\begin{aligned} K_4 &= N \cdot \varepsilon / (d \cdot U_c) = 4.894.737 / (55,56 \times 166.680) = 0,529; \\ r &= (K_4 - 0,35) / (1 - \rho) = (0,529 - 0,35) / 0,92 = 0,1946; \\ K_3 &= 0,45 + r = 0,45 + 0,1946 = 0,6445; \\ U'_s &= 0,1946 \times 166.680 + 0,50 \times 3.862 = 34.368 \text{ kp}; \\ U_s &= 0,6445 \times 166.680 - 0,50 \times 3.862 = 105.494 \text{ kp}. \end{aligned}$$

Las diferencias, en %, de los resultados de ambos cálculos son:

$$\begin{aligned} \text{— para } U'_s: & (34.368 - 34.169) \times 100 / 34.368 = 0,6 \%; \\ \text{— para } U_s: & (105.494 - 105.313) \times 100 / 105.494 = 0,2 \%. \end{aligned}$$

En la sección correspondiente a un extremo del dintel todos los datos para su cálculo son los mismos que en la central, excepto el momento flector, cuyo valor es $M_c = 1.364.573 \text{ cm} \cdot \text{kp}$. Se obtienen sucesivamente:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1.364.573 / 3.862 = 353 \text{ cm}; \\ e &= \varepsilon + 0,50 (d - d') = 353 + 0,50 (55,56 - 4,44) = 378,56 \text{ cm}; \\ N \cdot e &= 3.862 \times 378,56 = 1.461.999 \text{ cm} \cdot \text{kp} < \mu_1. \end{aligned}$$

Como consecuencia de esta última desigualdad no se puede calcular esta sección en situación de momento tope. El cálculo se plantea con el valor $r = 0,04$ para U'_s como dato y los dos parámetros U_s e y como incógnitas.

Con el proceso 10.3 se obtiene:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1.461.999}{55,56 \times 166.680} - 0,04 \times 0,92 = 0,121; \text{ y con el gráfico GR-9 resulta,} \\ q &= 0,128; \\ y &= 0,128 \times 55,56 = 7,11 \text{ cm}; \\ U'_s &= 0,04 \times 166.680 = 6.667 \text{ kp}; \\ U_s &= 0,128 \times 166.680 + 6.667 - 3.862 = 24.140 \text{ kp}. \end{aligned}$$

Para la sección límite, como en este caso es $N/(b \cdot f_c) = 3.862/(30 \times 100) = 1,29 \text{ cm} < d' = 4,44 \text{ cm}$, sus restantes magnitudes son:

$y = d' = 4,44 \text{ cm}$; $U'_s = 0,04 \cdot U_c = 6.667 \text{ kp}$; $U_s = (30 \times 4,44 \times 100) + 6.667 = 19.987 \text{ kp}$. Como es $\rho = 0,08$, el momento excéntrico de esta sección vale: $m = 0,12 \times 55,56 \times 166.680 = 1.111.289 \text{ cm} \cdot \text{kp}$, del que se deducen:

$$e = 1.111.289/3.862 = 287,75 \text{ cm};$$

$$\varepsilon = 287,75 - 0,50 \times (55,56 - 4,44) = 287,75 - 25,56 = 262,19 \text{ cm}.$$

Resultando como momento central o momento flector:

$$M = 3.862 \times 262,19 = 1.012.578 \text{ cm} \cdot \text{kp} = 10.125,78 \text{ m} \cdot \text{kp}.$$

Como la ley de los momentos flectores del dintel, en $\text{m} \cdot \text{kp}$, con el origen de abscisas en el punto C, es $-2.360x^2 + 24.308x - 13.645,74$, las abscisas correspondientes a las secciones límite son las cuatro raíces de las dos ecuaciones $\pm 10.125,78 = -2.360x^2 + 24.308x - 13.645,74$, cuyos valores son: $x_1 = 0,15 \text{ m}$; $x_2 = 1,09 \text{ m}$; $x_3 = 9,21 \text{ m}$; $x_4 = 10,15 \text{ m}$. En resumen, las secciones pertenecientes a los tres intervalos (0,00; 0,15), (1,09; 9,21), (10,15; 10,30) son calculables normalmente con los procesos de la teoría de la rotura. Las secciones pertenecientes a los dos intervalos (0,15; 1,09), (9,21; 10,15) deben ser entre sí iguales e iguales a la sección límite, si bien las armaduras U'_s , U_s deben ser permutadas al atravesar las secciones de momento nulo.

Los cálculos de secciones intermedias en los intervalos indicados se pueden realizar con alguno de los procesos indicados. Por ejemplo: Sección cuya abscisa es $x = 3,05 \text{ m}$.

Momento central de la sección:

$$-2.360 \times 3,05^2 + 24.308 \times 3,05 - 13.645,74 = 38.539,76 \text{ m} \cdot \text{kp} = 3.853.976 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

$$\text{Valor de } \varepsilon = 3.853.976/3.862 = 997,92 \text{ cm}.$$

$$\text{Valor de } e = 997,92 + 25,56 = 1.023,48 \text{ cm}.$$

$$\text{Momento exterior referido a } U_s: N \cdot e = 3.862 \times 1.023,48 = 3.952.680 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

Como es $\mu_1 < N \cdot e$ se puede calcular esta sección con $y = 0,45 \times 55,56$. Sus incógnitas son U'_s , U_s . Con el proceso 10.1 bis, resulta:

$$K_4 = N \cdot e / (d \cdot U_c) = 3.952.680 / (55,56 \times 166.680) = 0,427;$$

$$r = (K_4 - 0,35) / (1 - \rho) = (0,427 - 0,35) / 0,92 = 0,084;$$

$$K_3 = 0,45 + r = 0,45 + 0,084 = 0,534;$$

$$U'_s = r \cdot U_c = 0,084 \times 166.680 = 14.001 \text{ kp};$$

$$U_s = K_3 \cdot U_c - N = 0,534 \times 166.680 - 3.862 = 85.145 \text{ kp}.$$

En todas las secciones en momento tope la diferencia entre las armaduras debe ser constante:

$$\text{— en la central: } x = 5,15) U_s - U'_s = 105.313 - 34.169 = 71.144 \text{ kp};$$

$$\text{— en la sección: } x = 3,05) U_s - U'_s = 85.145 - 14.001 = 71.144 \text{ kp}.$$

Finalmente, vamos a presentar la comprobación directa de algunas de las secciones calculadas:

I. *Comprobación de la sección superior de la columna:*

$$\begin{aligned}M &= -1.364.573 \text{ cm} \cdot \text{kp}; & y &= 0,45 \times 26,39 = 11,8755 \text{ cm}; \\N &= 24.308 \text{ kp}; & h &= 30,08 \text{ cm}; \\b &= 30 \text{ cm}; & d' &= 3,69 \text{ cm}; \\d &= 26,39; & U'_s &= 40.022 \text{ kp}; \\e &= 0,14; & U_s &= 51.340 \text{ kp}; \\ & & e &= 56,14 + 0,50 (26,39 - 3,69) = 67,49 \text{ cm}.\end{aligned}$$

Momento exterior en U_s : $N \cdot e = 24.308 \times 67,49 = 1.640.547 \text{ cm} \cdot \text{kp}$.

Momento de los esfuerzos interiores en U_s : $[(30 \times 0,45 \times 26,39 \times 100) 26,39 (1 - 0,225)] + 40.022 \times 26,39 \times 0,86 = 728.642 + 908.315 = 1.636.957 \text{ cm} \cdot \text{kp}$.

La diferencia, en %, es:

$$(1.640.547 - 1.636.957) 100/1.640.547 = 0,2 \%$$

Resultantes:

$$(30 \times 0,45 \times 26,39 \times 100) + 40.022 - 51.340 = 24.308 \text{ kp}.$$

II. *Comprobación de la sección inferior de la columna:*

$$\begin{aligned}M &= + 682.287 \text{ cm} \cdot \text{kp}; & e &= 36,0877 \text{ cm}; \\N &= 26.216 \text{ kp}; & y &= 0,45 \times 26,39 \text{ cm}; \\b &= 30 \text{ cm}; & U'_s &= 9.500 \text{ kp}; \\d &= 26,39 \text{ cm}; & U_s &= 18.911 \text{ kp}; \\e &= 26,03 \text{ cm}; & \rho &= 0,14.\end{aligned}$$

Momento de la carga exterior en U_s : $N \cdot e = 946.075 \text{ cm} \cdot \text{kp}$.

Momento de los esfuerzos interiores en U_s : $(30 \times 0,45 \times 26,39 \times 100) 26,39 (1 - 0,225) + 9.500 \times 26,39 \times 0,86 = 728.642 + 215.606 = 944.248 \text{ cm} \cdot \text{kp}$.

La diferencia, en %, es:

$$(946.075 - 944.248) 100/946.075 = 0,2 \%$$

Resultantes:

$$(30 \times 0,45 \times 26,39 \times 100) + 9.500 - 18.911 = 26.216 \text{ kp}.$$

III. *Comprobación de la sección central del dintel:*

$$\begin{aligned}M &= 4.894.737 \text{ cm} \cdot \text{kp}; & d' &= 4,44 \text{ cm}; \\N &= 3.862 \text{ kp}; & e &= 1,267 \text{ cm}; \\b &= 30 \text{ cm}; & e &= 1,292,56 \text{ cm}; \\d &= 55,56 \text{ cm}; & U'_s &= 34.368 \text{ kp}; \\e &= 0,08; & U_s &= 105.494 \text{ kp}.\end{aligned}$$

Momento de la carga exterior en U_s : $N \cdot e = 4.991.867 \text{ cm} \cdot \text{kp}$.

Momento de los esfuerzos interiores en U_s : $[(30 \times 0,45 \times 55,56 \times 100) 55,56 (1 - 0,225)] + 34.368 \times 55,56 \times 0,92 = 3.229.683 + 1.756.727 = 4.986.410 \text{ cm} \cdot \text{kp}$.

La diferencia, en %, es:

$$(4.991.867 - 4.986.410) 100/4.991.867 = 0,1 \%$$

Resultantes:

$$(30 \times 0,45 \times 55,56 \times 100) + 34.368 - 105.494 = 3.880 \text{ kp}$$

La diferencia, en %, es:

$$(3.880 - 3.862) 100/3.880 = 0,5 \%$$

IV. Comprobación de la sección extrema del dintel:

$$\begin{aligned} M &= -1.364.573 \text{ cm} \cdot \text{kp}; & d' &= 4,44 \text{ cm}; \\ N &= 3.862 \text{ kp}; & e &= 378,56 \text{ cm}; \\ \varepsilon &= 353 \text{ cm}; & y &= 7,11 \text{ cm}; \\ \rho &= 0,08; & U'_s &= 6.667 \text{ kp}; \\ b &= 30 \text{ cm}; & U_s &= 24.140 \text{ kp}. \\ d &= 55,56 \text{ cm}; \end{aligned}$$

Momento en U_s de la carga exterior: $N \cdot e = 1.461.999 \text{ cm} \cdot \text{kp}$.

Momento en U_s de los esfuerzos interiores de la sección:

$$(30 \times 7,11 \times 100) (55,56 - 0,50 \times 7,11) + 6.667 \times 55,56 \times 0,92 = 1.109.267 + 340.785 = 1.450.052 \text{ cm} \cdot \text{kp}$$

La diferencia, en %, es:

$$(1.461.999 - 1.450.052) 100/1.461.999 = 0,8 \%$$

Resultantes:

$$(30 \times 7,11 \times 100) + 6.667 - 24.140 = 3.857 \text{ kp}$$

La diferencia, en %, es:

$$(3.862 - 3.857) 100/3.862 = 0,13 \%$$

EJEMPLO 3.º

Pórtico de tres barras como el de la figura 3 con las cargas siguientes: En el dintel una carga vertical uniforme de 2.500 kp/m; en cada nudo C , D , una carga vertical concentrada de 250.000 kp. Las columnas son de sección cuadrada constante e iguales entre sí. El dintel es de sección rectangular constante. Los momentos de inercia de la sección de las columnas y de la sección del dintel son iguales entre sí.

Suponiendo para el dintel la sección $30 \times 75 \text{ cm}$, su momento de inercia es:

$J_1 = 1.054.687$. Suponiendo para la sección de la columna 60×60 , su momento de inercia es: $J_2 = 1.080.000$. El cociente de ambos es: $J_2/J_1 = 1,024 \approx 1$.

La carga mayorada de cálculo en el dintel, con las dimensiones supuestas, es:

$$[2.500 + (0,30 \times 0,75 \times 2.500)] 1,6 = 4.900 \text{ kp.}$$

Aplicando las fórmulas del Beton Kalender, se obtiene: $k = 0,515$.

— en el dintel: $N = 4.900 \times 10,3^2/[4 \times 5,3(0,515 + 2)] = 9.750 \text{ kp};$

— en cada columna: $N = 250.000 \times 1,6 + (4.900 \times 10,3/2) = 425.235 \text{ kp};$

— momentos:

$$M_c = -2 \times 9.750 \times 5,3/3 = -34.450 \text{ m} \cdot \text{kp};$$

$$M_A = 34.450/2 = 17.225 \text{ m} \cdot \text{kp};$$

$$M_{CD} = (4.900 \times 10,3^2/8) - 34.450 = 30.530 \text{ m} \cdot \text{kp};$$

— coeficiente de recubrimiento: $\varrho = 0,08$.

Estudio de la columna. En la sección superior.

Excentricidad central: $\varepsilon = 34.450/425.235 = 0,081 \text{ m} = 8,1 \text{ cm.}$

Parámetro selector: $Z = 425.235/(4 \times 60 \times 8,1 \times 100) = 2,187$; según el prólogo, esta sección está en compresión compuesta y, por consiguiente, a este caso le corresponde el proceso 8.2.b).

Se calculan:

$$Z_4 = \left(2 \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \right)^2 \frac{\varepsilon^2 \cdot f_c}{N} = 5,512 \frac{8,1^2 \times 100}{425.235} = 0,085;$$

$$K_0 = \frac{N}{h^2 \cdot f_c} = \frac{425.235}{60^2 \times 100} = 1,1812;$$

$$R = K_0 - 0,70 = 1,1812 - 0,70 = 0,4812.$$

En el gráfico GR-6 se comprueba que para $Z_4 = 0,085$ los valores de R posibles están comprendidos entre 0,283 y 0,574; por consiguiente, se puede proseguir el cálculo con $R = 0,4812$:

$$U'_c = N/K_0 = 425.235/1,1812 = 360.000 \text{ kp};$$

$$U'_s = R \cdot U'_c = 0,4812 \times 360.000 = 173.232 \text{ kp};$$

$$U'_s = 0,50 U'_s + \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \frac{N \cdot \varepsilon}{h} = (0,50 \times 173.232) + \\ + \frac{1,08}{0,92} \frac{3.445.000}{60} = 86.616 + 67.402 = 154.018 \text{ kp};$$

$$U_s = 86.616 - 67.402 = 19.214 \text{ kp.}$$

(El valor de la armadura mínima es: $0,04 \times 360.000 = 14.400 \text{ kp}$).

En la sección inferior de la columna se tiene:

$$N = 425.235 + (0,6^2 \times 2.500 \times 1,6) = 429.235 \text{ kp};$$

$$\varepsilon = 17.225/429.235 = 0,0401 \text{ m} = 4,01 \text{ cm};$$

$$Z_4 = 5,512 \frac{4,01^2 \times 100}{429.235} = 0,02;$$

$$K_0 = 429.235/(60^2 \times 100) = 1,1923; \quad R = 1,1923 - 0,70 = 0,4923.$$

Según el gráfico GR-6 los valores posibles de R están entre 0,10 y 0,75, por consiguiente:

$$U'_c = 429.235/1,1923 = 360.000 \text{ kp};$$

$$U'_s = 0,4923 \times 360.000 = 177.228 \text{ kp};$$

$$U'_s = 0,50 \times 177.228 + \frac{1,08}{0,92} \frac{17.225}{0,6} = 88.614 + 33.701 = 122.315 \text{ kp};$$

$$U_s = 88.614 - 33.701 = 54.913 \text{ kp}.$$

En la sección situada a la distancia $5,30/3 = 1,77$ m del cimiento, el momento flector se anula, la excentricidad también se anula, y sus dos armaduras valen $U'_s = U_s = 88.614$ kp.

Estudio del dintel

Como sus dimensiones supuestas son $b = 30$ cm, $h = 75$ cm, con $\rho = 0,08$, resultan: $d = h/(1 + \rho) = 75/1,08 = 69,44$ cm; $d' = h - d = 5,56$ cm; $U_c = 30 \times 69,44 \times 100 = 208.320$ kp; $0,50(d - d') = 31,94$ cm.

Los momentos tope mayor μ_2 y menor μ_1 de esta sección son:

$$\mu_2 = (0,35 + 0,50 \times 0,92) 69,44 \times 208.320 = 11.717.250 \text{ cm} \cdot \text{kp};$$

$$\mu_1 = (0,35 + 0,04 \times 0,92) 69,44 \times 208.320 = 5.595.348 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

En la sección extrema es: $M_c = 34.450$ m · kp = 3.445.000 cm · kp; $N \cdot e = 3.445.000 + 9.750 \times 31,94 = 3.756.415$ cm · kp < μ_1 .

Por consiguiente, en esta sección será: $U'_s = 0,04 U_c = 8.333$ kp, y se calcularán sus dos incógnitas, U_s e y , con el proceso 10.3:

$$p = \frac{3.756.415}{69,44 \times 208.320} - 0,04 \times 0,92 = 0,223, \text{ y según GR-9:}$$

$$q = 0,254; y = 0,254 \times 69,44 = 17,64 \text{ cm}; U_s = 0,254 \times 208.320 + 8.333 - 9.750 = 51.496 \text{ kp}.$$

En la sección central análogamente se tiene:

$$M = 30.530 \text{ m} \cdot \text{kp} = 3.053.000 \text{ cm} \cdot \text{kp};$$

$$N \cdot e = 3.053.000 + 9.750 \times 31,94 = 3.364.415 \text{ cm} \cdot \text{kp};$$

$$U'_s = 0,04 \times 208.320 = 8.333 \text{ kp};$$

$$p = \frac{3.364.415}{69,44 \times 208.320} - 0,04 \times 0,92 = 0,196;$$

$$q = 0,219; y = 0,219 \times 69,44 = 15,21 \text{ cm};$$

$$U_s = 0,219 \times 208.320 + 8.333 - 9.750 = 44.205 \text{ kp}.$$

La sección límite, como es $9.750/(30 \times 100) = 3,25$ cm < d' , se ha de formar con la profundidad d' para la zona de hormigón comprimido y la armadura mínima U'_s . De este modo la ecuación de resultantes es $(30 \times 5,56 \times 100) + 8.333 - U_s = 9.750$ kp; o sea: $U_s = 16.680 + 8.333 - 9.750 = 15.263$ kp. El momento de esta sección en U_s es: $16.680(69,44 - 2,78) + 8.333 \times 69,44 \times 0,92 = 1.111.889 + 532.352 = 1.644.241$ cm · kp; y el momento central o momento flector correspondiente es: $1.644.241 - (9.750 \times 31,94) = 1.644.241 - 311.415 = 1.332.826$ cm · kp = 13.328,26 m · kp.

Siendo la ley de momentos flectores en el dintel

$$M = -2.450x^2 + 25.235x - 34.450,$$

las abscisas de las secciones límite son las cuatro raíces de las dos ecuaciones $\pm 13.328,26 = -2.450x^2 + 25.235x - 34.450$, cuyos valores son: $x_1 = 0,92$ m; $x_2 = 2,50$ m; $x_3 = 7,80$ m; $x_4 = 9,38$ m.

En los intervalos (0,00; 0,92), (2,50; 7,80) y (9,38; 10,30), todas las secciones son calculables. En los intervalos (0,92; 2,50), (7,80; 9,38), todas las secciones deben ser iguales a la sección límite. El momento flector es nulo en las secciones cuyas abscisas son las raíces de la ecuación $34.450 = -2.450x + 25.235x^2$, cuyos valores son: $x_5 = 1,62$ m; $x_6 = 8,68$ m. Al pasar la sección límite de un lado a otro de estas abscisas, x_5 , x_6 , sus armaduras, U'_s , U_s , deben ser permutadas, de acuerdo con la deformación de esta pieza.

Comprobaciones de las secciones calculadas:

I. Sección superior de la columna:

$$\begin{aligned} N &= 425.235 \text{ kp}; & \rho &= 0,08; \\ \varepsilon &= 8,1 \text{ cm}; & e &= 8,1 + 0,50 (55,56 - 4,44) = 33,66 \text{ cm}; \\ b &= 60 \text{ cm}; & U'_s &= 154.018 \text{ kp}; \\ h &= 60 \text{ cm}; & N \cdot e &= 425.235 \times 33,66 = 14.313.410 \text{ cm} \cdot \text{kp}; \\ d &= h/1,08 = 55,56 \text{ cm}; & U_s &= 19.214 \text{ kp}. \\ d' &= 4,44 \text{ cm}; \end{aligned}$$

Momento en U_s de los esfuerzos de la sección:

$$(60 \times 55,56 \times 70) 0,50 \times 55,56 + 154.018 \times 55,56 \times 0,92 - (60 \times 4,44 \times 70) \times 0,50 \times 4,44 = 6.482.519 + 7.872.661 - 41.399 = 14.313.781 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

La diferencia, en %, es:

$$(14.313.781 - 14.313.410) 100/14.313.781 = 0,003 \text{ \%}.$$

Resultantes:

$$(60 \times 60 \times 70) + 154.018 + 19.214 = 425.232 \text{ kp}.$$

II. Sección inferior de la columna:

$$\begin{aligned} N &= 429.235 \text{ kp}; & d' &= 4,44 \text{ cm}; \\ \varepsilon &= 4,01 \text{ cm}; & \rho &= 0,08; \\ e &= 4,01 + 25,56 = 29,51 \text{ cm}; & U'_s &= 122.315 \text{ kp}; \\ b &= 60 \text{ cm}; & U_s &= 54.913 \text{ kp}; \\ h &= 60 \text{ cm}; & N \cdot e &= 429.235 \times 29,51 = 12.692.479 \text{ cm} \cdot \text{kp}. \\ d &= 55,56 \text{ cm}; \end{aligned}$$

Momento en U_s de los esfuerzos de la sección:

$$(60 \times 55,56 \times 70) 0,50 \times 55,56 + 122.315 \times 55,56 \times 0,92 - (60 \times 4,44 \times 70) \times 0,50 \times 4,44 = 6.482.519 + 6.252.156 - 41.399 = 12.693.276 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

La diferencia, en %, es:

$$(12.693.276 - 12.692.479) 100/12.693.276 = 0,006 \text{ \%}.$$

Resultantes:

$$(60 \times 60 \times 70) + 122.315 + 54.913 = 429.228 \text{ kp}.$$

III. *En la sección extrema del dintel:*

$$\begin{aligned} b &= 30 \text{ cm}; & N \cdot e &= 3.756.415 \text{ cm} \cdot \text{kp}; \\ \rho &= 0,08; & U'_s &= 8.333 \text{ kp}; \\ h &= 75 \text{ cm}; & U_s &= 51.496 \text{ kp}; \\ d &= 69,44 \text{ cm}; & y &= 17,64 \text{ cm}. \\ d' &= 5,56 \text{ cm}; \end{aligned}$$

Momento en U_s de los esfuerzos interiores de la sección:

$$(30 \times 17,64 \times 100) (69,44 - 0,50 \times 17,64) + 8.333 \times 69,44 \times 0,92 = 3.208.010 + 532.352 = 3.740.362 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

La diferencia, en %, es:

$$(3.756.415 - 3.740.362) 100/3.756.415 = 0,4 \text{ \%}.$$

Resultantes:

$$(30 \times 17,64 \times 100) + 8.333 - 51.496 = 9.757 \text{ kp}.$$

La diferencia, en %, es:

$$(9.757 - 9.750) 100/9.757 = 0,07 \text{ \%}.$$

IV. *En la sección central del dintel:*

$$\begin{aligned} b &= 30 \text{ cm}; & N \cdot e &= 3.364.415 \text{ cm} \cdot \text{kp}; \\ \rho &= 0,08; & U'_s &= 8.333 \text{ kp}; \\ h &= 75 \text{ cm}; & U_s &= 44.205 \text{ kp}; \\ d &= 69,44 \text{ cm}; & y &= 15,21 \text{ cm}. \\ d' &= 5,56 \text{ cm}; \end{aligned}$$

Momento en U_s de los esfuerzos interiores de la sección:

$$(30 \times 15,21 \times 100) (69,44 - 0,50 \times 15,21) + 8.333 \times 69,44 \times 0,92 = 2.821.531 + 532.352 = 3.353.833 \text{ cm} \cdot \text{kp}.$$

La diferencia, en %, es:

$$(3.364.415 - 3.353.883) 100/3.364.415 = 0,3 \%$$

Resultantes:

$$(30 \times 15,21 \times 100) + 8.333 - 44.205 = 9.758 \text{ kp.}$$

La diferencia, en %, es:

$$(9.758 - 9.750) 100/9.758 = 0,08 \%$$

Comentarios en relación con la solución calculada.

1.º La sección de hormigón del dintel está poco aprovechada, porque la profundidad de y en momento tope es: $0,45 \times 69,44 = 31,21$ cm, y los valores de y en la sección extrema y en la sección central son: 17,64 cm y 15,21 cm, respectivamente, o sea, el 57 % y el 49 %, respectivamente. Este resultado significa que la relación de los momentos de inercia $J_2/J_1 = 1$ es, desde este punto de vista, poco adecuada.

2.º Otro ensayo con la relación $J_2/J_1 = 2$, suponiendo los mismos valores para las cargas, implica los valores $k = 2 \times 530/1.030 = 1,03$.

$$N \text{ en el dintel} = 4.720 \times 10,3^2/[4 \times 5,30 (1,03 + 2)] = 11.635 \text{ kp;}$$

$$N \text{ en la columna} = 4.720 \times 10,3/2 = 24.308 \text{ kp, más la carga concentrada;}$$

$$M_c = M_D = 2 \times 11.635 \times 5,3/3 = 41.110 \text{ m} \cdot \text{kp} = 4.111.000 \text{ cm} \cdot \text{kp;}$$

$$M_A = M_B = 0,50 \times 41.110 = 20.555 \text{ m} \cdot \text{kp} = 2.055.500 \text{ cm} \cdot \text{kp.}$$

3.º Ensayo de la columna.

Carga $N = 24.308 + (250.000 \times 1,6) = 424.308$ kp; $M = 4.111.000$ cm · kp; $\varepsilon = 4.111.000/424.308 = 9,69$ cm. Para determinar provisionalmente el parámetro selector se supone $h = 60$ cm; $Z = 424.308/(4 \times 9,69 \times 60 \times 100) = 1,82$, con $\varrho = 0,08$. Este valor corresponde a compresión compuesta y al proceso 8.2.b): $Z_4 = 5,512 \times 9,69^2 \times 100/424.308 = 0,122$ (ver GR-6); $0,405 < R < 0,522$.

Para $h = 60$ cm ha de ser $K_0 = N/(60^2 \times 100) = 424.308/360.000 = 1,179$; $R = K_0 - 0,70 = 1,179 - 0,70 = 0,479$. Este valor está entre los límites de R antes indicados; por consiguiente, el proceso es viable.

4.º Ensayo del dintel. En la sección extrema de él es:

$$M = 4.111.000 \text{ cm} \cdot \text{kp}; N = 11.635 \text{ kp}; \varepsilon = 4.111.000/11.635 = 353,33 \text{ cm.}$$

Se ensayan las dimensiones $b = 30$ cm; $h = 60$ cm, con $\varrho = 0,08$; $d = h/(1 + \varrho) = 60/1,08 = 55,56$ cm; $d' = 4,44$ cm; $U_c = 30 \times 55,56 \times 100 = 166.680$ kp; $e = 353,33 + 0,50 (55,56 - 4,44) = 378,89$ cm; $N \cdot e = 11.635 \times 378,89 = 4.408.385$ cm · kp.

Los momentos tope máximo y mínimo de esta sección son:

$$\mu_2 = (0,35 + 0,50 \times 0,92) 55,56 \times 166.680 = 7.501.200 \text{ cm} \cdot \text{kp;}$$

$$\mu_1 = (0,35 + 0,04 \times 0,92) 55,56 \times 166.680 = 3.582.055 \text{ cm} \cdot \text{kp.}$$

Como resulta $\mu_1 < N \cdot e < \mu_2$ esta sección puede ser calculada en situación de momento tope, con las U'_s y U_s como incógnitas, es decir, con el 100 % de aprovechamiento de la sección de hormigón.

En la sección central es: $M = 2.055.500 \text{ cm} \cdot \text{kp}$; $N = 11.635 \text{ kp}$; $\varepsilon = 2.055.500/11.635 = 176.67 \text{ cm}$; $e = 176,67 + 25,56 = 202,23 \text{ cm}$; $N \cdot e = 11.635 \times 202,23 = 2.352.946 \text{ cm} \cdot \text{kp} < \mu_1$.

Por consiguiente, esta sección no puede estar en situación de momento tope. Calculándola con el proceso 10.3 con $U'_s = 0,04U_c$ y $\varrho = 0,08$, se tiene:

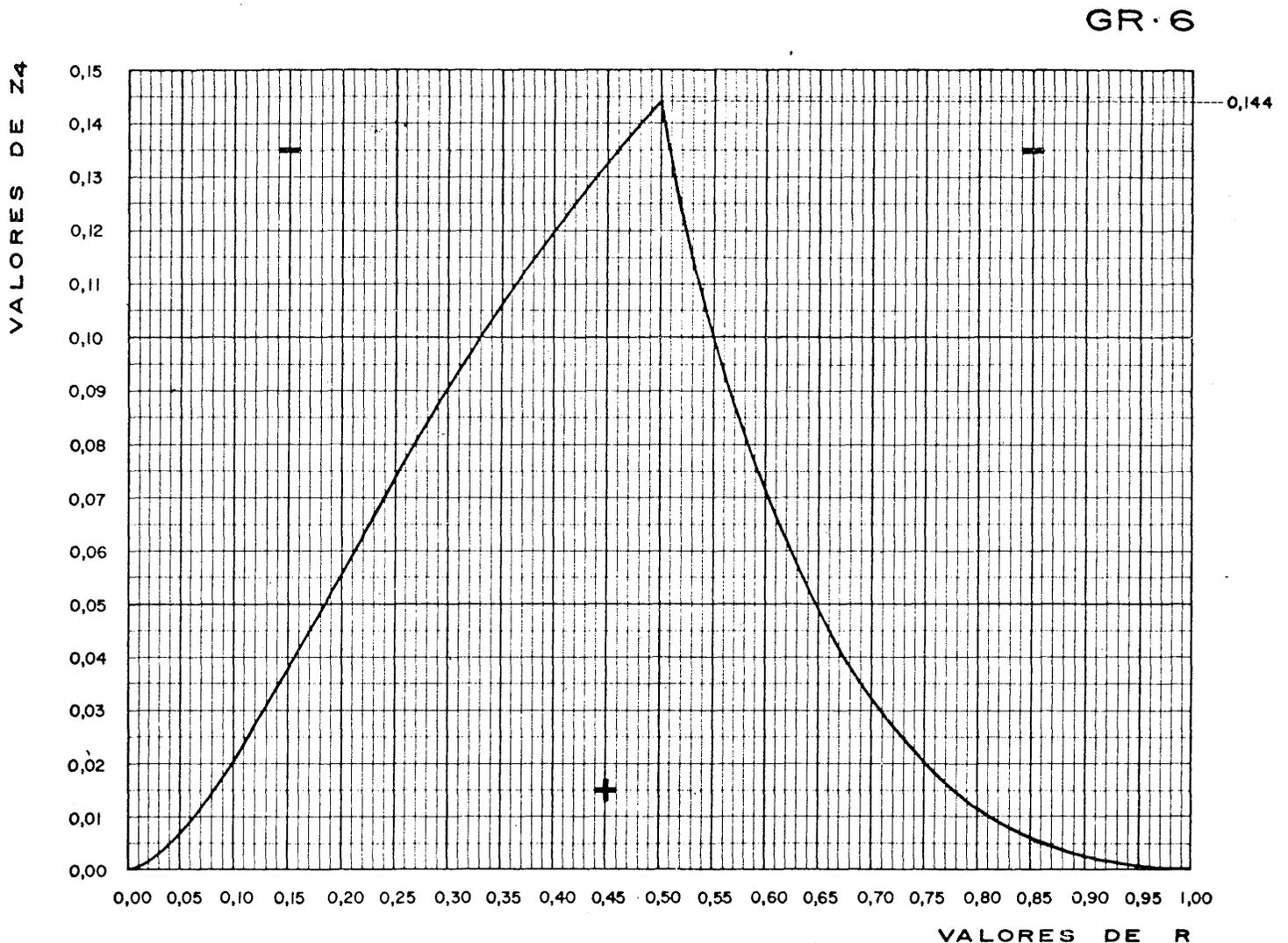
$$p = \frac{2.352.946}{55,56 \times 166.680} - 0,04 \times 0,92 = 0,2541 - 0,0368 = 0,2173;$$

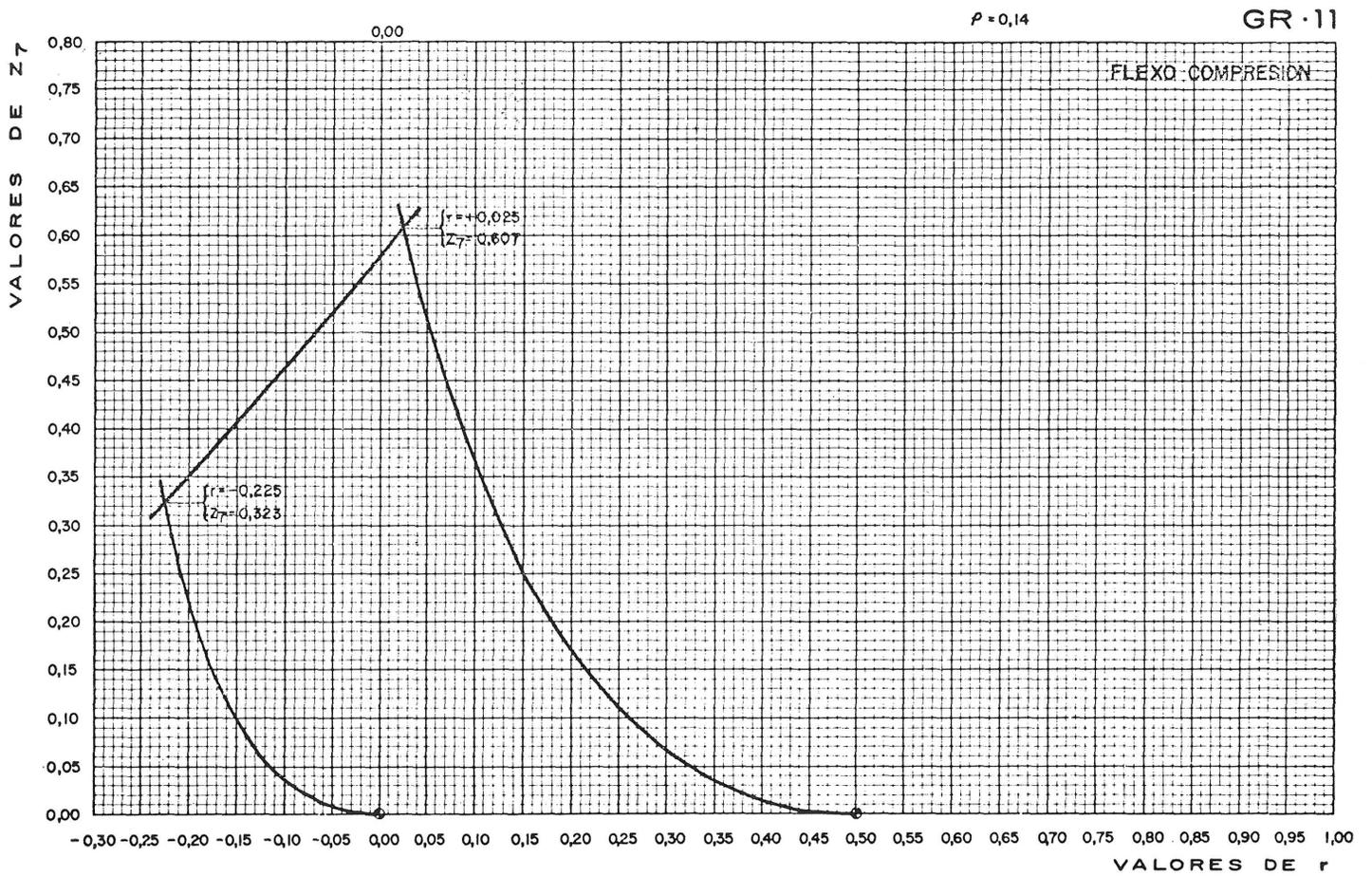
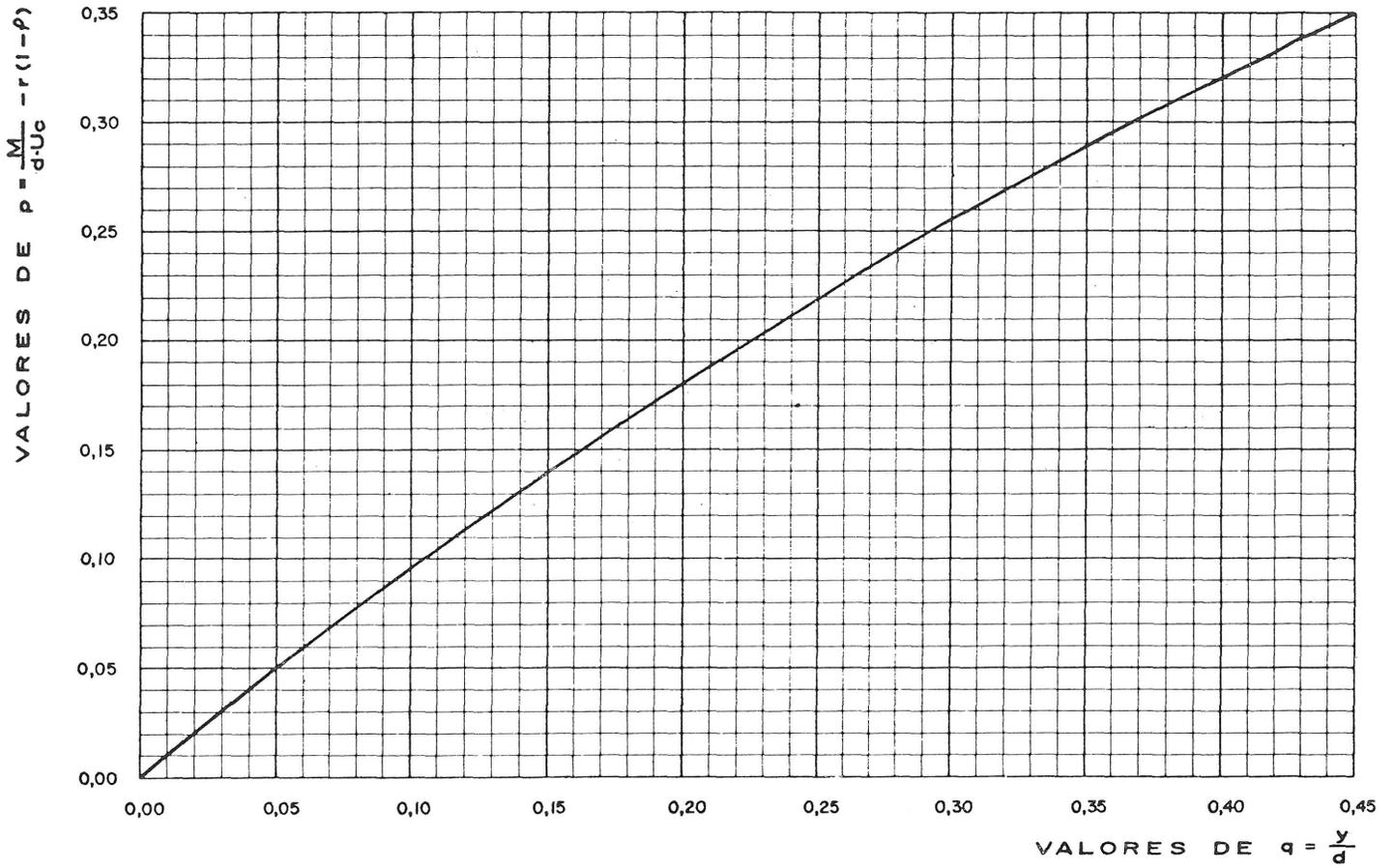
y en el gráfico GR-9 se obtiene: $q = 0,248$, y por consiguiente: $y = 0,248 \times 55,56 = 13,78 \text{ cm} = 55 \% \text{ de } y = 0,45d = 25,00 \text{ cm}$.

GRAFICOS Y PROCESOS CITADOS

Observación final

Figuran a continuación los gráficos GR-6, GR-9, GR-11 ($\varrho = 0,14$) y los procesos (8.2.b), (9.1), (9.2), (9.3), (10.1 bis) (10.2), (10.2 bis) (10.3), que figuran citados en el texto de estos ejemplos, tomados de la obra que se ha citado al principio.





Proceso 8.2.b

Compresión compuesta con sección cuadrada y la carga referida al centro de la sección de hormigón

Datos: N ; ε ; f_c .

Incógnitas: h ; U_s .

Se elige un valor de ϱ adecuado y se calcula:

$$Z_4 = \left(2 \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \right)^2 \frac{\varepsilon^2 \cdot f_c}{N}$$

ϱ	$\left(2 \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \right)^2$
0,06	5,086
0,08	5,512
0,10	5,975
0,12	6,479
0,14	7,029
0,16	7,628
0,18	8,283
0,20	9,000
0,22	9,786

En el GR-6 se determinan las abscisas R_0 y R_1 de los puntos que en sus dos curvas tienen la ordenada Z_4 y se elige un valor de R entre dichas abscisas.

Seguidamente se calculan:

$$K_0 = 0,70 + R;$$

$$h = \sqrt{\frac{N}{K_0 \cdot f_c}};$$

$$U'_c = \frac{N}{K_0};$$

$$U'_s = R \cdot U'_c;$$

$$U_s = 0,50U'_s + \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \frac{N \cdot \varepsilon}{h};$$

$$U_s = 0,50U'_s - \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} \frac{N \cdot \varepsilon}{h}.$$

Proceso 9.1

Flexión simple con el canto mínimo (situación de momento tope)

Datos: M ; b ; f_c .

Incógnitas: d ; U_s .

Se elige un valor de ϱ adecuado.

Se elige un valor de r entre 0,00 y 0,50.

Se realizan los cálculos sucesivos:

$$K_3 = 0,45 + r \quad ; \quad U_c = b \cdot d \cdot f_c$$

$$K_4 = 0,35 + r(1 - \varrho) \quad ; \quad U'_s = r \cdot U_c$$

$$d = \sqrt{\frac{M}{K_4 \cdot b \cdot f_c}} \quad ; \quad U_s = K_3 \cdot U_c.$$

Proceso 9.2

Flexión simple con la sección y su armadura de compresión dadas

Datos: M ; b ; d ; U'_s ; f_c .

Incógnitas: y ; U_s .

Se comprueban las condiciones de compatibilidad:

$$U'_s(d - d') \leq M \leq 0,35d \cdot U_c + U'_s(d - d').$$

Se calculan:

$$r = \frac{U'_s}{U_c} \quad ; \quad p = \frac{M}{d \cdot U_c} - r(1 - \rho).$$

En el gráfico GR-9 se determina el valor de q correspondiente al hallado de p , y con él se calculan:

$$U_s = q \cdot U_c + U'_s \quad ; \quad y = q \cdot d.$$

Proceso 9.3

Flexión simple con el canto dado y situación de momento tope

Datos: M ; b ; d ; f_c .

Incógnitas: U'_s ; U_s .

Se elige el valor de ρ y se calculan:

$$K_4 = \frac{M}{d^2 \cdot b \cdot f_c} \quad ; \quad r = \frac{K_4 - 0,35}{1 - \rho}$$

Si este valor de r está entre 0,00 y 0,50, se calculan sucesivamente:

$$\begin{aligned} K_3 &= 0,45 + r; & U'_s &= r \cdot U_c; \\ U_c &= b \cdot d \cdot f_c; & U_s &= K_3 \cdot U_c. \end{aligned}$$

Proceso 10.1 bis

Flexión compuesta con el canto dado, situación de momento tope y la carga referida a la armadura A_s

Datos: N ; e ; b ; d ; f_c .

Incógnitas: U'_s ; U_s .

Se elige ρ y se determina:

$$Z_6 = \frac{N}{b \cdot e \cdot f_c}$$

Se calculan:

$$K_4 = \frac{N \cdot e}{d^2 \cdot b \cdot f_c} \quad ; \quad r = \frac{K_4 - 0,35}{1 - \rho}$$

Si el punto de coordenadas (r, Z_6) está en el campo positivo de la curva correspondiente a ρ en el gráfico GR-10, se calculan sucesivamente:

$$\begin{aligned} K_3 &= 0,45 + r; & U'_s &= r \cdot U_c; \\ U_c &= b \cdot d \cdot f_c; & U_s &= K_3 \cdot U_c - N. \end{aligned}$$

Proceso 10.2

Flexión compuesta con la carga referida al centro de la sección de hormigón y canto mínimo (situación de momento tope)

Datos: N ; ε ; b ; f_c .

Incógnitas: d ; U_s .

Se elige un valor de ρ adecuado.

Se calcula el número:

$$Z_7 = \frac{N}{4 \cdot \varepsilon \cdot b \cdot f_c}$$

En el gráfico GR-11 correspondiente a ρ se hallan las abscisas r_0, r_1 de los dos puntos del contorno que tiene la ordenada Z_7 y se elige para r un valor entre ellas. Seguidamente se obtienen:

$$\begin{aligned} K_3 &= 0,45 + r & ; & & U_c &= b \cdot d \cdot f_c \\ K_4 &= 0,35 + r(1 - \rho) & ; & & U'_s &= r \cdot U_c + \frac{N}{2} \\ d &= \sqrt{\frac{N \cdot \varepsilon}{K_4 \cdot b \cdot f_c}} & ; & & U_s &= K_3 \cdot U_c - \frac{N}{2} \end{aligned}$$

Proceso 10.2 bis

Flexión compuesta con el canto dado, situación de momento tope y la carga referida al centro de la sección de hormigón

Datos: N ; ε ; b ; d ; f_c .

Incógnitas: U'_s ; U_s .

Se elige ρ y se determina:

$$Z_7 = \frac{N}{4 \cdot \varepsilon \cdot b \cdot f_c}$$

Se calculan:

$$K_4 = \frac{N \cdot \varepsilon}{d^2 \cdot b \cdot f_c} \quad ; \quad r = \frac{K_4 - 0,35}{1 - \rho}$$

Si el punto de coordenadas (r, Z_7) está dentro del recinto indicado en el gráfico GR-11 correspondiente a ρ , se calculan sucesivamente:

$$K_3 = 0,45 + r \quad ; \quad U'_s = r \cdot U_c + \frac{N}{2}$$

$$U_c = b \cdot d \cdot f_c \quad ; \quad U_s = K_3 \cdot U_c - \frac{N}{2}$$

Proceso 10.3

Flexión compuesta con la sección y su armadura de compresión dadas y la carga referida a la armadura A_s , o al centro de la sección de hormigón

Puesto que $e = 1/2(d - d') + \varepsilon$, siempre se dispone del parámetro e .

Datos: N ; e ; b ; d ; f_c ; U'_s .

Incógnitas: y ; U_s .

Se comprueban las condiciones de compatibilidad:

$$U'_s(d - d') \leq N \cdot e \leq 0,35d \cdot U_c + U'_s(d - d').$$

Se calcula el valor de $p = \frac{N \cdot e}{d \cdot U_c} - r(1 - \rho)$

y en el gráfico GR-9 se halla el valor correspondiente de q .

Se calculan finalmente: $U_s = q \cdot U_c + U'_s - N$; $y = q \cdot d$.

résumé

Calculs structuraux basés sur l'Instruction EH-73. Exemples

Julián Navarro Gutiérrez, Dr. architecte

Il s'agit de plusieurs exemples de calcul avec la théorie de rupture figurant dans l'Instruction EH-73. Dans le premier exemple est étudiée une barre à section rectangulaire constante avec une charge uniforme et perpendiculaire à son axe, c'est-à-dire à des sections en état de flexion simple; trois cas particuliers sont analysés parmi les cas possibles de cet exemple. Dans le deuxième exemple est considéré le cas d'un portique constitué par une traverse et deux poteaux, afin que des charges axiales interviennent dans le calcul des sections, c'est-à-dire, pour que les sections des barres soient en état de flexion composée; les charges extérieures de cette structure, dont le calcul général est effectué par les formules de n'importe quel formulaire de cette matière, exercent des actions sur les sections de leurs barres où la flexion prédomine. Finalement, dans le troisième exemple intervient le même portique de l'exemple précédent, mais avec des charges extérieures choisies de façon que les actions axiales prédominent sur quelques-unes de leurs barres, c'est-à-dire qu'il y ait des sections en état de compression composée. C'est ainsi qu'on vise à fournir une information précise et presque générale sur l'application de cette théorie de la rupture au calcul des barres à section rectangulaire constante.

summary

Structural calculations based on Instruction EH-73. Examples

Julián Navarro Gutiérrez, Dr. architect

It concerns several examples of calculation using the breakage theory included in Instruction EH-73. In the 1st example, a constant rectangular cross-section bar is studied with an even load perpendicular to its axis, i.e. with sections in simple bending situation; three particular cases are analyzed among those possible in this example. In the 2nd example, the case is considered of a porch comprising a lintel and two columns, so that in the calculation of the cross-sections, axial loads intervene, i.e. so that the sections of the bars are in a compound bending situation; the outer loads of this structure, whose general calculation is performed through the standard formulae on this subject, produce actions in the sections of its bars in which bending predominates. Finally, in the 3rd example, the same porch intervenes as in the previous one, but with some outer loads chosen so that in some of the bars axial actions predominate, i.e., so there are sections in a compound compression situation. In this way, it is endeavoured to give concrete and almost general information on the application of the aforementioned theory to the calculation of constant rectangular cross-section bars.

zusammenfassung

Auf der Anweisung EH-73 Begründete Strukturberechnungen. Beispiele

Julián Navarro Gutiérrez, Dr. Architekt

Es handelt sich um verschiedene Rechenbeispiele mit der Bruchtheorie, die in der Anweisung EH-73 enthalten ist. Im ersten Beispiel studiert man eine Stange mit durchgehendem rechteckigem Querschnitt und gleichmässiger Belastung senkrecht zur Achse, d.h. mit Querschnitten im Zustand einfacher Biegung; unter den möglichen Fällen dieses Beispiels werden drei Einzelfälle untersucht. Im 2. Beispiel handelt es sich um ein Portal, das aus einem Sturz und zwei Säulen besteht, damit bei der Berechnung der Querschnitte: Axialbelastungen vorkommen, d.h., damit sich die Querschnitte der Stangen im Zustand zusammengesetzter Biegung befinden; die Aussenbelastungen der Struktur, die normalerweise nach den dieser Materie eigenen Formeln berechnet werden, rufen in den Querschnitten der Stangen, in denen die Biegung vorherrsche, Wirkungen hervor. Schliesslich behandelt man in 3. Beispiel dasselbe Portal wie im vorigen, aber mit so gewählten Aussenbelastungen, dass in manchen Stangen Axialwirkungen vorherrschen, d.h., dass Querschnitte im Zustand zusammengesetzte Pressung auftreten. Man versucht, auf diese Weise eine konkrete und fast allgemeine Auskunft über die Anwendung der erwähnten Bruchtheorie für die Berechnung der Stangen mit durchgehendem rechteckigen Querschnitt zu geben.