

introducción de momentos internos de torsión mediante pretensado

J. JOHANNSON, Prof. Dr. Ing.

Profesor de la Universidad Central de Venezuela

457-3

sinopsis En este artículo se estudia la posibilidad de transferir momentos al firme mediante la resistencia torsional de una viga, evitándose así soluciones de pilas o pilares solicitados fuertemente por torsión y creando, mediante pretensado, momentos internos que contrarresten directamente al momento torsor actuante, con lo cual se reduce e incluso se elimina, para ciertos casos de carga, el giro de la sección debido al par torsor.

En primer lugar se lleva a cabo un estudio de este tipo de torsión con el ejemplo sencillo de una viga hueca, en voladizo, solicitada en un extremo por un par torsor.

Conceptos generales

Mientras Mörsch ha dado al ingeniero el consejo de diseñar las estructuras de hormigón armado de manera que se evite la sollicitación por torsión, hoy en día la posibilidad de transferir momentos mediante la resistencia torsional de la viga al firme tiene una gran importancia y especialmente para la superestructura de puentes urbanos, ya que estas estructuras exigen muchas veces formas fuertemente curvadas, mientras el espacio disponible para las pilas queda extremadamente limitado, dando así lugar a soluciones solicitadas fuertemente por torsión.

Las tensiones debidas a la torsión aumentan las tracciones principales. En el caso de sobrepasar los valores admisibles se pueden aplicar los métodos conocidos, tales como son: el pretensado vertical, el aumento del pretensado horizontal o la absorción de las tensiones mediante acero ordinario.

Es evidente que con estas medidas no se influye en la rotación de las secciones originadas por la sollicitación torsional de las cargas exteriores.

Será más efectivo crear, mediante el pretensado, momentos internos que contrarresten directamente al momento torsor actuante, reduciendo o eliminando para un cierto caso de carga el giro de la sección debido al par torsor. Se estudia primeramente este tipo de torsión, mediante un ejemplo sencillo de una viga hueca

en voladizo solicitada en su extremo por un par torsor, tal como se indica en la figura 1.

El diagrama de momentos es uniforme, es decir, que cada sección es solicitada por el mismo momento torsor. Creando en cada sección un momento interno por la acción de dos componentes verticales $P_{r,v}$ de las fuerzas de pretensado $P_{r,1}$ y $P_{r,2}$, se puede contrarrestar en cada sección del voladizo el momento exterior T .

Los tendones indicados en la figura 1 logran este objetivo, lo que se ve inmediatamente al considerar el momento interno en una sección que esté a la distancia x del extremo de la viga.

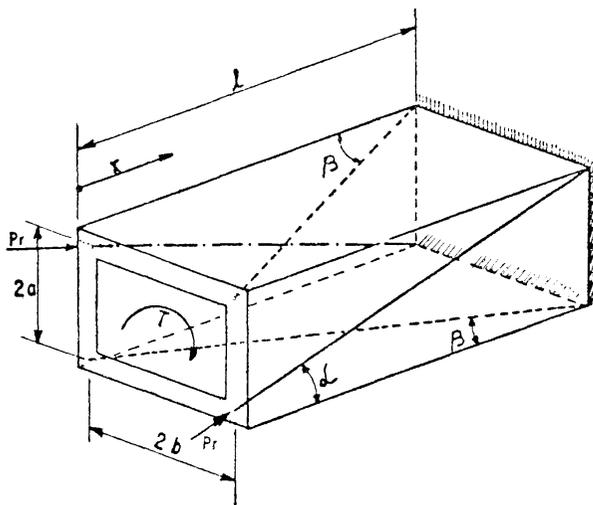
Las fuerzas internas actuantes en la sección se representan en la figura 2.

Se denomina b la distancia entre el eje de simetría z y el plano central del alma en la cual actúa la componente $P_{r,v}$. El ángulo α está definido en la figura 1.

El par torsor interno se puede expresar en la siguiente forma:

$$T_i = -P_{r,1} \cdot \text{sen } \alpha \cdot b - P_{r,2} \cdot \text{sen } \alpha \cdot b .$$

Siendo el momento torsor positivo, aquel cuyo vector actúa en el sentido del eje positivo (en este caso, el eje x). Por ser α y b en cada sección igual, el diagrama de momentos internos es uniforme; es decir, que tiene la misma forma del diagrama de momentos torsores exteriores. Para no crear un momento adicional alrededor



del eje z , las fuerzas de pretensado $P_{r,1}$ y $P_{r,2}$ tienen que ser iguales. Con esta condición, la expresión para el momento interno se simplifica a:

$$T_i = -P_r \cdot \text{sen } \alpha \cdot 2b \quad [1]$$

Para eliminar el giro de la sección debido al momento actuante en el extremo, se debe satisfacer la hipótesis:

$$T - T_i = 0 .$$

Mediante esta expresión obtenemos la fuerza P_r necesaria para cumplir con la condición de excluir deformaciones elásticas por torsión:

$$P_r = \frac{T}{2b \cdot \text{sen } \alpha} \quad [2]$$

Para vigas cuya altura es reducida en comparación a su longitud, la aproximación

$$\text{sen } \alpha \sim \text{tg } \alpha = \frac{2a}{l}$$

es aceptable.

Introduciendo este valor en la ecuación [2] se obtiene la siguiente expresión para P_r :

$$P_r = \frac{T \cdot l}{4a \cdot b} \quad [3]$$

Fig. 1. Viga en voladizo, con cables que producen un momento interno de torsión.

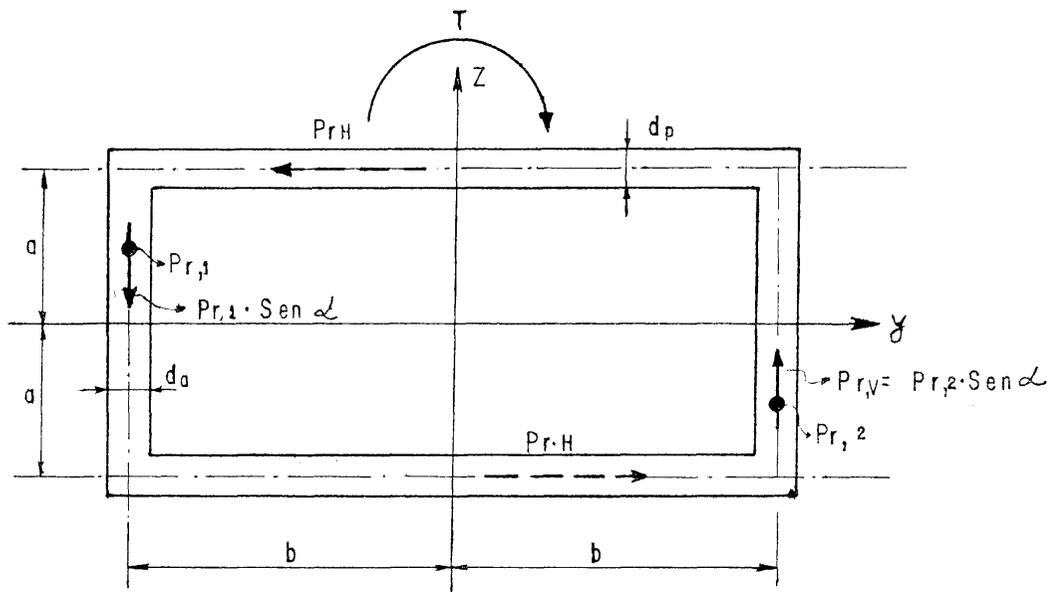
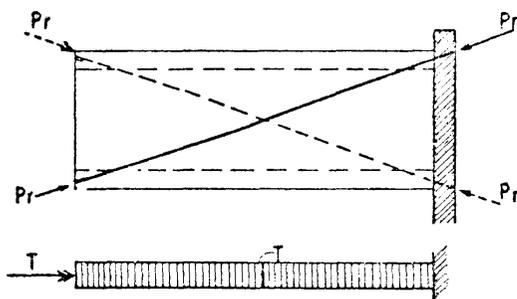


Fig. 2. Fuerzas internas debidas al pretensado en un corte vertical en la distancia x del extremo de la viga.

Es evidente que todas las consideraciones anteriores conservan su validez, cuando se realiza el pretensado mediante dos cables inclinados en el plano central de las placas superior e inferior (véase líneas punteadas en la figura 2). Las fuerzas internas $P_{r,H}$ se encuentran indicadas con líneas punteadas en las figuras 2 y 1. En este caso, para el momento interno rigen las siguientes ecuaciones:

$$T_i = P_r \cdot \text{sen } \beta \cdot 2a ; \quad \text{sen } \beta \sim \frac{2b}{l}$$

$$P_r = \frac{T \cdot l}{4a \cdot b} \quad [4]$$

Los dos tipos de pretensado son entonces equivalentes. Al brazo interno menor de $P_{r,H}$ corresponde una inclinación más fuerte del cable y, por lo tanto, una mayor componente horizontal.

Todas las consideraciones se refieren exclusivamente a la hipótesis convencional del cálculo de la viga. Es decir, no se tomaron en cuenta deformaciones transversales, ni los momentos debidos a ellas. Es evidente que la sección hue-

ca representa para una solución estricta una concha prismática cuyos momentos transversales pueden ser importantes en ciertos casos. Los criterios para evaluar esto son los mismos que rigen para una sollicitación originada por una carga exterior y no serán tratados aquí.

Forma de los cables para crear diferentes tipos de momentos internos de torsión

En las líneas anteriores se ha expuesto la posibilidad de crear momentos internos de torsión mediante un ejemplo sencillo.

Para obtener una expresión general que nos indique la curvatura del cable mediante la cual podamos contrarrestar una cierta sollicitación torsional, investigaremos la viga en voladizo (véase fig. 3), pretensada con dos cables curvados.

Las curvas de los cables, sean arbitrarias, pero continuas. Para evitar momentos flectores en el plano (x, y) las fuerzas de desvío D_a y D_b tienen que ser iguales y de signo contrario.

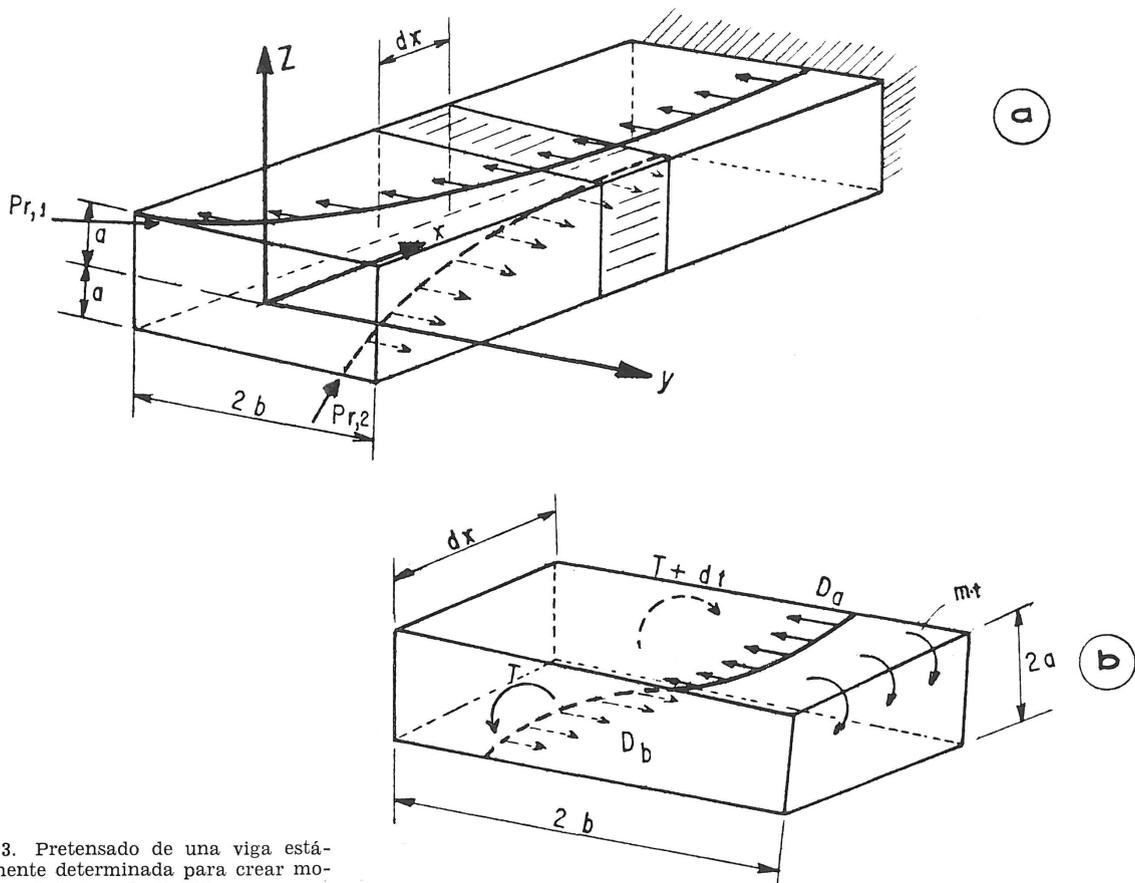


Fig. 3. Pretensado de una viga estáticamente determinada para crear momentos internos de torsión.

Se logra esto eligiendo dos curvas antimétricas y pretensando ambos cables con la misma fuerza ($P_{r,1} = P_{r,2}$). El par exterior actuante es el momento $m_t \cdot (m \cdot t/m)$ continuo, pero de intensidad diferente; este momento se indica en la figura 3b.

El momento interno de torsión debido a los dos cables es:

$$T_i = D \cdot 2a \cdot (\cos D_a = D_b = D) \cdot (m \cdot t/m) .$$

La condición de eliminar en cada punto la rotación producida por el momento m_T nos da la ecuación:

$$\left. \begin{aligned} m_T - D \cdot 2a &= 0 ; \\ m_T - \frac{P_r}{\rho} \cdot 2a &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

Para el signo rige la regla de que el momento torsional es positivo cuando su vector actúa en el sentido positivo del eje x . La curvatura de los cables fue elegida de tal manera, que sus fuerzas de desvío produzcan un momento que contrarresta al momento actuante m_T (véase figura 3). El vector debido a las fuerzas de desvío está dirigido hacia el extremo libre de la viga y, por lo tanto, es negativo.

Introduciendo para $1/\rho$ el valor d^2y/dx^2 se puede escribir la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m_T}{2P_r \cdot a} \quad [5a]$$

Habiéndose eliminado la rotación debido al momento exterior m_T mediante las fuerzas de desvío, evidentemente los pares de torsión T y $(T + dT)$ actuantes en la cara vertical del elemento diferencial (véase fig. 3b) son 0.

Entre el momento actuante $m_T \cdot (m \cdot t/m)$ y el momento $T \cdot (m \cdot t)$ en la sección, existe una relación sencilla que se usará muchas veces en las consideraciones posteriores y, por lo tanto, se expone en las líneas siguientes.

Tomando la condición $\Sigma T = 0$ en el elemento diferencial de la figura 4 se obtiene dicha relación:

$$T + m_T \cdot dx - T - dT = 0 ;$$

$$m_T \cdot dx = dT ;$$

$$T = \int m_T \cdot dx \quad [6]$$

$$\frac{dT}{dx} = m_T \quad [7]$$

Voladizo con carga continua excéntrica

El voladizo representado en la figura 5 está sujeto a una carga continua excéntrica ($p \cdot t/m$), la cual origina el momento

$$m_T = p \cdot b \cdot \frac{m \cdot t}{m} .$$

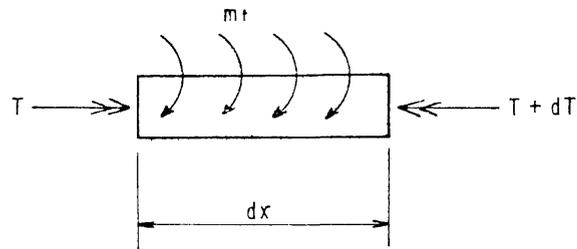


Fig. 4. Momentos de torsión en un elemento diferencial.

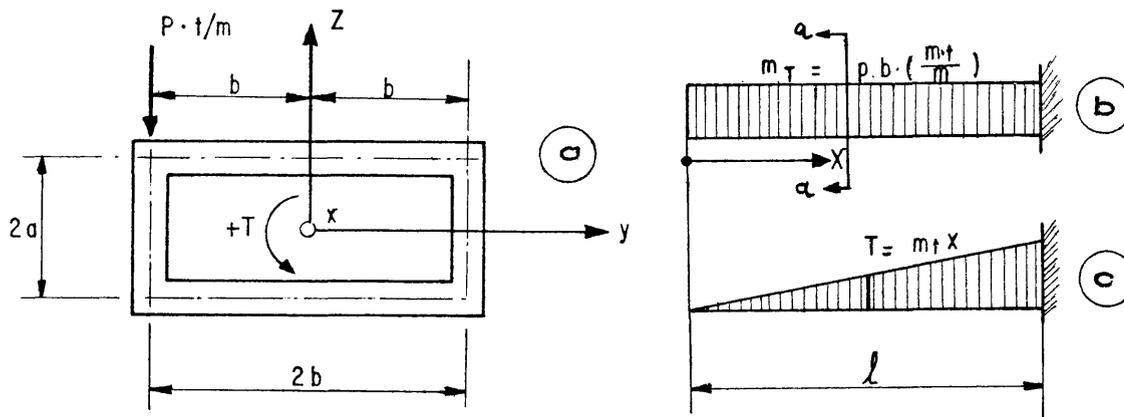


Fig. 5. Voladizo con carga continua excéntrica.

El momento a absorber en cada sección es

$$T = \int_0^x m_T \cdot dx = m_T \cdot x$$

(véase figs. 5b y c).

La ecuación diferencial para la forma de los cables cuyas fuerzas de desvío contrarrestan al momento $m_T = p \cdot b$ es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p \cdot b}{2P_r \cdot a} = \frac{m_T}{2P_r \cdot a} \quad [8]$$

Integrando la expresión [8] se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_T \cdot x}{2P_r \cdot a} + C_1 \quad [9]$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot P_r \cdot 2a = m_T \cdot x + C_1 \quad [10]$$

$$y = \frac{m_T}{4P_r \cdot a} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \quad [11]$$

En la ecuación [10], el término $(dy/dx) \cdot P_r \cdot 2a$ representa, físicamente, el momento interno originado en una sección por las componentes horizontales de los cables que se encuentran en las placas. En la sección extrema $x = 0$ este momento interno tiene que ser igual a cero, siendo el momento exterior $T = m_T \cdot x$ (para $x = 0$) igual a cero. Por lo tanto, $C_1 = 0$.

Siendo imposible hacer $P_r = 0$, el momento en el extremo puede ser cero solamente cuando:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{(x=0)} = 0 ;$$

lo que significa geoméricamente que el cable tiene que formar en el extremo un ángulo recto con el eje y .

Usando todo el ancho de la viga hueca se comienza la trayectoria del cable superior con la ordenada $y = -b$ y se termina en el extremo empotrado con la ordenada $y = +b$.

Entrando con $y = -b$ para $x = 0$ en la ecuación [11] resulta:

$$C_2 = -b .$$

La igualdad [11] se transforma entonces en la siguiente expresión:

$$y = \frac{m_T \cdot x^2}{4P_r \cdot a} - b \quad [12]$$

Para calcular la fuerza P_r , aplicamos la condición $y = +b$ para $x = l$; se obtiene:

$$b = \frac{m_T \cdot l^2}{4P_r \cdot a} - b ;$$

$$P_r = \frac{p \cdot l^2}{8a} = \frac{m_T \cdot l^2}{8a \cdot b} \quad [13]$$

Introduciendo P_r en la ecuación [12] se puede escribir para y la siguiente expresión:

$$y = \frac{2b \cdot x^2}{l^2} - b \quad [14]$$

La figura 6 muestra la forma de los cables para:

$$a = 1m, b = 2m, l = 20m \text{ y } m_T = 2m \cdot t/m.$$

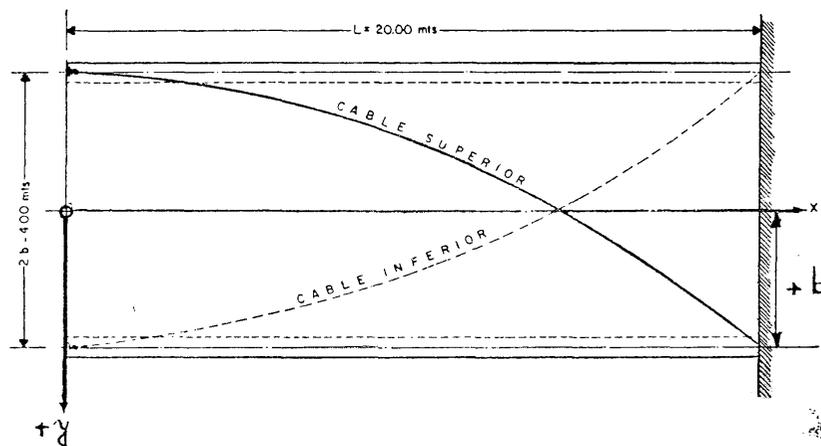


Fig. 6. Forma de los cables para la formación de un momento interno de torsión linealmente creciente.

Pretensado de una sección hueca con voladizos laterales

Las vigas en cajón de puentes tienen generalmente el tipo de sección indicado en la figura 7. El centro de gravedad no se encuentra a la mitad de la altura $2a$; por lo tanto, la eliminación de momentos flectores indeseables exige algunas consideraciones adicionales. Se va a disfrutar para el cable inferior de todo el ancho disponible, es decir, el cable comienza en $-b$ y termina en el punto de empotramiento con la ordenada $+b$, teniendo la siguiente ecuación:

$$y_1 = \frac{m_r \cdot x^2}{4P_{r,1}} - b ; \quad \text{y según [14];}$$

$$y_1 = \frac{2b \cdot x^2}{l^2} - b \quad [15]$$

Para eliminar un momento flector respecto al eje y y rige la condición:

$$P_{r,2} = P_{r,1} \cdot \frac{e_1}{e_2} \quad [16]$$

El momento que gira alrededor del eje z se evita cumpliendo en cada punto del voladizo con la ecuación:

$$P_{r,1} \cdot y_1 = P_{r,2} \cdot y_2 .$$

Siendo $y_2 = y_1 \cdot (P_{r,1}/P_{r,2}) = y_1 \cdot (e_2/e_1)$, la ecuación para el cable superior es:

$$y_2 = \frac{2b \cdot x^2}{l^2} \cdot \frac{e_2}{e_1} - b \cdot \frac{e_2}{e_1} \quad [17]$$

Es decir, la curva del cable en la placa superior representa una curva afín a aquella del cable inferior, siendo el factor de conversión:

$$\frac{e_2}{e_1} .$$

La fuerza $P_{r,1}$ se obtiene aplicando en la ecuación [19] la condición $y_1 = +b$, para $x = l$:

$$P_{r,1} = \frac{m_r \cdot l^2}{8a \cdot b} .$$

Para el momento T_i resulta la siguiente expresión:

$$T_i = \frac{dy_1}{dx} \cdot P_{r,1} \cdot e_1 + \frac{dy_2}{dx} \cdot P_{r,2} \cdot e_2 .$$

Expresando $P_{r,2}$ mediante la relación encontrada para $P_{r,1}$ e introduciendo para

$$\frac{dy_2}{dx} , \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{e_2}{e_1} ,$$

se deduce:

$$T_i = \frac{dy_1}{dx} \cdot P_{r,1} \cdot e_1 + \frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{e_2}{e_1} \cdot P_{r,1} \cdot \frac{e_1}{e_2} \cdot e_2 ;$$

$$T_i = \frac{dy_1}{dx} \cdot P_{r,1} (e_1 + e_2) = \frac{dy_1}{dx} \cdot P_{r,1} \cdot 2a .$$

Es decir, el momento interno tiene para la sección asimétrica el mismo valor que el obtenido para la sección simétrica cuando se cumple para el desarrollo del tendón superior la siguiente regla: Se aumenta la fuerza del tendón superior proporcionalmente a la relación de las

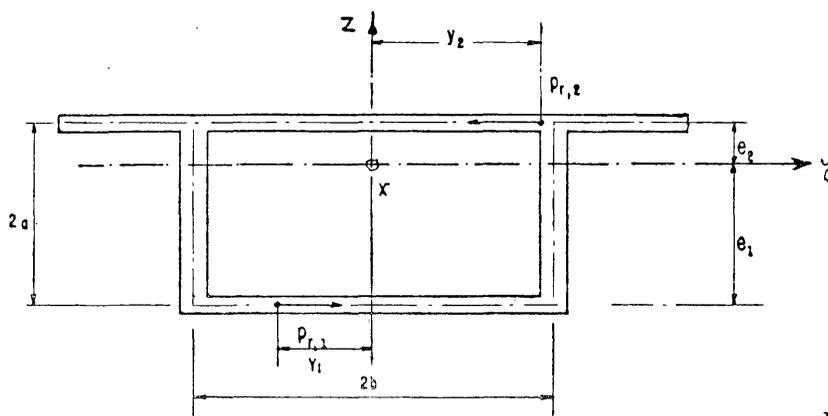


Fig. 7. Sección hueca con voladizos.

excentricidades e_1/e_2 . Las ordenadas y de la trayectoria del cable superior se multiplican con la relación e_2/e_1 .

Evidentemente el pretensado para un momento torsional en una sección asimétrica exige entonces, debido al aumento de la fuerza de pretensado en la placa superior, un mayor gasto de acero de alta resistencia.

Pretensado que contrarresta a momentos torsionales originados por el empotramiento elástico de la placa en la viga

Sea una viga simplemente apoyada, sometida a flexión, pero empotrada en sus extremos contra torsión. Esta condición de apoyo se presenta, con buena aproximación, en dos vigas principales de un puente, unidas en sus extremos mediante vigas transversales. La aproximación consiste en considerar para este caso las vigas transversales infinitamente rígidas a flexión. Los momentos se reparten según una ley hiperbólica:

$$m_T = \bar{m}_T \frac{\cos h \cdot (kx)}{\cos h \cdot \left(k \frac{l}{2}\right)} \quad [\text{según Säger, ref. (3)}]; \quad [18]$$

siendo:

\bar{m}_T = momento máximo de torsión en el punto de empotramiento (para una luz transversal \bar{a} entre las dos vigas)

$$\bar{m}_T = \frac{8\bar{a}^2}{12};$$

$$k = 2 \cdot 1,10 \cdot \frac{J_p}{\bar{a} \cdot J_T};$$

en la cual:

J_p = momento de inercia de la placa m^4/m ;

J_T = momento de inercia a la torsión de la viga.

El eje x se encuentra definido en la figura 8.

Para encontrar la forma del cable cuyas fuerzas de desvío contrarrestan a este tipo de sollicitación torsional, se supone que la viga sea de sección hueca y simétrica en referencia a los ejes y, z .

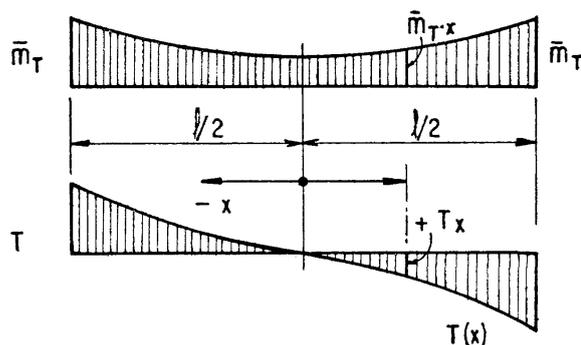


Fig. 8. Momentos torsores (m_T y T) en la viga, debidos al momento de empotramiento de una losa.

La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{m_T}{2P_r \cdot a} = 0$$

se transforma introduciendo el término para m_T que se encuentra definido en la ecuación [18], de la manera siguiente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \bar{m}_T \cdot \frac{\cos h(kx)}{2P_r \cdot a \cdot \cos h\left(k \frac{l}{2}\right)} \quad [19]$$

$$\text{Denominando } \frac{\bar{m}_T}{2P_r \cdot a \cdot \cos h\left(k \frac{l}{2}\right)} = A$$

se puede escribir para la ecuación [19]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A \cdot \cos h(kx) \quad [20]$$

Integrando dos veces se halla la expresión para y :

$$y = \frac{A}{k^2} \cdot \cos h(kx) + C_1 \cdot x + C_2 \quad [21]$$

Para el momento interno T_i en una sección rige la ecuación general:

$$T_i = P_r \cdot \frac{dy}{dx} \cdot 2a;$$

que toma, para el caso investigado, la siguiente forma:

$$T_i = 2P_r \cdot a \cdot \frac{A}{k} \cdot \text{sen h}(kx) + C_1 \quad [22]$$

Cálculo de las constantes y de la fuerza P_r

Para la determinación de las constantes C_1 y C_2 empleamos las siguientes condiciones de borde:

1. Para $x = 0$, $T_i = 0$.

Introduciendo esta condición en la ecuación [22] se obtiene $C_1 = 0$.

2. Para $x = 0$, $y = -b$ (cable superior, véase figura 9). Entrando con estos valores en la ecuación [21] resulta:

$$-b = \frac{A}{k^2} + C_2; \quad C_2 = -\frac{A}{k^2} - b.$$

Conociendo las constantes, a la ecuación [21] se le puede dar la siguiente forma:

$$y = \frac{A}{k^2} \cdot \cos h(kx) - \left(1 + \frac{k^2}{A} \cdot b\right) \quad [23]$$

Para un pretensado que conserva la forma de la pieza, se le calcula la fuerza P_r mediante la condición:

$$- \text{ para } x = \frac{l}{2}, y = +b.$$

Introduciendo estos valores en la ecuación [23] y usando para A el término completo se encuentra para P_r el siguiente valor:

$$P_r = \frac{\bar{m}_T}{4b \cdot a \cdot k^2} \cdot \frac{\beta - 1}{\beta};$$

(siendo $\beta = \cos h\left(k \frac{l}{2}\right)$) [24]

Para el pretensado de una sección asimétrica rigen las mismas reglas ya deducidas.

Voladizo curvo

Contrario a la viga recta, la viga curvada está sujeta a momentos torsionales debido a una carga vertical que actúa en el centro de gravedad. La magnitud de estos momentos depende del radio de curvatura y del ángulo α de apertura, como muestran las expresiones conocidas indicadas abajo:

$$M = g \cdot r^2 \cdot (1 - \cos \varphi);$$

$$T = -g \cdot r^2 \cdot (\varphi - \text{sen } \varphi);$$

$$Q_z = -g \cdot r \cdot \varphi$$

(φ y r son definidos en la figura 10).

Se investiga el pretensado mediante dos tendones colocados en las placas superior e inferior que contrarrestan exclusivamente al momento torsional mientras el momento flector sea absorbido por cables que se sitúan en las almas verticales de la sección.

Para aplicar la ecuación diferencial (5a) se tiene que encontrar primeramente la expresión para el momento $m_T \cdot (m \cdot t/m)$.

Mediante la ecuación general

$$T = \int m_T \cdot ds = \int m_T \cdot r \cdot d\varphi$$

se encuentra, por diferenciación, la siguiente expresión para m_T :

$$m_T = \frac{dT}{r \cdot d\varphi}$$

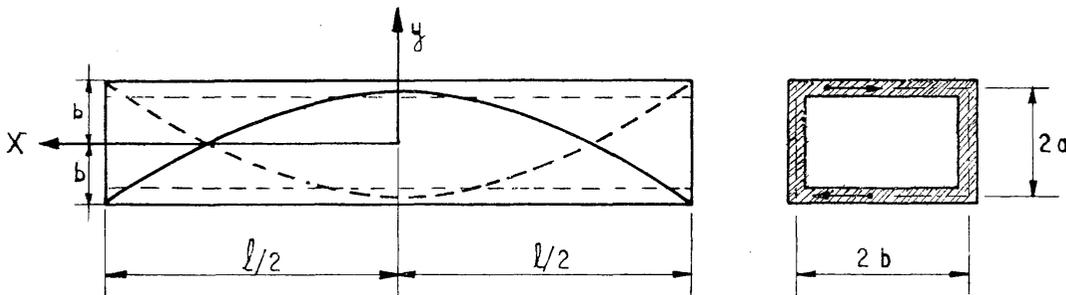


Fig. 9. Trayectoria del tendón cuyas fuerzas de desvío contrarrestan a $m_T = \bar{m}_T \cdot \frac{\cos h(kx)}{\cos h[k(l/2)]}$.

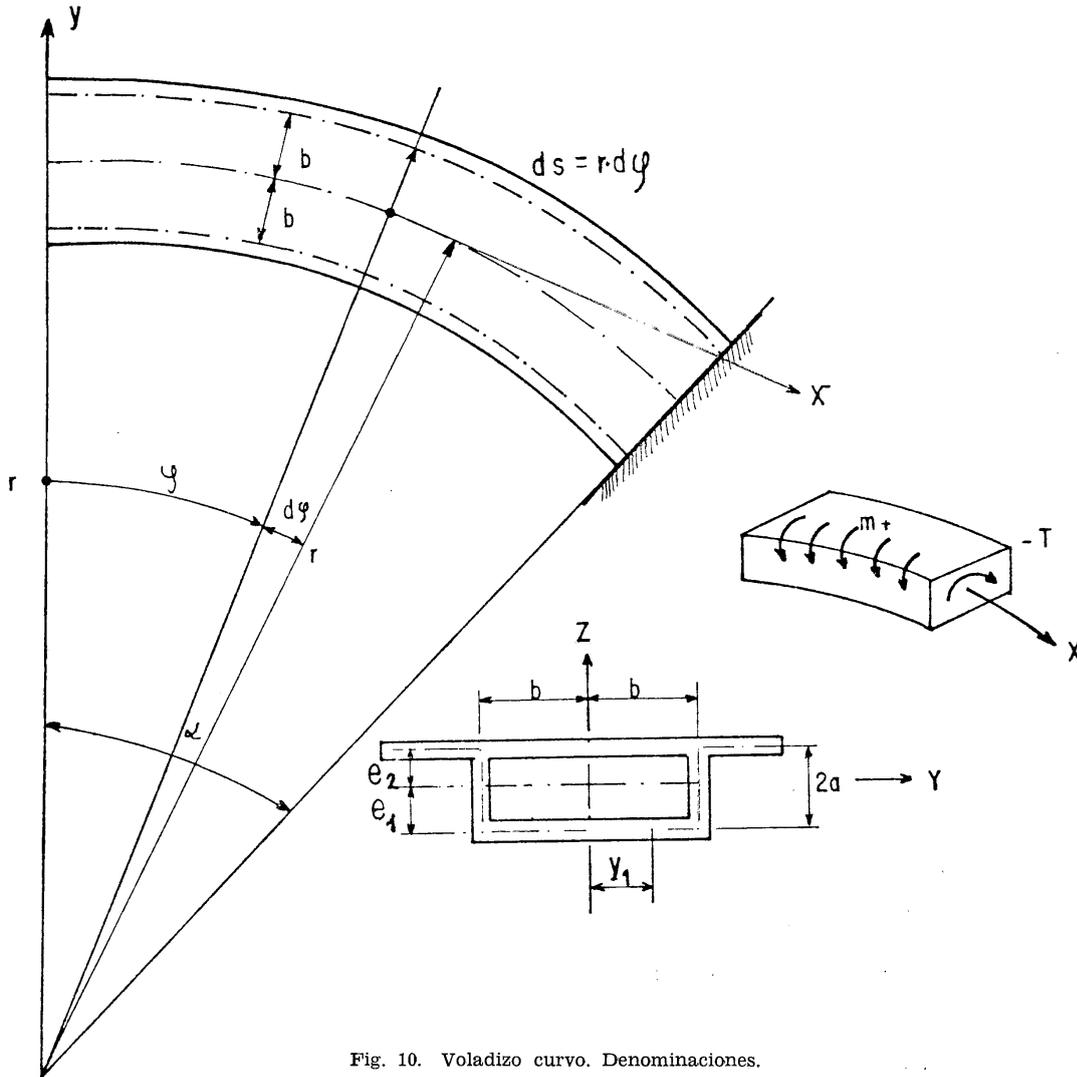


Fig. 10. Voladizo curvo. Denominaciones.

La diferenciación de la ecuación para

$$T = -g \cdot r^2 \cdot (\varphi - \text{sen } \varphi)$$

nos da la función para m_T :

$$m_T = +g \cdot r \cdot (1 - \cos \varphi)$$

[m_T actúa en sentido positivo en referencia al eje x (véase figura 10)].

Con $dx \sim ds = r \cdot d\varphi$ podemos escribir la ecuación [5a] en la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{(r \cdot d\varphi)^2} = \frac{g \cdot r}{2P_r \cdot a} (1 - \cos \varphi) .$$

Integrando se obtiene:

$$\frac{dy}{(r \cdot d\varphi)} = \frac{g \cdot r}{2a \cdot P_r} \cdot (\varphi - \text{sen } \varphi) + C_1 ;$$

$$y_1 = + \frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_r} \cdot \left(\frac{\varphi^2}{2} + \cos \varphi \right) + C_1 \cdot \varphi + C_2 .$$

Las condiciones de borde para el cálculo de las constantes son:

$$- \text{ para } \varphi = 0, \frac{dy}{r \cdot d\varphi} = 0 .$$

Es decir, el cable tiene que comenzar en el extremo con un ángulo recto respecto al radio r , para no producir un momento interno que no sea contrarrestado por ningún momento exterior.

Para el cable inferior (y_1) rige $y_1 = +b$ para $\varphi = 0$ (se aprovecha todo el espacio disponible en la placa).

Las dos condiciones dan los siguientes valores para las constantes:

$$C_1 = 0 ;$$

$$C_2 = \frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_r} + b .$$

Con estas expresiones la ecuación para y toma la siguiente forma:

$$y_1 = \frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_r} \cdot \left(\frac{\varphi^2}{2} + \cos \varphi - 1 \right) + b \quad [25] \text{ (cable inferior);}$$

$$y_2 = \frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_r} \cdot \left(\frac{\varphi^2}{2} + \cos \varphi - 1 \right) - b \quad [26] \text{ (cable superior).}$$

Cálculo del esfuerzo de pretensado

Introduciendo estos valores en la ecuación para y_1 resulta una expresión que permite definir $P_{r,1}$:

$$-b = \frac{g \cdot r^3}{P_r \cdot 2a} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{2} + \cos \alpha - 1 \right) + b ;$$

$$P_{r,1} = \frac{g \cdot r^3}{4(-b) \cdot a} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{2} + \cos \alpha - 1 \right) \quad [27]$$

Sección asimétrica

Bajo la condición de evitar momentos adicionales que no son contrarrestados por momentos exteriores, se obtiene la siguiente ecuación para la trayectoria del cable superior:

$$y_2 = \frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_{r,2}} \cdot \left(\frac{\varphi^2}{2} + \cos \varphi - 1 \right) - b \cdot \frac{e_2}{e_1} \quad [28]$$

siendo

$$P_{r,2} = P_{r,1} \cdot \frac{e_1}{e_2} .$$

Viga curva, simplemente apoyada a flexión y empotrada en sus extremos contra torsión

Los ejes de la viga indicada en la figura 11 con líneas fuertes representan un sistema de una viga en curva cuyos extremos no pueden girar mientras su deformación axial no está impedida. Es evidente que una viga hueca curva apoyada en los extremos bajo sus dos almas realiza este sistema siempre y cuando las reacciones negativas debidas al momento torsor no sobrepasen la reacción positiva por peso propio.

Para una sollicitación simétrica, este sistema está estáticamente determinado; mientras que

para un caso de carga arbitraria, él es hiperestático en primer grado. Los momentos y fuerzas internas debidos al peso propio g son:

$$Q_r = -g \cdot r ;$$

$$M_y = g \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - 1 \right) ;$$

$$M_x = T = g \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\sen \varphi}{\cos \alpha} - \varphi \right) ;$$

$$m_T = \frac{dT}{r \cdot d\varphi} = g \cdot r \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - 1 \right) .$$

Aplicando la [5a] se puede escribir la ecuación diferencial para la trayectoria del cable superior:

$$\frac{m_T}{2P_r \cdot a} = \frac{d^2y}{(r \cdot d\varphi)^2} = -\frac{g \cdot r}{2P_r \cdot a} \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} - 1 \right) \quad [29]$$

La integración nos da la función $f(y)$, indicativa de la forma del cable que elimina las deformaciones debidas al momento torsor:

$$\frac{dy}{r \cdot d\varphi} = -\frac{g \cdot r^2}{2a \cdot P_r} \cdot \left(\frac{\sen \varphi}{\cos \alpha} - \varphi \right) + C_1 ;$$

$$y = +\frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_r} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha} + \frac{\varphi^2}{2} + C_1 + C_2 \quad [30]$$

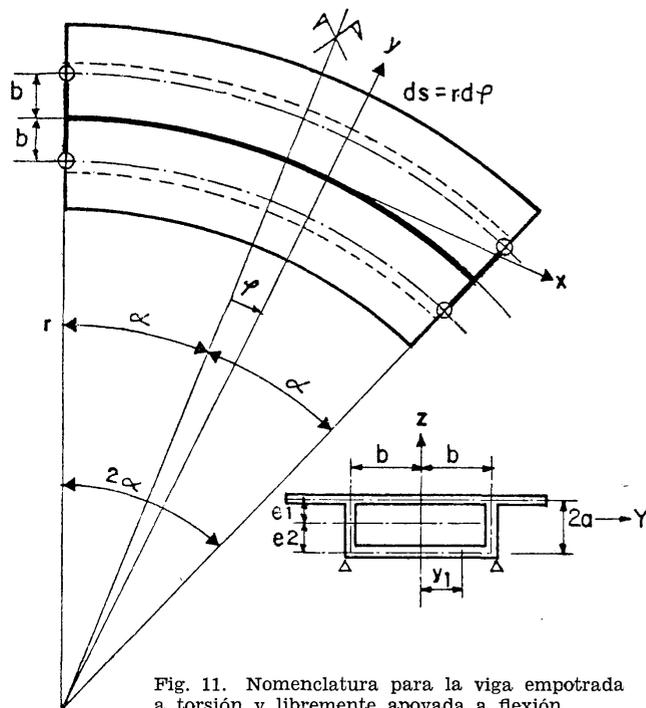


Fig. 11. Nomenclatura para la viga empotrada a torsión y libremente apoyada a flexión.

Cálculo de las constantes y de la fuerza P_r

Para definir las dos constantes de integración, se aplican las dos condiciones siguientes:

- 1.^a Para $\varphi = \alpha$, la suma de los momentos internos y exteriores tiene que ser igual a 0:

$$T_i + T_e = 0 ;$$

siendo

$$T_i = \frac{dy}{r \cdot d\varphi} \cdot P_r \cdot 2a .$$

Entrando con los correspondientes valores en la ecuación se obtiene:

$$-g \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \alpha \right) + C_1 \cdot 2a \cdot P_r + g \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \alpha \right) = 0 ; \quad C_1 = 0 .$$

- 2.^a Para $\varphi = 0$, $y = +b$:

$$b = \frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_r} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right) + C_2 ;$$
$$C_2 = b - \frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_r} \cdot \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right) .$$

La ecuación [30] se transforma introduciendo los términos para las constantes en la expresión siguiente:

$$\frac{g \cdot r^3}{2a \cdot P_r} \cdot \left(\frac{\cos \varphi - 1}{\cos \alpha} + \frac{\varphi^2}{2} \right) + b .$$

Para $\varphi = \alpha$, ..., $y = -b$, condición que nos permite calcular P_r :

$$P_r = \frac{g \cdot r^3}{4a \cdot b} \cdot \left(\frac{\alpha^2}{2} + 1 - \frac{1}{\cos \alpha} \right) .$$

Las funciones de los cables desarrolladas en los apartados anteriores se basan en la hipótesis de un tendón cuya fuerza no se disminuye debido a las pérdidas por fricción. Los valores verdaderos se obtienen calculando los momentos a base de la fuerza real:

$$P_r = P_{r,0} \cdot e^{-\mu\varphi} .$$

En el caso de tener la fricción una fuerte influencia, se puede tratar de compensar ésta mediante un aumento de las fuerzas de desvío, reduciendo el radio de curvatura.

Para una posición dada del cable que no siga una función matemática definida, se calculan los momentos mediante las expresiones para los momentos internos, transformando los cocientes diferenciales en diferencias finitas. También es posible contrarrestar al mismo tiempo a los momentos flectores y torsionales debidos a las cargas mediante cables verticales de curvas distintas; este método fue tratado por Egger y Zellner (1) y se encuentra también, junto con ejemplos numéricos, en un libro de texto del autor sobre «Diseño y Cálculo de Estructuras Pretensadas», que será publicado por Marcombo, S. A., Barcelona.

BIBLIOGRAFIA

1. EGGER und ZELLNER: «Zur Spanngliedführung in gekrümmten Balken». Beitrag zu: «Stahlbau und Baustatik - Aktuelle Probleme». Wien, 1965, Springer-Verlag.
2. J. JOHANNSON: «Diseño y Cálculo de Estructuras Pretensadas», con un capítulo sobre «Análisis Matricial de Sistemas Planos Pretensados», por Celso Fortoul Padrón. Marcombo, S. A., Barcelona.
3. SÄGER: «Ueber die Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit der Randbalken vom Stahlbetondeck», en «Beton und Stahlbetonbau», 1950.

résumé

Introduction de moments internes de torsion par précontrainte

J. Johansson, Prof. Dr. Ing.

Dans cet article, l'auteur étudie la possibilité de transférer des moments au revêtement moyennant la résistance à la torsion d'une poutre, évitant ainsi les solutions de piles ou piliers sollicités fortement à la torsion et créant, par précontrainte, des moments internes qui résistent directement au moment de torsion agissant. Ainsi, pour certains cas de charge, la rotation de la section due au couple de torsion est réduite et même éliminée.

En premier lieu, une étude de ce type de torsion est effectuée avec l'exemple simple d'une poutre creuse, en porte-à-faux, sollicitée à une extrémité par un couple de torsion.

summary

Introduction of internal moments of stress by means of prestressing

J. Johansson, Prof. Dr. Eng.

In this article the possibility is being studied of transferring bending moments to the ground by means of torsional strength of a beam. This avoids the need to subject columns to high torsional stresses. This system, by prestressing, induces internal moments which compensate the torsional moment. This reduces, or eliminates, under certain loading cases, the angular deflection due to torsion couples.

Primarily, a study is carried out on this type torsion — with the example of a simple hollow beam, in corbel, subjected at one end to a torsion couple.

zusammenfassung

Einführung innerer torsionsmomente durch vorspannung

J. Johansson, Prof. Dr. Ing.

In diesem Artikel wird die Möglichkeit, Momente durch Torsionsfähigkeit eines Balkens zum Boden zu überführen studiert. Hierdurch vermeidet man die Notwendigkeit der Torsion streng unterbreitete Stützen zu verwenden. Dieses vorgespannte System, verursacht innere Momente die direkt dem Torsionsmoment widerstehen. In einigen Belastungsfällen reduziert oder eliminiert diese Einrichtung die von dem Torsionspaar verursachten Winkeldeformation.