Informes de la Construcción Vol. 16, nº 153
Agosto, septiembre de 1963

Flexión y compresión compuestas en secciones rectangulares

Método en rotura del momento tope

P. JIMENEZ MONTOYA, ingeniero de construcción

450 - 5

sinopsis Constituye este trabajo un resumen ordenado del estudio de secciones rectangulares sometidas a flexión o compresión compuesta, por el método del momento tope, que forma parte de la obra que el autor tiene en preparación sobre hormigón armado y pretensado.

El método del momento tope, basado en las propiedades reológicas del hormigón y en los nuevos conceptos del coeficiente de seguridad, ha sido admitido por el Comité Européen du Béton (C. E. B.), a propuesta de la Comisión española, y es de mucha utilidad por constituir un procedimiento muy sencillo, y a la vez más de acuerdo con la realidad, que los métodos clásicos. Por otra parte, este es el método de cálculo adoptado por la reciente Instrucción H. A. 61, especial para estructuras de hormigón armado, publicada por el Instituto Eduardo Torroja.

El objeto del presente artículo es divulgar el método del momento tope, mediante el establecimiento de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, así como su aplicación a los distintos problemas de comprobación y dimensionamiento que suelen presentarse. Para facilitar la labor del calculista, se han construido unos ábacos, de muy fácil manejo, de los que sólo se insertan dos, por no extenderse demasiado.

Consideraciones generales

Una sección de hormigón armado está sometida a *flexión compuesta* en su agotamiento cuando sobre ella actúa un esfuerzo normal, N, de tracción o de compresión, de modo que su excentricidad origina deformaciones de distinto signo en las fibras de la sección útil.

Una sección está sometida a *compresión compuesta* en su agotamiento cuando sobre ella actúa un esfuerzo normal, N, de compresión, cuya excentricidad origina acortamiento en todas las fibras de la sección útil.

Por último, una sección está sometida a *tracción compuesta* en su agotamiento cuando sobre ella actúa una fuerza normal, N, de tracción, cuya excentricidad origina alargamiento en todas las fibras de la sección útil. Este caso se presenta cuando la fuerza de tracción N actúa entre las dos armaduras y será tratado aparte.

Por consiguiente, existirá flexión compuesta cuando la fibra neutra de tensiones sea $y < 0{,}75 \cdot h$, y compresión compuesta en caso contrario, es decir, para $y \geqq 0{,}75 \cdot h$.

La fuerza normal N la consideramos como positiva cuando es de compresión y negativa cuando es de tracción, y su excentricidad, e, la referimos siempre a la armadura de tracción o a la armadura menos comprimida, A'. El signo de e será positivo cuando, tanto la fuerza N como el borde más comprimido caen al mismo lado de A', y negativo en caso contrario (1).

Recuérdese que no deben considerarse para las armaduras que trabajan a compresión, valores de su límite elástico de agotamiento (resistencia minorada) superiores a 3.750 kg/cm². Y que para las

(1) En todo cuanto se dice a continuación, excluimos la tracción excéntrica, que, como se ha dicho, se estudia aparte.

piezas hormigonadas verticalmente, la resistencia minorada del hormigón debe disminuirse en un 10 por ciento.

Finalmente, debe tenerse en cuenta el aumento virtual de la excentricidad, que eventualmente pueda originarse como consecuencia de la inestabilidad por pandeo.

Ecuaciones de equilibrio

Si para una excentricidad, e, es N_p el máximo esfuerzo normal previsible, y γ_s su coeficiente de seguridad, como esfuerzo y momento de agotamiento podemos considerar, respectivamente, los valores $N_u = \gamma_s \cdot N_p$ y $N_u \cdot e = \gamma_s \cdot N_p \cdot e$.

Para establecer las ecuaciones de equilibrio debemos distinguir varios casos, según el valor de la altura y del rectángulo de tensiones.

1.° Para $0 < y < \dfrac{h}{2}$ puede admitirse, lo mismo que en flexión simple, que tanto la armadura de tracción como la de compresión alcanzan, en el agotamiento de la sección, una tensión igual a su límite elástico. Las ecuaciones de equilibrio, válidas para los aceros ordinarios y especiales normalmente empleadas son (figs. 1 y 2):

$$N_u = b \cdot y \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma_e$$

$$N_u \cdot e = b \cdot y \left(h - \frac{y}{2}\right) \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

en donde, como siempre:

σ_u = Resistencia minorada del hormigón.

σ'_e = Límite elástico minorado de la armadura extendida.

σ_e = Límite elástico minorado de la armadura comprimida.

e = Excentricidad de N_p respecto al baricentro de la armadura de tracción y en forma adimensional:

$$\nu_u = \xi + \omega - \omega'$$

$$\mu_u = \xi \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) + \omega \frac{h_c}{h}$$

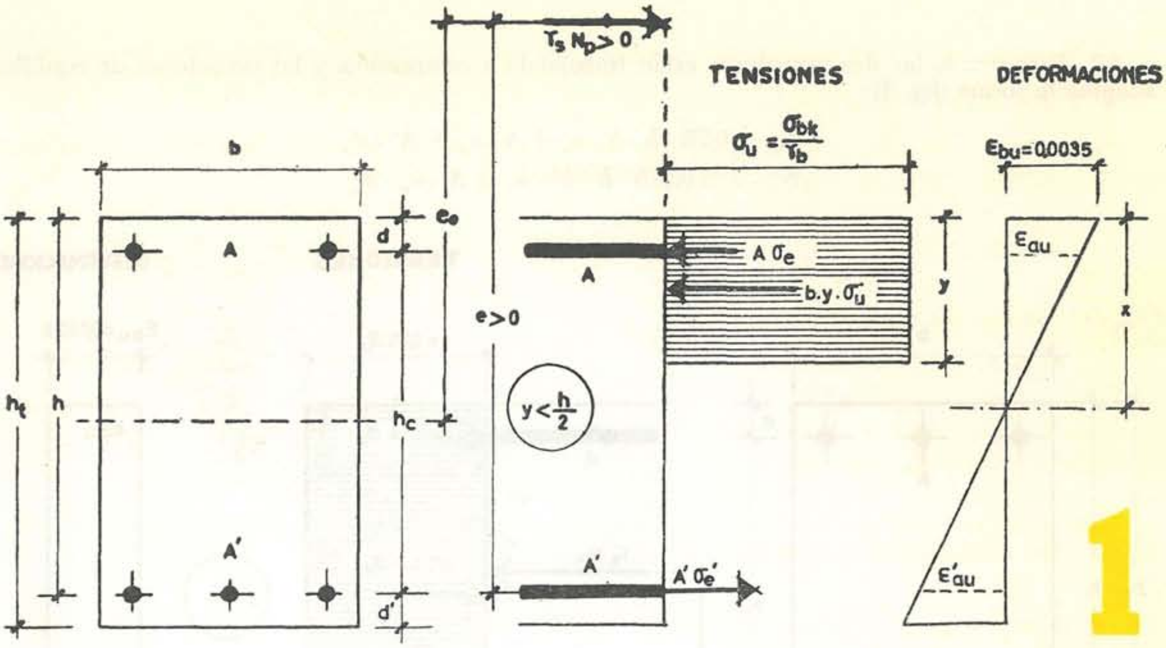
en donde hemos llamado:

$$\nu_u = \frac{\gamma_s \cdot N_p}{b \cdot h \cdot \sigma_u} \quad ; \quad \mu_u = \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_u} \quad ; \quad \omega' = \frac{A' \cdot \sigma'_e}{b \cdot h \cdot \sigma_u} \quad ; \quad \omega = \frac{A \cdot \sigma_e}{b \cdot h \cdot \sigma_u} \quad ; \quad \xi = \frac{y}{h}$$

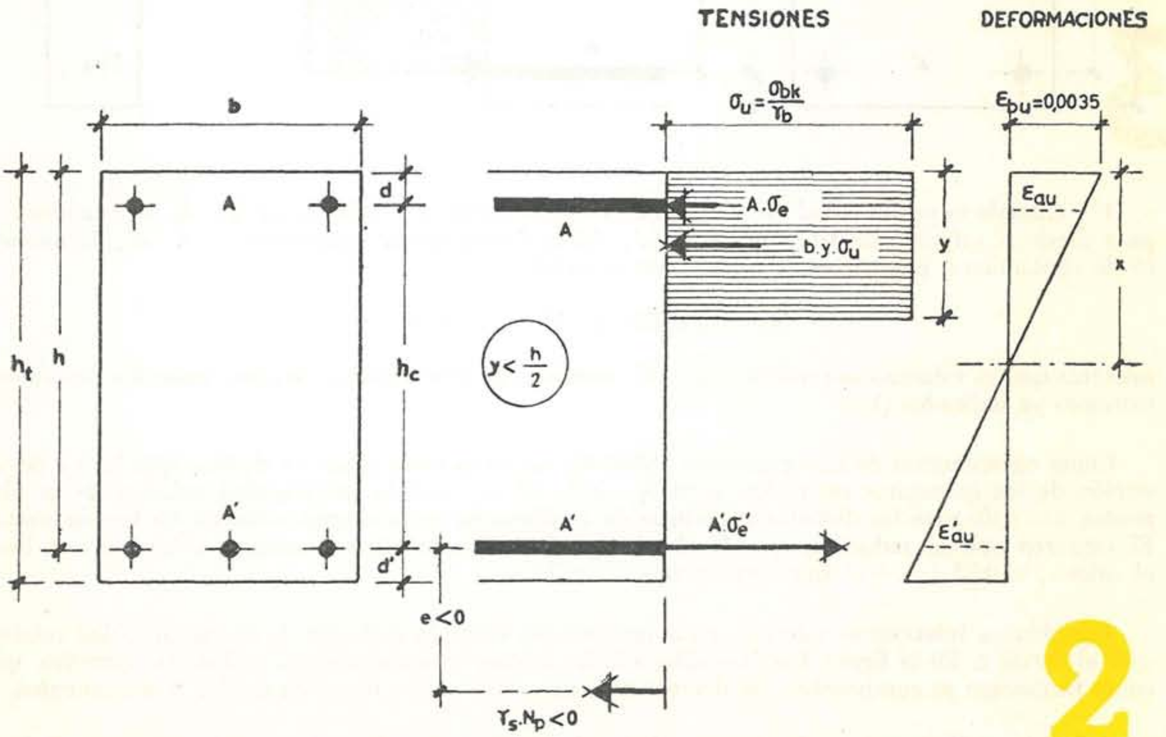
2.° Para $y = \dfrac{h}{2}$, las ecuaciones de equilibrio pueden ponerse en la forma:

$$N_u = 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e$$

$$N_u \cdot e = 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$



1



2

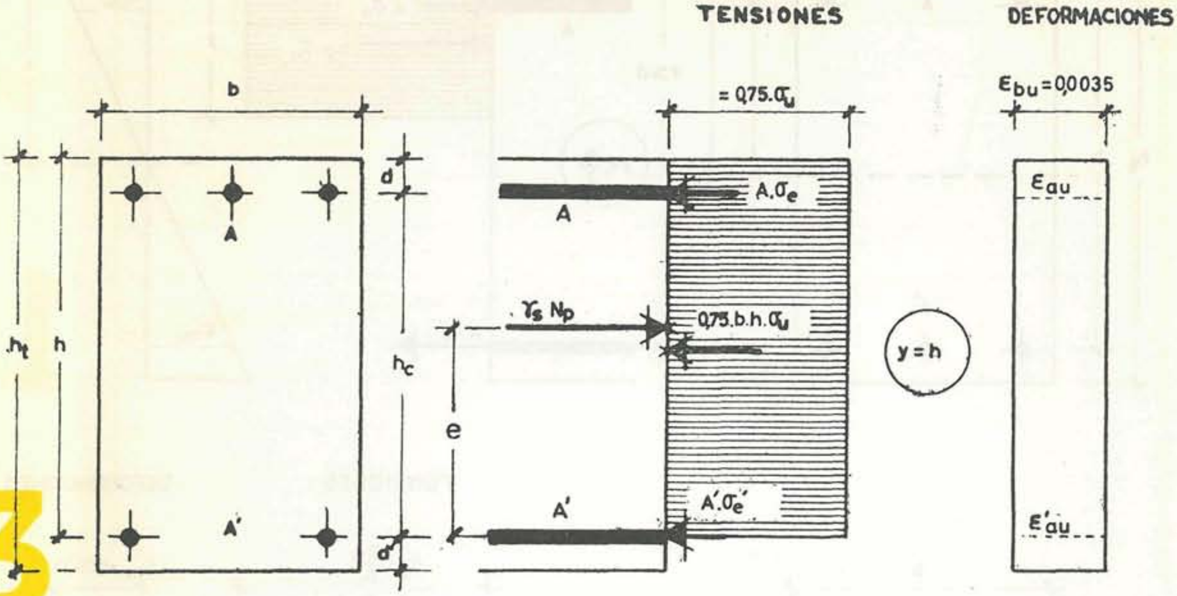
o bien en forma adimensional:

$$\nu_u = 0{,}5 + \omega - \omega'$$

$$\mu_u = 0{,}375 + \omega \frac{h_c}{h}$$

3.° Para $y = h$, las dos armaduras están trabajando a compresión, y las ecuaciones de equilibrio adoptan la forma (fig. 3):

$$N_u = 0{,}75 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e + A' \cdot \sigma'_e$$
$$N_u \cdot e = 0{,}375 \; b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$



3

4.° Cuando la profundidad de la fibra neutra varía desde $y = 0{,}5h$ hasta $y = h$, la armadura A' pasa desde el esfuerzo de tracción, $-A' \cdot \sigma'_e$, hasta el esfuerzo de compresión, $+A' \cdot \sigma'_e$. El momento de agotamiento permanece constante con el valor

$$N_u \cdot e = 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

mientras que el esfuerzo normal $N_u = \gamma_s \cdot N_p$ aumenta de una manera continua entre los dos valores extremos ya indicados (1).

Como consecuencia de las ecuaciones obtenidas en todos estos casos, se deduce que la ley de variación de los momentos reducidos, $\mu_u = N_u \cdot e/b \cdot h^2 \cdot \sigma_u$, con la profundidad relativa de la fibra neutra, $\xi = y/h$, para las distintas armaduras de compresión, es la misma obtenida en flexión simple. El esfuerzo normal reducido, $\nu_u = N_u/b \cdot h \cdot \sigma_u$, crece de una manera continua al aumentar ξ, hasta el valor $\nu_u = 0{,}75 + \omega + \omega'$, que corresponde a $\xi = 1$.

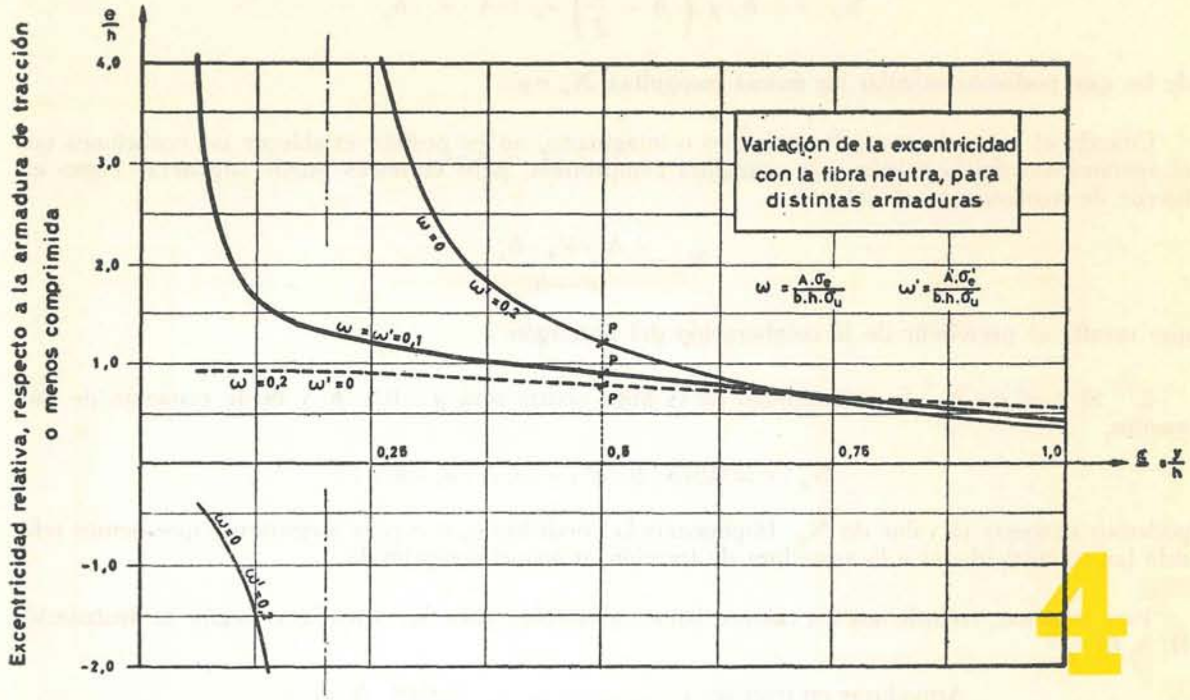
También es interesante estudiar, para una sección dada, la variación de la excentricidad relativa, e/h, al variar ξ. En la figura 4 se han dibujado las curvas correspondientes a distintas cuantías, que, como fácilmente se comprueba, son decrecientes para los valores normales de los recubrimientos.

Por tanto, si llamamos $e_{0,5}$ la excentricidad, referida a la armadura de tracción, correspondiente a $y = 0{,}5 \cdot h$, es decir,

$$e_{0,5} = \frac{0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e}$$

(1) Para $0 < \xi < 1$ podría calcularse el valor de N_u correspondiente a un valor determinado de ξ, empleando la ecuación de compatibilidad de deformaciones como se hizo en flexión simple, pero resulta innecesario en los problemas que se presentan corrientemente.

según que la excentricidad de la fuerza N_u sea $e \gtrless e_{0,5}$, la profundidad de la fibra neutra en el agotamiento será $y \gtrless 0{,}5 \cdot h$, respectivamente.



Por último, en algunos casos con $N > 0$ es necesario comprobar que la armadura elegida como de tracción o menos comprimida, lo es efectivamente para lo cual se calcula la excentricidad, e_b, correspondiente a la compresión uniforme, es decir, a la fuerza N_u actuando en el baricentro plástico de la sección.

$$e_b = \frac{0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{0{,}75 \cdot b \cdot h_t \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e + A' \cdot \sigma'_e}$$

y para que la elección haya sido correcta debe ser $e \geqq e_b$.

Comprobación de secciones rectangulares

Para la comprobación de una sección rectangular ya dimensionada, conociendo la calidad de los materiales, tenemos que determinar el coeficiente de seguridad, γ_s, del esfuerzo máximo previsible, N_p, con la excentricidad, e.

Es decir, conocemos todas las dimensiones geométricas de la sección, las armaduras, resistencias de agotamiento o minoradas de los materiales, así como la máxima fuerza previsible, N_p, y su excentricidad, e. Y hay que calcular el coeficiente de seguridad, γ_s, para lo que es necesario calcular antes N_u.

Para determinar el esfuerzo de agotamiento, $N_u = \gamma_s \cdot N_p$, comenzamos por el cálculo de la excentricidad, $e_{0,5}$, y pueden ocurrir dos casos:

1.° Si $e > e_{0,5}$, entonces $y < 0,5 \cdot h$, y las ecuaciones de equilibrio correspondientes son:

$$N_u = b \cdot y \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e$$
$$N_u \cdot e = b \cdot y \left(h - \frac{y}{2} \right) \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

de las que podemos calcular las únicas incógnitas, N_u e y.

Cuando el valor de y resulta negativo o imaginario, no es posible establecer las ecuaciones con el agotamiento del hormigón y la armadura comprimida, pero entonces puede suponerse como esfuerzo de agotamiento el valor

$$N_u = \frac{A' \cdot \sigma'_e \cdot h_c}{e - h_c}$$

que resulta al prescindir de la colaboración del hormigón.

2.° Si $e_b \leqq e \leqq e_{0,5}$, la profundidad de la fibra neutra será $y \geqq 0,5 \cdot h$, y de la ecuación de momentos,

$$N_u \cdot e = 0,375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c,$$

podemos despejar el valor de N_u. Imponemos la condición $e_b \leqq e$ para asegurarnos que hemos referido las excentricidades a la armadura de tracción, o menos comprimida.

Para terminar, recordemos los valores límites admisibles para las armaduras según la Instrucción H. A. 61:

Armaduras en tracción	$\geqq 0,04 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$
Armaduras en compresión	$\geqq 0,05 \cdot \gamma_s \cdot N_p$
Armaduras en compresión	$\leqq 0,75 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$

Otro problema de comprobación que puede presentarse es el de la determinación de la máxima excentricidad, e, referida a la armadura de tracción o menos comprimida, con que puede actuar una fuerza dada, $\gamma_s \cdot N_p$, en una sección ya dimensionada. Distinguiremos los mismos casos que en el problema anterior.

1.° Si $\gamma_s \cdot N_p < 0,5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e$, pueden establecerse las ecuaciones de equilibrio, con $y < 0,5 \cdot h$, y, por tanto:

$$\gamma_s \cdot N_p = b \cdot y \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e$$
$$\gamma_s \cdot N_p \cdot e = b \cdot y \left(h - \frac{y}{2} \right) \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

de las que podemos determinar y y e. En caso de que y resultase negativo puede tomarse, prescindiendo de la colaboración del hormigón, el valor de e:

$$e = \left(1 + \frac{A' \cdot \sigma'_e}{\gamma_s \cdot N_p} \right) \cdot h_c$$

2.° Si $0,5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e \leqq \gamma_s \cdot N_p \leqq 0,75 \cdot b \cdot h_t \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e + A' \cdot \sigma'_e$, la ecuación de momentos, con $y \geqq 0,5 \cdot h$, nos da el máximo valor de e,

$$e = \frac{0,375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{\gamma_s \cdot N_p}$$

referido a la armadura de tracción o menos comprimida.

Dimensionamiento de secciones rectangulares

En los distintos problemas de dimensionamiento de secciones rectangulares que se presentan en flexión y compresión compuesta, se conocen siempre la máxima fuerza previsible, N_p, su excentricidad, e_o, referida al centro del canto total, el coeficiente de seguridad, γ_s, y las resistencias de agotamiento de los materiales. El ancho, b, casi siempre podemos fijarlo, y hay que determinar el canto y las armaduras.

1.° *Determinación del canto.*

Si el canto no viene impuesto por las necesidades de la obra, puede determinarse, bien por la condición de que sea el mínimo posible, o bien para que la sección resulte económica.

a) El canto mínimo, sin armadura de compresión, resulta, con $y \geq 0{,}5 \cdot h$, de la ecuación de los momentos:

$$\mathbf{N}_u \left(e_o + \frac{h_t}{2} - d' \right) = 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u$$

en donde $d' = \rho' \cdot h$ es el recubrimiento de A′, y h, la única incógnita. Si tenemos en cuenta que,

$$e = e_o + \frac{h_t}{2} - d' = e_o + \frac{h}{2} (1 - \rho')$$

obtenemos el valor:

$$h_{min} = \frac{2 \cdot \gamma_s \cdot N_p}{3 \cdot b \cdot \sigma_u} (1 - \rho') + \sqrt{\left[\frac{2 \cdot \gamma_s \cdot N_p}{3 \cdot b \cdot \sigma_u} (1 - \rho') \right]^2 + \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e_o}{0{,}375 \cdot b \cdot \sigma_u}}$$

Resulta más cómodo obtener el canto total mínimo, h_t, cuyo valor se obtiene del anterior correspondiente al canto útil:

$$(h_t)_{min} \simeq \frac{h}{1 - \rho'} = \frac{2 \cdot \gamma_s \cdot N_p}{3 \cdot b \cdot \sigma_u} + \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma_s \cdot N_p}{3 \cdot b \cdot \sigma_u} \right)^2 + \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e_o}{0{,}375 \cdot b \cdot \sigma_u (1 - \rho')^2}}$$

Para valores grandes de e, el canto mínimo puede dar lugar a cuantías muy fuertes, por lo que, desde el punto de vista económico, se recomienda adoptar cantos mayores (1).

b) Para cantos mayores que el mínimo se recomiendan los siguientes:

$$(h_t)_{\text{r·ec.}} = \frac{1{,}3 \cdot \gamma_s \cdot N_p}{b \cdot \sigma_u} + K \sqrt{\frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e_o}{b \cdot \sigma_u}}$$

con valores de K comprendidos entre 2,5 y 3,5, y armadura de compresión nula y recubrimiento corriente.

(1) Para $0{,}5 \cdot h < e < 0{,}75 \cdot h$, la armadura necesaria, con canto mínimo, es $A' = 0$. Si la excentricidad aumenta por encima de $0{,}75 \cdot h$, el valor necesario de A′ irá también aumentando.

2.° *Determinación de la armadura de compresión.*

Para el cálculo de la armadura de compresión debemos distinguir varios casos:

a) Con cantos iguales o superiores al mínimo, es decir, cuando $\gamma_s \cdot N_p \cdot e \leq 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u$, no es necesario armadura de compresión, por lo que se colocará cuantía mínima:

$$A \cdot \sigma_e \geqq 0{,}05 \cdot \gamma_s \cdot N_p$$

b) Cuando el canto se haya fijado con un valor inferior al mínimo, es decir, si es $\gamma_s \cdot N_p \cdot e > > 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u$, es necesario colocar armadura de compresión. De la ecuación de equilibrio de momentos,

$$\gamma_s \cdot N_p \cdot e = 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

obtenemos la armadura $A \cdot \sigma_e$:

$$A \cdot \sigma_e = \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e - 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u}{h_c}$$

con el valor mínimo ya indicado.

c) Si la armadura de compresión ha sido fijada previamente, su valor ha de ser igual o mayor que la estrictamente necesaria, calculada en los dos casos anteriores.

3.° *Determinación de la armadura de tracción o menos comprimida.*

Una vez fijados o calculados el canto y la armadura de compresión, se determina la armadura de tracción o menos comprimida, para lo cual distinguimos tres casos:

a) Si $\gamma_s \cdot N_p \geqq 0{,}75 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e$ estamos en compresión excéntrica y, por tanto,

$$A' \cdot \sigma'_e = \gamma_s \cdot N_p - 0{,}75 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u - A \cdot \sigma_e$$

Si la armadura de compresión, A, fuese superior a la estrictamente necesaria, tenemos que asegurarnos que hemos elegido bien la armadura menos comprimida, es decir, que es $e \geqq e_b$.

b) Para $0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e < \gamma_s \cdot N_p < 0{,}75 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e$ pueden establecerse las ecuaciones de equilibrio para $y > 0{,}5 \cdot h$, con $A' = 0$, y, por tanto, colocamos armadura mínima.

En el caso de necesitar armadura de compresión, y el valor adoptado A fuese superior a la estrictamente necesaria, debemos asegurarnos que hemos elegido bien la armadura de tracción o menos comprimida, es decir, que es $e \geqq e_b$.

c) Para $\gamma_s \cdot N_p \leq 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e$ pueden establecerse las ecuaciones de equilibrio, con $y \leq 0{,}5 \cdot h$:

$$\gamma_s \cdot N_p = b \cdot y \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e$$

$$\gamma_s \cdot N_p \cdot e = b \cdot y \left(h - \frac{y}{2} \right) \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

de donde calculamos A' e y:

$$y = h \left[1 - \sqrt{1 - 2 \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e - A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_u}} \right]$$

$$A' \cdot \sigma'_e = b \cdot y \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - \gamma_s \cdot N_p$$

o bien aproximadamente:

$$A' \cdot \sigma'_e = 0{,}97 \; \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e - A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{h} \left(1 + \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e - A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_u}\right) + A \cdot \sigma_e - \gamma_s \cdot N_p$$

Para que este cálculo sea correcto, ha de ser $\gamma_s \cdot N_p \cdot e > A \cdot \sigma_e \cdot h_c$. Si el valor de $A' \cdot \sigma'_e$ resultase negativo (con $N > 0$), puede hacerse $A' = 0$, pero asegurándose que A es, efectivamente, la armadura más comprimida, es decir, que $e > e_b$ (1).

En el caso de ser $\gamma_s \cdot N_p \cdot e \leqq A \cdot \sigma_e \cdot h_c$ puede tomarse, según ya se vio:

$$A' \cdot \sigma'_e = \frac{\gamma_s \cdot N_p(e - h_c)}{h_c}$$

Por último, cuando la armadura de compresión, A, sea la estrictamente necesaria pueden establecerse las ecuaciones de equilibrio, con $y = 0{,}5 \cdot h$, y, por tanto:

$$A' \cdot \sigma'_e = 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - \gamma_s \cdot N_p$$

Recuérdese que los valores mínimos de las armaduras de tracción o menos comprimidas son:

Armaduras en tracción	$0{,}04 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$
Armaduras en compresión	$0{,}05 \cdot \gamma_s \cdot N_p$

Secciones rectangulares con armadura simétrica

En algunos casos de secciones rectangulares sometidas a flexión o compresión compuesta es conveniente disponer armaduras simétricas, bien porque las solicitaciones pueden variar simétricamente, como ocurre a veces en los arcos, o bien por simplificaciones constructivas, como se hace generalmente en los soportes de edificios corrientes.

Los problemas de cálculo que pueden presentarse son análogos a los estudiados anteriormente.

La comprobación de secciones ya dimensionadas con armadura simétrica se hace como se ha indicado para el caso general.

Respecto a los problemas de dimensionado, el más importante es el correspondiente al cálculo de las armaduras, $A = A'$, necesarias para que una sección de dimensiones conocidas pueda soportar un esfuerzo dado, N_p, con una excentricidad, e, y un coeficiente de seguridad, γ_s. Se conocen también las resistencias minoradas de los materiales.

Suponemos que la excentricidad, e, está referida a la armadura menos comprimida, es decir, que $e > 0{,}5 \cdot h_c$ y, además, que $\sigma_e = \sigma'_e$.

Para el cálculo de la armadura, $A = A'$, única incógnita, debemos distinguir dos casos:

a) Para $\gamma_s \cdot N_p < 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$ podemos establecer las ecuaciones de equilibrio con $y < 0{,}5 \cdot h$, es decir:

$$\gamma_s \cdot N_p = b \cdot y \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e$$

$$\gamma_s \cdot N_p \cdot e = b \cdot y \left(h - \frac{y}{2}\right) \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

(1) Pues fácilmente se comprueba que la máxima excentricidad a que puede colocarse la fuerza $\gamma_s \cdot N_p$, con $A' = 0$, es superior al valor dado de e.

de las que calculamos el valor de $A \cdot \sigma_e$,

$$y = \frac{\gamma_s \cdot N_p}{b \cdot \sigma_u}$$

$$A \cdot \sigma_e = A' \cdot \sigma'_e = \frac{\gamma_s \cdot N_p}{h_c} \left[e - h + \frac{\gamma_s \cdot N_p}{2 \cdot b \cdot \sigma_u} \right]$$

y si resultase negativo, puede hacerse $A = A' = 0$.

b) Para $\gamma_s \cdot N_p > 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$ podemos establecer las ecuaciones de equilibrio, con $y > 0{,}5 \cdot h$, y, por tanto:

$$\gamma_s \cdot N_p \cdot e = 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e$$

de donde se deduce:

$$A \cdot \sigma_e = A' \cdot \sigma'_e = \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e - 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \sigma_u}{h_c}$$

siendo este cálculo válido, tanto para flexión compuesta como compresión compuesta, con la única condición de que la excentricidad, *e*, la hayamos referido a la armadura menos comprimida, es decir, que $e > 0{,}5 \cdot h_c$ (1).

En el caso de que $A \cdot \sigma_e$ resultase negativo, puede hacerse $A = A' = 0$. Conviene recordar que nunca debemos colocar armaduras inferiores a los valores mínimos indicados en otro lugar.

Tracción compuesta

Como ya se ha dicho, consideramos que una sección está sometida a tracción compuesta, en su agotamiento, cuando sobre ella actúa una fuerza normal, N_p, de tracción, cuya excentricidad origina alargamientos en todas las fibras de su sección útil.

Si referimos la excentricidad, *e*, a una cualquiera de las armaduras, A', las ecuaciones de equilibrio, con $N_u = \gamma_s \cdot N_p < 0$ y $0 \leq e \leq h_c$, en el agotamiento son:

$$-N_u = A \cdot \sigma_e + A' \cdot \sigma'_e$$
$$-N_u \cdot e = A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

Para la comprobación de una sección rectangular ya dimensionada, conociendo las armaduras y su resistencia minorada, así como el máximo esfuerzo previsible, $N_p < 0$, y su excentricidad, *e*, tal que $0 \leq e \leq h_c$, tenemos que determinar el coeficiente de seguridad, γ_s de N_p. El esfuerzo de agotamiento, $N_u = \gamma_s \cdot N_p$, se determina a partir de las ecuaciones de equilibrio y, por tanto, será el menor de los valores:

$$\gamma_s \cdot N_p = -\frac{A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{e}, \quad \gamma_s \cdot N_p = -\frac{A' \cdot \sigma'_e \cdot h_c}{h_c - e}$$

de donde se calcula el valor de γ_s.

Para el cálculo de las armaduras necesarias de una sección de dimensiones conocidas, sometida

(1) Con la condición $e > 0{,}5 \cdot h_c$ podemos asegurar que la armadura así calculada es mayor que la obtenida de la otra ecuación de equilibrio, en compresión compuesta.

a un esfuerzo de tracción dado, N_p, con coeficiente de seguridad, γ_s, y excentricidad, e, también conocidos, establecemos las ecuaciones de equilibrio:

$$-\gamma_s \cdot N_p = A \cdot \sigma_e + A' \cdot \sigma'_e$$
$$-\gamma_s \cdot N_p \cdot e = A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

de las que se determinan los valores $A \cdot \sigma_e$ y $A' \cdot \sigma'_e$:

$$A \cdot \sigma_e = -\frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e}{h_c}$$

$$A' \cdot \sigma'_e = -\frac{\gamma_s \cdot N_p (h_c - e)}{h_c}$$

en donde e es la excentricidad referida a la armadura A' y con la limitación $0 \leqq e \leqq h_c$.

Las armaduras deben tener el valor mínimo:

$$A \cdot \sigma_e \geqq 0{,}05 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$$
$$A' \cdot \sigma'_e \geqq 0{,}05 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$$

Abacos para armaduras asimétricas

Los ábacos para secciones rectangulares sometidas a flexión o compresión compuesta son los mismos que para flexión simple. Para los distintos cantos, normalmente empleados, se han construido tres series, correspondientes a otras tantas resistencias características del hormigón:

Serie oro para ... ... $\sigma_{bk} = 130$ kg/cm² y acero ordinario

Serie azul para ... ... $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm² y cualquier acero

Serie verde para ... ... $\sigma_{bk} = 225$ kg/cm² y cualquier acero

Cada ábaco corresponde a un canto determinado, y consta de dos escalas principales cartesianas la de abscisas, graduada para los valores de $\frac{M_p}{b}$, y la de ordenadas, para $\frac{A \cdot \sigma_e}{b}\left(\text{ó } \frac{A' \cdot \sigma'_e}{b}\right)$ con las siguientes unidades:

M_p = Máximo momento previsible, respecto a la armadura de tracción o menos comprimida, en m. t.

b = Ancho, en m.

$A \cdot \sigma_e$ = Capacidad mecánica de la armadura de compresión, en t.

$A' \cdot \sigma'_e$ = Capacidad mecánica de la armadura de tracción o menos comprimida, en t.

Si, como es corriente, son datos el máximo esfuerzo normal previsible, N_p, y el máximo momento previsible, M_o, respecto al eje geométrico, tenemos:

$$M_p = N_p \cdot e = N_p \left(e_o + \frac{h_c}{2}\right) = M_o + N_p \frac{h_c}{2}$$

con las siguientes unidades y notaciones:

N_p = Máximo esfuerzo normal previsible, en t.

M_o = Máximo momento previsible, respecto al eje geométrico, en m. t.

e = Excentricidad respecto a la armadura de tracción o menos comprimida, en m.

e_o = Excentricidad respecto al eje geométrico, en m.

h_c = Distancia entre ambas armaduras, en m.

Las tres series de ábacos se han calculado para los siguientes coeficientes de seguridad:

Coeficiente de seguridad del hormigón ... ... $\gamma_b = 1{,}6$
Coeficiente de seguridad de la solicitación ... ... $\gamma_s = 1{,}65$

no obstante pueden emplearse para otro valor de γ_s, para lo cual basta entrar en el ábaco con el valor corregido de M_p:

$$M_p \cdot \frac{\gamma_s}{1{,}65}$$

La recta inferior de cada ábaco corresponde a las armaduras en compresión, y la línea mixta superior, a las armaduras en tracción.

Aparte de las dos escalas principales, se han dispuesto otras particulares, correspondientes a distintos anchos *b*.

Para el empleo del ábaco debemos distinguir dos casos:

1.° Si al entrar en la escala de momentos del ábaco, correspondiente al ancho *b*, con los dos valores,

$$N_p \cdot \frac{h_c}{2} + M_o \quad \text{y} \quad N_p \cdot \frac{h_c}{2} - M_o$$

caen ambos en la zona donde es necesaria armadura de compresión, es decir, debajo de la recta inferior de compresión, *estamos en compresión compuesta.* Las verticales trazadas por los dos puntos correspondientes cortarán a dicha recta de compresión en otros dos puntos, cuyas ordenadas, leídas en la escala vertical del ancho *b*, nos dan valores de las capacidades mecánicas $A \cdot \sigma_e$ y $A' \cdot \sigma'_e$ (1).

En este caso no se utiliza la línea mixta superior del ábaco.

De no existir escala específica para un *b* determinado, hay que entrar en las escalas principales dividiendo los momentos por el ancho *b*, y encontramos los valores $\frac{A \cdot \sigma_e}{b}$ y $\frac{A' \cdot \sigma'_e}{b}$

2.° Si el valor $N_p \cdot \frac{h_c}{2} - M_o$ no cae en zona de la recta de compresión, entramos en la escala de momentos del ábaco, correspondiente al ancho *b*, sólo con el valor:

$$N_p \cdot \frac{h_c}{2} + M_o$$

La vertical trazada por el punto correspondiente cortará a la línea de tracción y, eventualmente, a la de compresión, en dos puntos cuyas ordenadas, leídas en la escala vertical de ancho *b*, nos dan dos valores, $A' \cdot \sigma'_e$ y $A \cdot \sigma_e$, debiendo corregir el correspondiente a la armadura en tracción, restándole el valor $\gamma_s \cdot N_p$, es decir:

Capacidad mecánica de la armadura en tracción ... ... $A' \cdot \sigma'_e - \gamma_s \cdot N_p$
Capacidad mecánica de la armadura en compresión ... ... $A \cdot \sigma_e$

Si el valor de la capacidad mecánica correspondiente a la armadura de tracción resultase negativo, puede hacerse $A' = 0$.

(1) Puede comprobarse que la armadura menos comprimida así obtenida es algo inferior a la calculada, pero está en buenas condiciones, como puede verse al hacer la comprobación de γ_s. El ábaco está calculado con la fórmula $A' \cdot \sigma'_e = \gamma_s \cdot N_p - 0{,}75 \cdot b \cdot h_t \cdot \sigma_u - A \cdot \sigma_e$, mientras que las fórmulas propuestas en la teoría se recomienda la misma expresión, pero cambiando h_t por h.

Abacos para armaduras simétricas

Estos ábacos, dedicados principalmente al cálculo de soportes sometidos a flexión o compresión compuesta, se han construido para los distintos cantos normalmente empleados. Constan de tres series, correspondientes a otras tantas resistencias características:

Serie oro para ... ... $\sigma_{bk} = 130$ kg/cm² y acero ordinario

Serie azul para... ... ... $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm² y cualquier acero

Serie verde para ... ... $\sigma_{bk} = 225$ kg/cm² y cualquier acero

Cada ábaco corresponde a un canto determinado, y consta de dos escalas principales cartesianas, la de abscisas, graduado para los valores de N_p/b, y la de ordenadas para M_o/b, y una familia de curvas correspondientes a los distintos valores de $A \cdot \sigma_e/b$, con las siguientes unidades y notaciones:

N_p = Máximo esfuerzo previsible, en t.

M_o = Máximo momento previsible, respecto al eje geométrico, en m. t.

$A \cdot \sigma_e$ = Capacidad mecánica de la armadura de un sólo lado, en t.

b = Ancho, en m.

Las tres series de ábacos se han calculado disminuyendo la correspondiente resistencia característica en un 10 por 100, de acuerdo con la Instrucción H. A. 61. Los coeficientes de seguridad adoptados han sido:

Coeficiente de seguridad del hormigón ... ... $\gamma_b = 1{,}6$

Coeficiente de seguridad de la solicitación... ... ... $\gamma_s = 1{,}65$

No obstante, pueden emplearse los ábacos para otro valor de γ_s, para lo cual basta entrar con los valores corregidos de N_p y M_o:

$$N_p \cdot \frac{\gamma_s}{1{,}65} \quad \text{y} \quad M_o \cdot \frac{\gamma_s}{1{,}65}$$

Aparte de las dos escalas principales, se han dispuesto otras particulares correspondientes a distintos anchos b.

Para la utilización de los ábacos se entra con los valores de M_o (en m. t) y N_p (en t) en las escalas correspondientes al ancho b. La intersección de la horizontal y vertical correspondientes nos determina el valor $\frac{A \cdot \sigma_e}{b}$ que corresponde a un solo lado. Entrando en la tabla de acero correspondiente, obtenemos el número de redondos necesario.

De no haber escalas específicas para el b dado, entramos en el ábaco con los valores M_o/b (en t) y N_p/b (en t/m).

Ejemplos de aplicación

A continuación hemos desarrollado algunos ejemplos de aplicación, resueltos con las fórmulas expuestas.

En todos ellos se considera una sección rectangular, de $b = 0{,}30$ m, con hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm², y acero ordinario. Coeficientes de seguridad del hormigón y del acero, $\gamma_b = 1{,}6$ y $\gamma_a = 1{,}2$, respectivamente. Es decir:

$$b = 0{,}30 \text{ m.}$$

$$\sigma_{bk} = 180 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_{bk}}{\gamma_b} = 112{,}5 \text{ kg/cm}^2 = 1.125 \text{ t/m}^2.$$

Suponemos que se trata de piezas que no se hormigonan verticalmente, por lo que no se ha rebajado la resistencia del hormigón en un 10 por ciento.

Ejemplo 1.° Comprobar una sección rectangular de las dimensiones indicadas, con recubrimientos, $d = d' = 0{,}03$ m, y armaduras, $A = 2\varnothing 20$, $A' = 3\varnothing 20$, sometida a un esfuerzo normal, $N_p = 25{,}3$ t, y a un momento, $M_o = 9{,}2$ m. t, referido al punto medio del canto total. Es decir, tenemos que calcular el coeficiente de seguridad de la solicitación, γ_s.

Los datos son:

$$b = 0{,}30 \text{ m.} \qquad A' = 3\varnothing 20$$

$$h = 0{,}47 \text{ m.} \qquad \sigma_u = 1.125 \text{ t/m}^2$$

$$h_c = 0{,}44 \text{ m.} \qquad N_p = 25{,}3 \text{ t.}$$

$$A = 2\varnothing 20 \qquad M_o = 9{,}2 \text{ m. t.}$$

Como se trata de aceros ordinarios, de la tabla correspondiente obtenemos las capacidades mecánicas, $A \cdot \sigma_e = 12{,}04$ t y $A' \cdot \sigma'_e = 18{,}06$ t.

Comenzamos calculando las excentricidades, e y $e_{0,5}$:

$$e_o = \frac{M_o}{N_p} = 0{,}36 \text{ m} \qquad e = e_o + \frac{h_c}{2} = 0{,}58 \text{ m}$$

$$e_{0,5} = \frac{0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e} = 0{,}45 \text{ m}$$

Como $e > e_{0,5}$ pueden establecerse las ecuaciones de equilibrio, con $y < 0{,}5 \cdot h$, es decir:

$$\gamma_s \cdot N_p = b \cdot y \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - A' \cdot \sigma'_e$$

$$\gamma_s \cdot N_p \cdot e = b \cdot y \cdot \sigma_u \left(h - \frac{y}{2} \right) + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

de las que deducimos los valores de γ_s e y:

$$y = 0{,}143 \text{ m}$$

$$\gamma_s = 1{,}67$$

que es un coeficiente de seguridad aceptable para las obras corrientes.

Ejemplo 2.° Comprobar la misma sección del ejemplo anterior, sometida a un esfuerzo normal, $N_p = 71{,}4$ t, y a un momento, $M_o = 8{,}1$ m. t, referido al punto medio del canto total. Tenemos que calcular el coeficiente de seguridad de la solicitación, γ_s.

Los datos son:

$$b = 0{,}30 \text{ m} \qquad A' = 3\varnothing 20 \; ; \; A' \cdot \sigma'_e = 18{,}06 \text{ t}$$

$$h = 0{,}47 \text{ m} \qquad \sigma_u = 1.125 \text{ t/m}^2$$

$$h_c = 0{,}44 \text{ m} \qquad N_p = 71{,}4 \text{ t}$$

$$h_t = 0{,}50 \text{ m} \qquad M_o = 8{,}1 \text{ m. t}$$

$$A = 2\varnothing 20 \; ; \; A \cdot \sigma_e = 12{,}04 \text{ t}$$

Las excentricidades, e y e_b, son:

$$e_o = \frac{M_o}{N_p} = 0{,}11 \text{ m} \quad „ \quad e = e_o + \frac{h_c}{2} = 0{,}33 \text{ m}$$

$$e_b = \frac{0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{0{,}75 \cdot b \cdot h_t \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e + A' \cdot \sigma'_e} = 0{,}21 \text{ m}$$

Como $e_{0,5} = 0{,}45$, según se calculó en el ejemplo anterior, resulta que $e_b < e < e_{0,5}$, luego $y > 0{,}5 \cdot h$, y, por tanto, el momento de agotamiento es:

$$\gamma_s \cdot N_p \cdot e = 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e \cdot h_c$$

de donde se determina el valor del coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}4$, aceptable si se trata de una obra muy vigilada.

Ejemplo 3.° Calculemos ahora el canto mínimo necesario de una sección rectangular, de ancho $b = 0{,}30$ m, sometida a un esfuerzo normal de $N_p = 6{,}0$ t, y a un momento, $M_o = 18$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}65$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm² y acero ordinario.

Los datos son:

$$\begin{array}{ll} b \ = 0{,}30 \text{ m} & M_o = 18{,}0 \text{ m. t} \\ \sigma_u \ = 1.125 \text{ t/m}^2 & \gamma_s \ = 1{,}65 \\ N_p = \ 6{,}0 \text{ t} & \rho \ = 0{,}06 \end{array}$$

El canto total mínimo, sin armadura de compresión, teniendo en cuenta que $e_o = \dfrac{M_o}{N_p} = 3{,}00$ m, es:

$$(h_t)_{min} \sim \frac{2 \cdot \gamma_s \cdot N_p}{3 \cdot b \cdot \sigma_u} + \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma_s \cdot N_p}{3 \cdot b \cdot \sigma_u}\right)^2 + \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e_o}{0{,}375 \cdot b \cdot \sigma_u \cdot (1 - \rho)^2}} = 0{,}53 \text{ m}$$

La armadura de tracción necesaria es:

$$A' \cdot \sigma'_e = 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u - \gamma_s \cdot N_p = 79{,}5 \text{ t}$$

que resulta exagerada, por lo que conviene emplear mayor canto, si la obra lo permite, como calculamos a continuación.

Ejemplo 4.° El mismo ejemplo anterior, con canto superior al mínimo.

Empleamos la fórmula, con armadura de compresión nula,

$$(h_t)_{rec.} = \frac{1{,}3 \cdot \gamma_s \cdot N_p}{b \cdot \sigma_u} + 3{,}0 \sqrt{\frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e_o}{b \cdot \sigma_u}} = 0{,}93 \text{ m}$$

y, por tanto, adoptamos, $h_t = 0{,}90$, $h = 0{,}86$ y $h_c = 0{,}82$ m ($e = e_o + 0{,}5 \cdot h_c = 3{,}41$ m).

Para la armadura de tracción necesaria obtenemos con $y < 0{,}5 \cdot h$:

$$y = h \left[1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_u}} \right] = 0{,}115 \text{ m}$$

$$A' \cdot \sigma'_e = b \cdot y \cdot \sigma_u - \gamma_s \cdot N_p = 28{,}9 \text{ t}$$

Ejemplo 5.° Calcular las armaduras de una sección rectangular, de $0{,}30 \times 0{,}50$, sometida a un esfuerzo normal, de $N_p = 25{,}3$ t, y a un momento $M_o = 9{,}2$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}65$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kilogramos/cm² y acero ordinario.

Los datos son:

$$\begin{array}{llll} b & = 0{,}30 \text{ m} & N_p & = 25{,}3 \text{ t} \\ h & = 0{,}47 \text{ m} & M_o & = 9{,}2 \text{ m. t} \\ h_c & = 0{,}44 \text{ m} & \gamma_s & = 1{,}65 \\ \sigma_u & = 1.125 \text{ t/m}^2 & & \end{array}$$

Como $\gamma_s \cdot N_p \cdot e = 24{,}4$ m. t $< 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u$ no necesita armadura de compresión, es decir, $A = 0$.

Para el cálculo de la armadura de tracción, como estamos en el caso, $\gamma_s \cdot N_p = 41{,}8 < 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$, correspondiente a $y < 0{,}5 \cdot h$, tenemos:

$$y = h \left[1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e - A \cdot \sigma_e \cdot h_c}{b \,.\, h^2 \cdot \sigma_u}} \right] = 0{,}192 \text{ m}$$

$$A' \cdot \sigma'_e = b \cdot y \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e - \gamma_s \cdot N_p = 23{,}1 \text{ t}$$

y a este valor le corresponde, en la tabla de redondos ordinarios, $A' = 4 \varnothing 20$ (1).

Ejemplo 6.° El mismo ejemplo anterior, pero fijando la armadura de compresión, $A = 2 \varnothing 20$, es decir, $A \cdot \sigma_e = 12{,}04$ t.

Ante todo, comprobamos que la armadura de compresión fijada, $A \cdot \sigma_e = 12{,}04$ t, es superior a la estrictamente necesaria, $A \cdot \sigma_e = 0$.

La armadura de tracción se calcula, como en el caso anterior, con $y < 0{,}5 \cdot h$:

$$y = 0{,}141 \text{ m}$$
$$A' \cdot \sigma'_e = 18{,}0 \text{ t}$$

al que corresponde en la tabla de acero ordinario, $A' = 3 \varnothing 20$.

Ejemplo 7.° Calcular las armaduras simétricas necesarias de una sección rectangular, de $0{,}30 \times 0{,}50$, sometida a un esfuerzo normal, $N_p = 25{,}3$ t, y a un momento, $M_o = 9{,}2$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}65$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm² y acero ordinario.

Los datos son, como en los dos ejemplos anteriores:

$$\begin{array}{llll} b & 0{,}30 \text{ m} & N_p & = 25{,}3 \text{ t} \\ h & = 0{,}47 \text{ m} & M_o & = 9{,}2 \text{ m. t} \\ h_c & = 0{,}44 \text{ m} & \gamma_s & = 1{,}65 \\ \sigma_u & = 1.125 \text{ t/m}^2 & & \end{array}$$

(1) Con los valores de las capacidades mecánicas que se obtengan puede entrarse en las tablas de los distintos tipos de aceros, siempre que se cumpla la condición, impuesta por la Instrucción H. A. 61, de que su resistencia característica sea: $\sigma_{ak} \leq 40 \,.\, \sigma_{bk} - 2.200$.

Como $\gamma_s \cdot N_p = 41{,}8$ t $< 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$ podemos establecer las ecuaciones de equilibrio, con $y < 0{,}5 \cdot h$, y como $e = e_o + \frac{h_c}{2} = 0{,}58$ m, queda:

$$y = \frac{\gamma_s \cdot N_p}{b \cdot \sigma_u} = 0{,}123 \text{ m}$$

$$A \cdot \sigma_e = A' \cdot \sigma'_e = \frac{\gamma_s \cdot N_p}{h_c}\left[e - h + \frac{\gamma_s \cdot N_p}{2 \cdot b \cdot \sigma_u}\right] = 16{,}3 \text{ t}$$

y a este valor corresponde, en la tabla de redondos ordinarios, $A = A' = 4 \varnothing 16$, algo por defecto.

Ejemplo 8.° Calcular las armaduras de una sección rectangular, de $0{,}30 \times 0{,}50$, sometida a un esfuerzo normal, $N_p = 71{,}4$ t, y a un momento, $M_o = 8{,}1$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}4$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm², y acero ordinario.

Los datos son:

$b = 0{,}30$ m	$\sigma_u = 1.125$ t/m²
$h = 0{,}47$ m	$N_p = 71{,}4$ t
$h_c = 0{,}44$ m	$M_o = 8{,}1$ m. t
$h_t = 0{,}50$ m	$\gamma_s = 1{,}4$

Como $e = e_o + \frac{h_c}{2} = 0{,}333$ m, el momento en el agotamiento, respecto a la armadura A', es $\gamma_s \cdot N_p \cdot e = 33{,}4 > 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u$ y, por consiguiente, necesita armadura de compresión:

$$A \cdot \sigma_e = \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e - 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u}{h_c} = 12{,}1 \text{ t}$$

y, por tanto, con acero ordinario, $A = 2 \varnothing 20$.

Para el cálculo de la armadura de tracción o menos comprimida, como estamos en el caso $0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e < \gamma_s \cdot N_p < 0{,}75 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e$, no necesita dicha armadura, $A' = 0$ y, por tanto, colocamos la mínima, es decir, el mayor de los dos valores:

$$0{,}05 \cdot \gamma_s \cdot N_p = 5{,}0 \text{ t}$$

$$0{,}04 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u = 6{,}4 \text{ t} \quad „ \quad A = 2 \varnothing 16$$

Ejemplo 9.° El mismo ejemplo anterior, pero con $N_p = 99{,}5$ t y un momento $M_o = 2{,}0$ m. t.

La excentricidad $e = e_o + \frac{h_c}{2} = 0{,}24$ m y como $\gamma_s \cdot N_p \cdot e = 33{,}4$ m. t es mayor que $0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u$, necesita armadura de compresión, que se calcula como en el ejemplo anterior, $A \cdot \sigma_e = 12{,}04$ t.

Para el cálculo de la armadura menos comprimida, estamos en el caso $\gamma_s \cdot N_p = 139$ t $> 0{,}75 \cdot b \cdot \sigma_u + A \cdot \sigma_e$, es decir, compresión compuesta, resulta:

$$A' \cdot \sigma'_e = \gamma_s \cdot N_p - 0{,}75 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u - A \cdot \sigma_e = 8{,}29 \text{ t}$$

que corresponde a $2 \varnothing 16$ de acero ordinario, y que es mayor que el valor mínimo $0{,}05 \cdot \gamma_s \cdot N_p$.

Ejemplo 10.° Calcular las armaduras simétricas necesarias para una sección rectangular de $0{,}30 \times 0{,}50$, sometida a un esfuerzo normal, $N_p = 99{,}5$ t, y a un momento, $M_o = 2{,}0$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}4$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm², y acero ordinario.

Los datos son:

$b = 0{,}30$ m	$\sigma_u = 1.125$ t/m²
$h = 0{,}47$ m	$N_p = 99{,}5$ t
$h_e = 0{,}44$ m	$M_o = 2{,}0$ m. t
$h_t = 0{,}50$ m	$\gamma_s = 1{,}4$

Como estamos en el caso $\gamma_s \cdot N_p = 139{,}3 \text{ t} > 0{,}5 \cdot b \cdot h \cdot \sigma_u$, pueden establecerse las ecuaciones de equilibrio, con $y > 0{,}5 \cdot h$, y, por tanto, teniendo en cuenta que $e = 0{,}24$ m, resulta:

$$A \cdot \sigma_e = A' \cdot \sigma'_e = \frac{\gamma_s \cdot N_p \cdot e - 0{,}375 \cdot b \cdot h^2 \cdot \sigma_u}{h_e} = 12{,}36 \text{ t}$$

que corresponde a armaduras, A = A′ = 4 Ø 14, de acero ordinario.

Ejemplos con los ábacos

Ejemplo 1.° Calcular las armaduras de una sección rectangular, de 0,30 × 0,50, sometida a un esfuerzo normal, $N_p = 25{,}3$ t, y a un momento, $M_o = 9{,}2$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}65$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm², y acero ordinario. Abacos de armadura asimétrica.

Los datos son:

$b = 0{,}30$ m	$N_p = 25{,}3$ t
$h_t = 0{,}50$ m	$M_o = 9{,}2$ m. t
$\sigma_{bk} = 180$ kg/cm² (serie azul)	$\gamma_s = 1{,}65$
$\gamma_b = 1{,}6$	

El momento respecto a la armadura de tracción o menos comprimida es:

$$M_o + N_p \cdot \frac{h_e}{2} = 14{,}8 \text{ m. t}$$

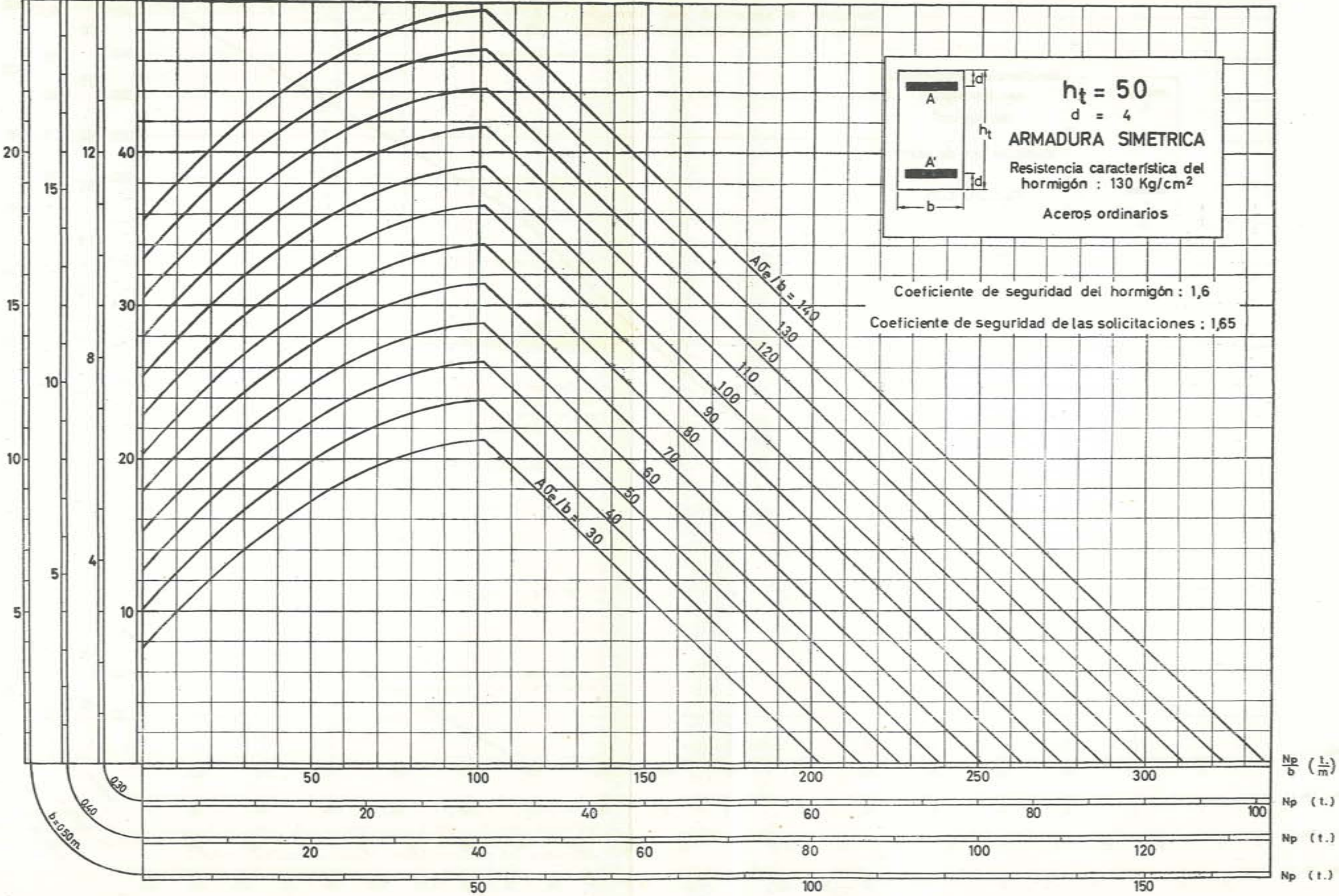
Con este valor entramos en el ábaco de flexión de $h_t = 0{,}50$ m, correspondiente a una resistencia característica, de 180 kg/cm² (serie azul), y encontramos:

$$A \cdot \sigma_e = 0$$
$$A' \cdot \sigma'_e = 65{,}3 - \gamma_s \cdot N_p = 23{,}6 \text{ t}$$

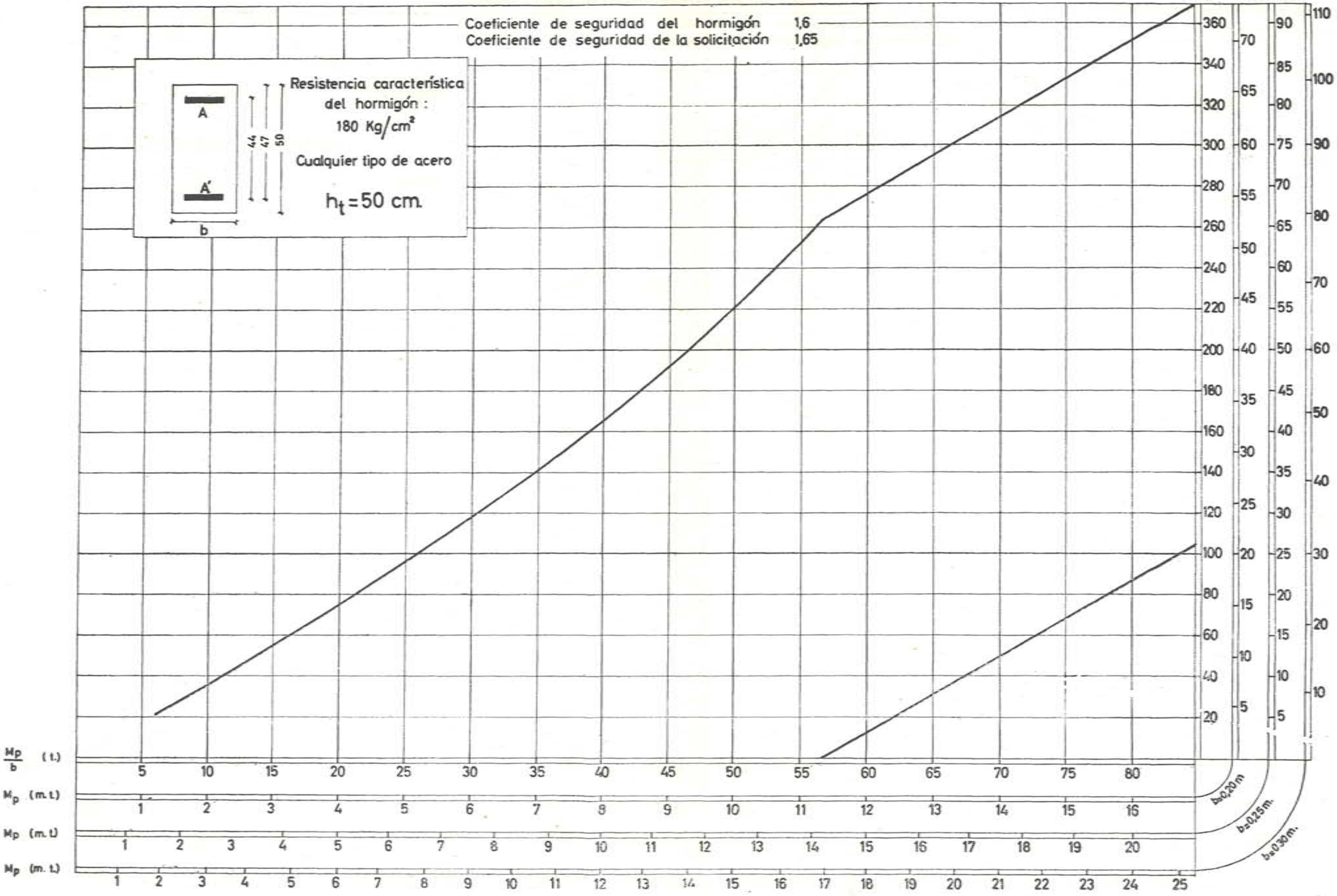
es decir, A′ = 4 Ø 20 de acero ordinario. El ábaco nos indica el recubrimiento $d' = 0{,}03$ metros.

Ejemplo 2.° Calcular las armaduras de una sección rectangular, de 0,30 × 0,50, sometida a un esfuerzo normal, $N_p = 50{,}0$ t, y a un momento, $M_o = 10{,}0$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}65$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kilogramos/cm², y acero ordinario. Abacos de armadura asimétrica.

SOPORTES SOMETIDOS A FLEXION O COMPRESION COMPUESTA
METODO DEL MOMENTO TOPE



SECCIONES DE HORMIGON ARMADO SOMETIDAS A FLEXION SIMPLE O COMPUESTA
METODO DEL MOMENTO TOPE



Los datos son:

$b = 0{,}30$ m	$N_p = 50{,}0$ t
$h_t = 0{,}50$ m	$M_o = 10{,}0$ m. t
$\sigma_{bk} = 180$ kg/cm² (serie azul)	$\gamma_s = 1{,}65$

Los recubrimientos y coeficientes de seguridad vienen impuestos por el ábaco. El momento respecto a la armadura de tracción o menos comprimida es:

$$M_o + N_p \cdot \frac{h_c}{2} = 21{,}0 \text{ m. t}$$

Entramos con este valor en el ábaco de flexión, de $h_t = 0{,}50$ m, correspondiente a una resistencia característica, de 180 kg/cm² (serie azul), y encontramos:

$$A \cdot \sigma_e = 15{,}0 \text{ t}$$
$$A' \cdot \sigma'_e = 94 - \gamma_s \cdot N_p = 11{,}5 \text{ t}$$

a los que corresponden $A = 4 \varnothing 16$ y $A' = 3, \varnothing 16$ de acero ordinario. Recubrimiento indicado por el ábaco $d = 0{,}03$ metros.

Ejemplo 3.° Calcular las armaduras de una sección rectangular, de $0{,}30 \times 0{,}50$, sometida a un esfuerzo normal, de $N_p = 71{,}4$ t, y a un momento, $M_o = 8{,}1$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}4$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kilogramos/cm², y acero ordinario. Abacos de armadura asimétrica.

Los datos son:

$b = 0{,}30$ m	$N_p = 71{,}4$ t
$h_t = 0{,}50$ m	$M_o = 8{,}1$ m. t
$\sigma_{bk} = 180$ kg/cm² (serie azul)	$\gamma_s = 1{,}4$

El momento respecto a la armadura de tracción o menos comprimida es:

$$M_o + N_p \cdot \frac{h_c}{2} = 23{,}8 \text{ m. t}$$

Como los ábacos están calculados para $\gamma_s = 1{,}65$, entramos en el de flexión, de $h_t = 0{,}50$ m y $\sigma_{bk} = 180$ kg/cm² (serie azul), con el valor:

$$23{,}8 \cdot \frac{1{,}4}{1{,}65} = 20{,}2 \text{ m. t}$$

y encontramos:

$$A \cdot \sigma_e = 12{,}0 \text{ t}$$
$$A' \cdot \sigma'_e = 90{,}5 - \gamma_s \cdot N_p = -9{,}5 \text{ t}$$

Al resultar la armadura A′ negativa, tenemos que comprobar si es un caso de compresión compuesta, para lo que calculamos el momento respecto a la armadura A,

$$N_p \cdot \frac{h_c}{2} - M_o = 7{,}6 \text{ m. t}$$

$$7{,}6 \cdot \frac{1{,}4}{1{,}65} = 6{,}4 \text{ m. t}$$

y entrando con este último valor en el mismo ábaco encontramos que cae en la zona donde no son necesarias las armaduras de compresión y, por tanto, hacemos $A' = 0$.

Adoptamos, pues, $A = 2\ \emptyset\ 20$ y para A' la mínima.

Ejemplo 4.° Calcular las armaduras de una sección rectangular, de $0{,}30 \times 0{,}50$, sometida a un esfuerzo normal, $N_p = 99{,}5$ t, y a un momento, $M_o = 2{,}0$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}65$. Hormigón de resistencia característica, $\sigma_{bk} = 180$ kilogramos/cm², y acero ordinario. Abacos de armadura asimétrica.

Los datos son:

$$
\begin{array}{ll}
b = 0{,}30 \text{ m} & N_p = 99{,}5 \text{ t} \\
h_t = 0{,}50 \text{ m} & M_o = 2{,}0 \text{ m. t} \\
\sigma_{bk} = 180 \text{ kg/cm}^2 \text{ (serie azul)} & \gamma_s = 1{,}65
\end{array}
$$

Los momentos respecto a ambas armaduras son:

$$N_p \cdot \frac{h_c}{2} + M_o = 23{,}9 \text{ m. t}$$

$$N_p \cdot \frac{h_c}{2} - M_o = 19{,}9 \text{ m. t}$$

a los que corresponde en el ábaco de flexión, $h_t = 0{,}50$ m (serie azul), leídos ambos en la recta de compresión:

$$A \cdot \sigma_e = 25{,}5 \text{ t}$$

$$A' \cdot \sigma'_e = 10{,}5 \text{ t}$$

a las que les corresponden $A = 1\ \emptyset\ 18 + 2\ \emptyset\ 20$ y $A' = 2\ \emptyset\ 20$, por exceso.

Ejemplo 5.° Calcular las armaduras simétricas de un soporte, de $0{,}30 \times 0{,}50$, sometido a un esfuerzo normal, $N_p = 24{,}0$ t, y a un momento, $M_o = 8{,}4$ m. t, referido al punto medio del canto total, con un coeficiente de seguridad, $\gamma_s = 1{,}65$. Hormigón de resistencia característica, 130 kg/cm², y acero ordinario. Recuérdese que los soportes se hormigonan verticalmente, por lo que los ábacos con armadura simétrica están calculados rebajando la resistencia del hormigón en un 10 por ciento.

Los datos son:

$$
\begin{array}{ll}
b = 0{,}30 \text{ m} & N_p = 24{,}0 \text{ t} \\
h_t = 0{,}50 \text{ m} & M_o = 8{,}4 \text{ m. t} \\
\sigma_{bk} = 130 \text{ kg/cm}^2 \text{ (serie oro).} & \gamma_s = 1{,}65
\end{array}
$$

Con los valores de N_p y M_o entramos en el ábaco de armadura simétrica, de $h_t = 0{,}50$ m, correspondiente a $\sigma_{bk} = 130$ kg/cm² (serie oro) y encontramos:

$$\frac{A \cdot \sigma_e}{b} = \frac{A' \cdot \sigma'_e}{b} = 60$$

$$A \cdot \sigma_e = A' \cdot \sigma'_e = 60 \cdot b = 18 \text{ t}$$

para las que adoptamos $A = 3\ \emptyset\ 20$ y $A' = 3\ \emptyset\ 20$ de acero ordinario. El ábaco nos indica el recubrimiento $d = 0{,}04$ metros.

Flexion et compression composée en sections rectangulaires

Méthode en rupture du moment maximum

P. Jiménez Montoya, Ingénieur du bâtiment.

Ce travail représente un résumé ordonné de l'étude des sections rectangulaires soumises à flexion ou compression composée par la méthode du moment maximum qui fait partie de l'ouvrage que l'auteur est en train de préparer au sujet du béton armé et précontraint.

La méthode du moment maximum, basée sur les propriétés rhéologiques du béton et sur les nouveaux concepts du coefficient de sécurité, a été admise par le Comité Européen du Béton (C. E. B.) sur la proposition de la Commission Espagnole. Cette méthode est très utile pour l'établissement d'un procédé très simple, à la fois qu'elle est plus d'accord avec la réalité que les méthodes communes. D'autre part, c'est la méthode qui a été adoptée par l'Instruction H. A. 61, spéciale pour les structures en béton armé, récemment publiée par l'Institut Eduardo Torroja.

Cet article a pour but la diffusion de la méthode du moment maximum par l'établissement des équations d'équilibre et de compatibilité, aussi bien que son application aux différents problèmes de vérification et de dimensionnement qui se présentent généralement. Pour mieux faciliter la tâche du calculateur, quelques abaques, d'emploi très facile, ont été exécutés, dont on n'a inséré que deux pour ne pas citer de trop.

Compound bending and compression in rectangular sections

Ultimate bending moment method

P. Jiménez Montoya, construction engineer.

This is a systematic summary of studies on rectangular sections subjected to compound loading and bending, calculated by the method of ultimate bending moment. The studies are part of the work which the author is preparing on reinforced and prestressed concrete.

The method of ultimate bending moment, which is based on the rheological properties of concrete and on the new concepts of safety factors, has been accepted by the European Committee on Concrete (C. E. B.) after being proposed by the Spanish Committee. It is very useful, since it is a simple procedure, and is also closer to reality than the classical methods. Also, this is the method of calculation adopted in the recent Specification H. A. 61, for reinforced concrete structures, issued by the Instituto Eduardo Torroja.

The object of this paper is to give an account of the ultimate bending moment method, by establishing the equilibrium and compatibility equations, and applying them to the various design and calculation problems that most often arise. To simplify the task of the calculating technician, a number of monograms have been constructed, which are easy to operate. Only two of these are given in this paper, in order to limit the length of the latter.

Zusammengesetzte Biegung und Druck bei rechteckigen Abschnitten

Methode beim Bruch im Höchstmoment

P. Jiménez Montoya, Bauingenieur.

Es bildet diese Arbeit eine geordnete Zusammenfassung des Studiums über rechteckige Abschnitte, die der Biegung oder dem zusammengesetzten Druck unterworfen wurden, und zwar durch die Methode des Höchstmomentes, die einen Teil des Werkes bildet, welches der Verfasser über den Stahl-und Spannbeton in Vorbereitung hat.

Die Methode des Höchstmomentes, die auf den rheologischen Eigenschaften des Betons aufbaut und weiters auf den neuen Begriffen des Sicherheitskoeffizienten, wurde durch das Comité Européen du Béton (C. E. B.) auf Vorschlag der spanischen Kommission angenommen; sie ist von grossem Nutzen wegen des sehr einfachen Vorganges, und zugleich stimmt sie mit der Wirklichkeit mehr überein als die klassischen Methoden. Andererseits ist dies die von der neuen Instruktion H. A. 61 angenommene Rechenmethode, speziell für Stahlbetongefüge, welche vom Institut Eduardo Torroja veröffentlicht wurde.

Der Zweck des vorliegenden Artikels ist es, die Methode des Höchstmomentes mit der Herstellung von Gleichgewichtsgleichungen und der Vereinbarung bekannt zu machen sowie ihre Anwendung auf die verschiedenen Probleme der Ueberprüfung und Bemessung, die aufzutreten pflegen. Um die Arbeit des Rechners zu erleichtern, wurden einige Nomogramme von sehr leichter Handhabung eingebaut, von denen nur zwei eingeschaltet wurden, um die Arbeit nicht zu sehr auszudehnen.