



deducción de la fórmula, que aparece en el Comentario 3.21, inmediatamente se observará que el sumando  $D_z \frac{U_z}{s_z}$  debe llevar un coeficiente  $\frac{2\pi}{1,6} \simeq 4$ .

La segunda errata aparece en el artículo 3.23.1, donde se dan las limitaciones que debe cumplir la armadura de tracción. La primera de ellas debe ser:

$$U \geq 0,04 \underline{R} B$$

y no, como figura en el texto:

$$U \geq 0,4 \underline{R} B$$

La errata se detecta fácilmente si se utilizan las fórmulas del Anejo de Cálculo (tal y como se recomienda en la nota a pie de página del artículo 3.23.1), ya que dichas fórmulas contienen la limitación en su forma correcta:

$$U \geq 0,04 V$$

(Recuérdese que, en sección rectangular, es  $V = \underline{R} B$ ).

## 2

Una circunstancia curiosa que puede llamar la atención del proyectista (y, de hecho, así ha ocurrido con uno de nuestros comunicantes) es que, al comprobar en flexión simple una pieza provista de armadura de compresión (fórmula 11 del Anejo de Cálculo), se obtiene, para ciertos casos particulares, el resultado aparentemente absurdo de que, **a igualdad de las restantes variables, secciones con más armadura de compresión se agotan antes que otras de armadura de compresión menor.**

Ante este hecho, se ocurren una serie de preguntas a las que intentaré dar contestación ordenadamente para mayor claridad de exposición. Las preguntas son las siguientes:

- a** ¿En qué casos ocurre eso, y por qué ocurre?
- b** ¿Se da también ese fenómeno en la teoría clásica?
- c** ¿Se ajusta la teoría a la realidad?

## a

### ¿En qué casos ocurre, y por qué ocurre?

Supongamos una sección rectangular de hormigón armado sin armadura de compresión, a la que sometemos a momentos flectores crecientes hasta su rotura. Esa rotura se producirá por fallo de la armadura de tracción o por fallo del hormigón comprimido. En cualquiera de los dos casos, es claro que uno de los dos materiales estaba dimensionado en defecto respecto al otro; sólo se aprovecharán ambos al máximo cuando la rotura se produzca por las dos causas a la vez, es decir, cuando los dos materiales alcancen el agotamiento simultáneamente.

Si fijamos las dimensiones,  $h$ ,  $b$ , de la sección y la resistencia,  $R$ , del hormigón, el máximo aprovechamiento se obtiene colocando una armadura de tracción cuya capacidad mecánica,  $U$  (igual a su sección por su límite elástico minorado), sea igual al máximo volumen de compresiones que sea capaz de proporcionar la cabeza comprimida de hormigón. Dicho volumen máximo es:

$$\text{Compresión} = 0,5 \underline{R} b h = 0,5 V$$

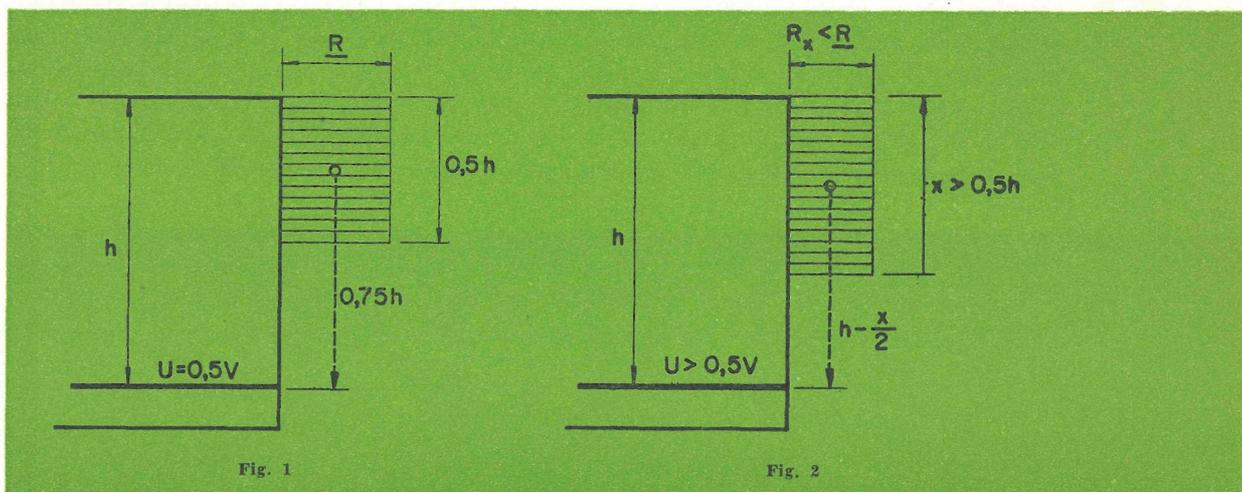
y proporciona (figura 1) un brazo igual a  $0,75 h$ . Por tanto, puede asegurarse de un modo inmediato que:

— El máximo aprovechamiento del hormigón se obtiene haciendo  $U = 0,5 V$ .

— El máximo momento que puede soportarse sin armadura de compresión es:

$$M = 0,5 V \times 0,75 h = 0,375 Vh$$

El colocar armaduras de tracción más fuertes ( $U > 0,5 V$ ) no conduce a resistir mayores momentos, porque la pieza fallará por la cabeza de compresión. El esquema sería el de la figura 2, en el que no conocemos  $x$  ni  $R_x$ . Lo que sí sabemos (y esta es la teoría del «momento tope», base de la H.A. 61) es que el momento resistido, es decir, el momento del volumen de compresiones respecto a la armadura de tracción, es, exactamente,  $0,375 Vh$ , el mismo que obtuvimos en el caso límite  $U = 0,5 V$ .



Si tenemos ese capricho, podemos calcular  $x$  y  $R_x$ , puesto que disponemos de dos ecuaciones: *compresión = tracción* y *momento =  $0,375 Vh$* . Pero ese cálculo no interesa para nada.

Veamos ahora qué ocurre si colocamos una armadura,  $U$ , inferior a la del caso límite,  $U < 0,5 V$ . El esquema es, ahora, el de la figura 3, de la que se deduce inmediatamente:

$$\begin{aligned} \text{tracción} &= \text{compresión} ; U = \underline{R} b x ; x = \frac{U}{\underline{R} b} = \frac{Uh}{V} \\ \text{momento} &= U \times \text{brazo} ; M = U \times \left( h - \frac{Uh}{2V} \right) = U \left( 1 - \frac{U}{2V} \right) h \end{aligned} \quad [5]$$

La última fórmula es la [5] del Anejo de Cálculo.

Toda la instrucción H.A. 61, con toda su aparente complejidad, se basa en el sencillo mecanismo expuesto hasta aquí. Comprendidas las figuras 1, 2 y 3, estamos en condiciones de seguir adelante y ver qué pasa si se introduce una armadura de compresión.

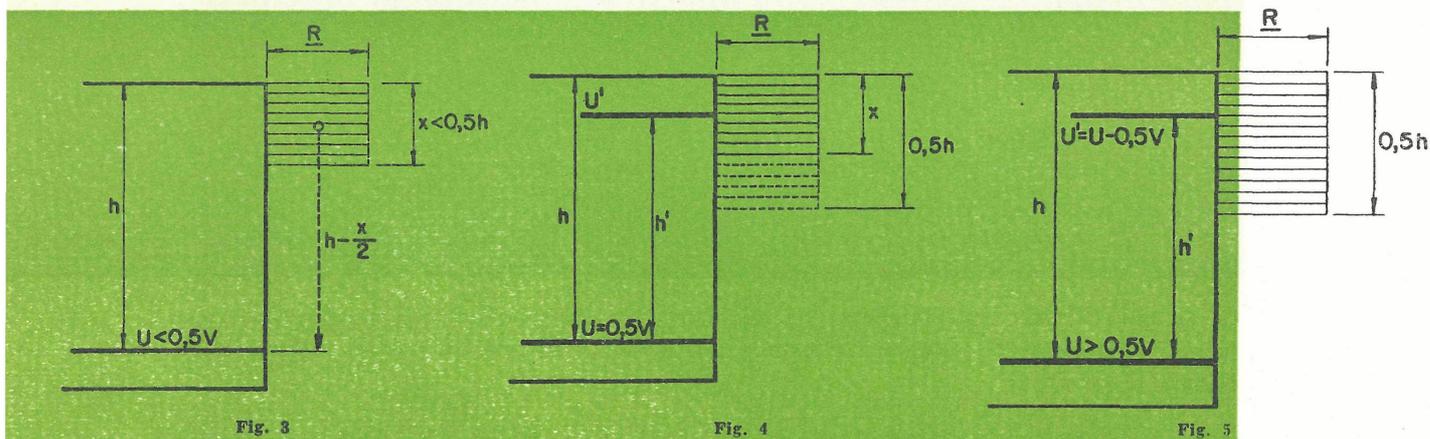
Comencemos por la figura 1, a la que colocamos una armadura  $U'$ . Recordemos que la Instrucción supone que esta armadura trabaja siempre a su límite elástico minorado. El esquema resultante aparece en la figura 4, donde se ha dibujado de puntos la diferencia con el estado anterior de compresiones. Como la armadura  $U$  no ha variado, es claro que lo que se pierde en el rectángulo (de puntos en la figura) es, exactamente, igual a  $U'$ . De este modo se satisface el equilibrio de fuerzas. Por otra parte, ¿qué ha ocurrido con el momento? Ya se ve que ha aumentado, pues con la sustitución de la parte punteada por  $U'$  hemos ganado en brazo. Los valores son éstos:

$$\text{tracción} = \text{compresión} ; U = U' + \underline{R}bx ; x = \frac{U - U'}{\underline{R}b} = \frac{U - U'}{V} h$$

$$\text{momento} \quad M = U'h' + \underline{R}bx \left( h - \frac{x}{2} \right) = U'h' + (U - U') \left( 1 - \frac{U - U'}{2V} \right) h \quad [11]$$

La última fórmula es la [11] del Anejo de Cálculo.

Observemos que, al introducir  $U'$ , si bien es cierto que hemos aumentado el momento resistido por la sección, hemos desaprovechado, por otra parte, la capacidad del hormigón comprimido; puesto que, en la figura 4, es  $x < 0,5h$ . El beneficio, pues, no ha sido el máximo. Para obtener el máximo beneficio, no debe colocarse armadura de compresión cuando sea  $U \leq 0,5V$  (puesto que, en tales casos, el hormigón se basta solo) (\*); sino únicamente en los casos  $U > 0,5V$ , en los cuales colocaremos la justa para compensar el exceso de  $U$  sobre la capacidad del hormigón; es decir:  $U' = U - 0,5V$ .



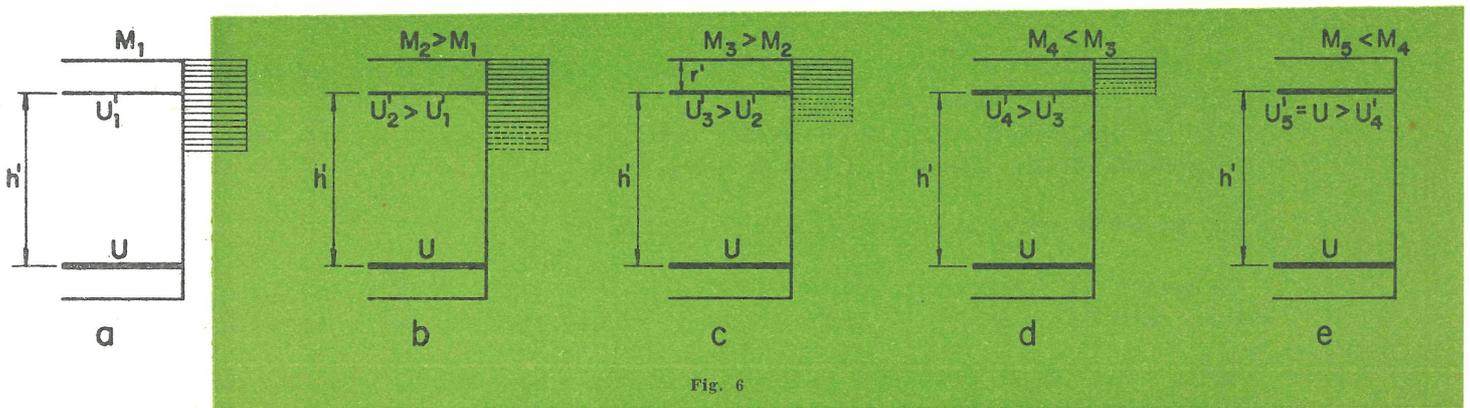
Ese es el caso de la sección de la figura 2 ( $U > 0,5V$ ). Si colocamos en ella una armadura  $U' = U - 0,5V$ , obtenemos el esquema de la figura 5, de aprovechamiento máximo. En este caso, haciendo  $U' = U - 0,5V$  en la fórmula [11] anteriormente obtenida, resulta:

$$M = 0,375Vh + U'h' \quad [13]$$

(\*) Evidentemente, esta afirmación no es válida si el momento puede cambiar de signo.

que es la fórmula [13] del Anejo de Cálculo. En ella, el valor  $0,375 Vh$ , que ya nos es conocido (caso de la figura 1), nos indica que el hormigón está proporcionando el máximo momento de que él es capaz.

Aunque ha sido un poco largo llegar hasta aquí, estamos ya en condiciones de contestar a la pregunta a). Si en una sección de armadura  $U$  fija, vamos aumentando progresivamente la  $U'$ , obtendremos diagramas de rotura como los de la figura 6. En cada uno de ellos se ha dibujado, de puntos, la zona de hormigón que va siendo sustituida por el incremento introducido en  $U'$ . La variación de brazo (es decir, de momento  $M$ ) es creciente hasta el caso crítico,  $c$ , puesto que la posición de  $U'$  es más alta que la de la zona punteada. A partir de dicho caso crítico, un aumento en  $U'$  provoca una disminución en el momento. En el límite, cuando  $U' = U$ , el hormigón no trabaja y la pieza se comporta, idealmente, como un perfil metálico de cabezas iguales, con  $M = U \times h' = U' \times h'$  (\*).



El valor  $U' = U$  no puede ser rebasado, puesto que las fórmulas del Anejo de Cálculo incluyen siempre la limitación  $U' \neq U$ ; es decir, que si es  $U' > U$ , debe considerarse en las fórmulas que  $U' = U$ .

El volumen de compresiones en el hormigón correspondiente a la zona de recubrimiento,  $r'$ , de la armadura de compresión (caso c), vale  $\frac{r'V}{h} = \rho'V$ . Como el equilibrio de fuerzas establece que

$$U = U' + \text{compresiones en el hormigón}$$

es claro que el valor crítico se da para  $U' = U - \rho'V$ .

Por lo tanto, siempre que ocurra

$$U' > U - \rho'V$$

obtendremos momentos de agotamiento menores que en el caso de ser  $U' = U - \rho'V$ .

Llegados a este punto, cabría hacer dos objeciones. Esas dos objeciones han sido formuladas por uno de nuestros comunicantes, y son las siguientes:

(\*) Es claro que, en la realidad, las cosas no sucederán de este modo. El hormigón trabajará algo, por supuesto. Pero aquí hablamos con arreglo a las hipótesis que la H.A. 61 establece, llevadas a sus últimas consecuencias. Sobre la adecuación de los resultados así obtenidos con los que se obtienen en la realidad, véase, más adelante, punto C.

1.<sup>a</sup> ¿Por qué utilizar la limitación  $U' \not\propto U$ , en vez de la  $U' \not\propto U - \rho'V$ ? Si se utilizase la segunda, no ocurriría el fenómeno de regresión de momentos.

2.<sup>a</sup> Admitiendo la limitación  $U' \not\propto U$ , ¿por qué no se avisa de algún modo, en la fórmula [11], de que pueden ocurrir esas anomalías?

La primera de las objeciones es muy lógica, y constituyó uno de los puntos más discutidos cuando la instrucción H.A. 61 estaba en embrión. Se prefirió adoptar la solución  $U' \not\propto U$  por varias razones:

a) La expresión  $\rho'V$  es un poco molesta. El introducirla en la limitación equivale a complicar inútilmente el cálculo en la mayor parte de los casos.

b) En flexión compuesta, la complicación es muchísimo mayor y daría al traste con la sencillez que se persigue para las fórmulas de la H.A. 61.

c) La disminución de momento se presenta sólo en casos muy particulares, de piezas torpemente armadas (colocar tanto exceso de  $U'$ , desaprovechando el hormigón, es una torpeza. Lo que necesita esa pieza es reforzar la  $U$ ). Dicha disminución, por otra parte, no es grande. Además, se está en el lado de la seguridad.

d) En teoría clásica se presenta el mismo fenómeno (\*).

La segunda de las objeciones también tiene su respuesta. Aun a riesgo de resultar pesado, la contestaré un poco por lo largo porque me gustaría dejar bien clara esta cuestión.

El Anejo de Cálculo se compone de dos familias de fórmulas: unas de comprobación y otras de dimensionamiento; de tal modo que, para cada uno de los posibles estados de sollicitación, se dan las fórmulas que lo resuelven por esa doble partida. Y esas fórmulas son perfectamente recíprocas y concordantes.

Si usted tiene una pieza totalmente definida y desea saber cuánto resiste, utilizará las fórmulas de comprobación. Si usted desea saber qué armaduras debe poner para resistir una cierta sollicitación, utilizará las fórmulas de dimensionamiento. En este segundo caso, si, una vez calculadas las armaduras, tiene usted el capricho de *comprobar* la pieza así definida, utilizará usted las fórmulas de comprobación, y encontrará *exactamente el mismo* valor de la sollicitación del que partió usted en un principio.

Insisto en esta idea porque en teoría clásica no suele ocurrir lo mismo. Como la teoría clásica juega con las tensiones de trabajo de los materiales y, en general, suele exigirse que en la Memoria de Cálculo de un proyecto aparezcan esas tensiones, el proyectista se ve forzado a un doble trabajo: primero, a dimensionar con ayuda de ábacos o tablas; y luego, a comprobar con las fórmulas clásicas para obtener las tensiones de trabajo. Este modo habitual de proceder ha hecho surgir, en algunos, la idea errónea de que siempre hay que terminar utilizando las ecuaciones de comprobación. Y por eso, la H.A.61 ha incluido la observación final, un poco inocente, de la página 296.

Veamos ahora la segunda objeción. La fórmula [11] es una fórmula de comprobación. Su deber es decirnos cuánto resiste una pieza dada, sin entrar en si está mejor o peor dimensionada. Si usted desea saber esto último, suponga que no conoce las armaduras;

---

(\*) Véase, más adelante, punto B.

entre en las ecuaciones de dimensionamiento, que le darán las armaduras óptimas; y compare estas últimas con las que realmente tiene la pieza. No debemos exigir a unas fórmulas de *comprobación* que nos den el consejo necesario en cada caso para mejorar la sección correspondiente; el cómo jugar con las variables para que eso suceda, sólo puede darlo el conocimiento de la teoría que se maneja. Cuanto mejor se conozca esa teoría, con más seguridad se andará por sus fórmulas, y mayor jugo se podrá extraer de ellas. Si este artículo mío es atinado, y ojalá lo sea, sus lectores habrán aclarado alguna idea y no echarán en falta ningún aviso extra en la fórmula [11], que tanto llevo manoseada.

Con las fórmulas de *dimensionamiento* es distinto. El entrar en ellas significa que nos confiamos a sus resultados, sin introducir de antemano un pie forzado, que puede ser torpe. En este caso, sí debemos exigir que nos proporcionen la solución óptima, de aprovechamiento máximo. Y eso ocurre con las de la instrucción H.A.61.

Evidentemente, el Anejo de Cálculo también puede ser manejado de un modo mecánico, sin necesidad de empaparse previamente de la teoría. Si lo hacemos así, las fórmulas

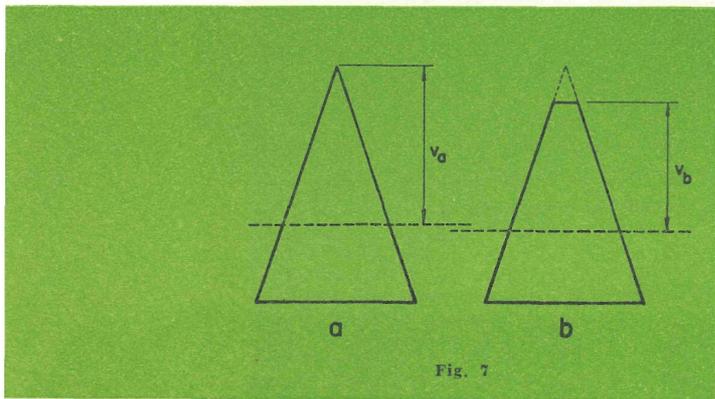


Fig. 7

nos darán soluciones siempre válidas; pero, claro está, en algunos casos, tales como el que aquí se comenta, la sola aplicación mecánica de una fórmula no nos conducirá a la solución óptima.

Se me ocurre un ejemplo. La figura 7 representa dos secciones de un material homogéneo. La sección *b* se obtiene por simple truncamiento del vértice superior de la sección *a*; es, por lo tanto, más pequeña. Y, sin embargo, es capaz de resistir *más* momento que la sección *a* (\*). No existe ninguna Norma en el mundo que, en sus fórmulas, nos avise

de este hecho, ni se nos ocurriría pedir una limitación de las fórmulas clásicas de Resistencia de Materiales que impidiese la ocurrencia de tal fenómeno. Sencillamente, como nos conocemos la teoría y sabemos que el momento vale

$$M = \frac{I}{v} \times \sigma, \quad [1]$$

donde  $\sigma$  es la tensión de trabajo del material, con sólo ver la sección *a* nos damos cuenta de que, truncándola, disminuimos la *v* en mayor proporción que la *I*, con lo que el cociente  $\frac{I}{v}$  aumenta. En consecuencia, el proyectista avisado que topa con la sección *a*, la sustituye inmediatamente por la *b*, más ventajosa.

Este proceder es consecuencia del conocimiento completo que tenemos de la fórmula [1]; si no poseyésemos ese conocimiento y aplicásemos la fórmula a la ciega, no cometeríamos ningún error grave, pero dejaríamos de aprovechar algo que hubiese podido proporcionar un mayor partido.

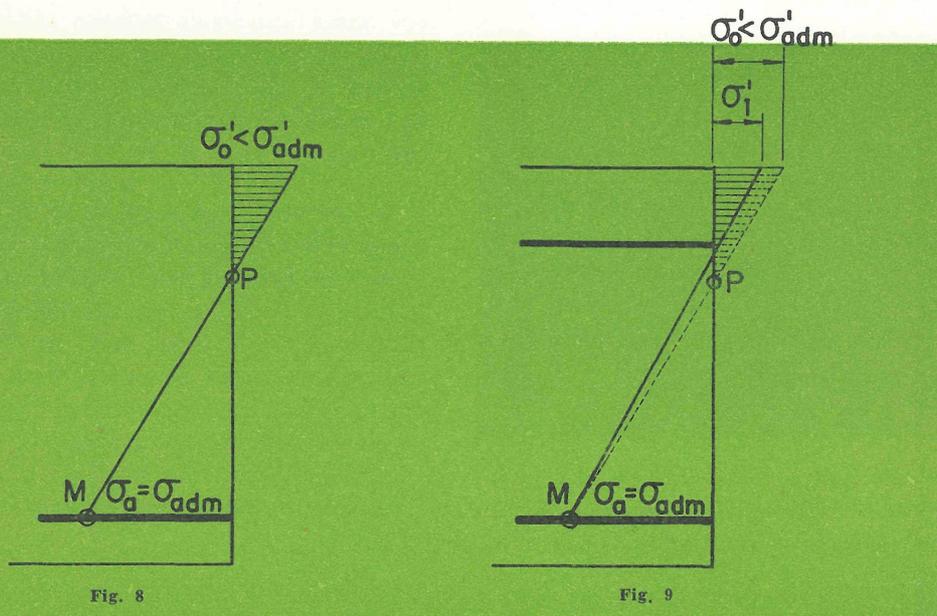
(\*) Se habla aquí en pura teoría. En la realidad, es lógico suponer que en la sección *a* se producirá un aplastamiento del vértice superior, con lo que acabará convirtiéndose en la sección *b*.

**b**

## ¿Se da también ese fenómeno en la teoría clásica?

La respuesta es afirmativa. Como veremos inmediatamente, ese fenómeno puede darse también en teoría clásica, en secciones débilmente armadas a tracción.

La figura 8 representa una sección en la que se ha alcanzado, en la armadura de tracción, la tensión admisible. De entrada ya se ve que el colocar armadura de compresión pasando por el punto P no mejoraría en nada la sección, cosa que podría parecer extraña, y sería muy justo que así pareciese. Si no nos extrañamos es porque conocemos bien la teoría clásica.



Coloquemos una armadura de compresión *ligeramente* por encima del punto P (fig. 9). Como la armadura U no puede trabajar a más de  $\sigma_{adm}$ , el diagrama de tensiones pasará ahora por el mismo punto M anterior, y el triángulo de compresiones en el hormigón disminuirá. La nueva compresión introducida (armadura de compresión  $\times$  tensión que le corresponde  $\times$  coeficiente de equivalencia) debe ser igual a la que pierde el hormigón (zona punteada). Pero con este cambio ha bajado el centro de gravedad. El brazo total ha disminuido. La sección se agota antes que si no tuviera armadura de compresión.

Es fácil dibujar un gráfico que relacione el momento admisible con la armadura de compresión. Si tomamos en ordenadas  $\frac{M}{bh^2\sigma_a}$  (siendo  $\sigma_a$  la tensión admisible en el acero) y en abscisas la cuantía geométrica de compresión,  $q'$ , obtendremos, para cada pareja de valores  $q$  (cuantía geométrica de tracción) y  $\rho$  (recubrimiento de compresión partido por el canto útil), una curva.

La figura 10 corresponde a un recubrimiento del 20 por 100, con  $q = 1,5$  por 100. Se aprecia en ella que, a partir de un cierto valor, un aumento de  $q'$  produce una disminución de  $M$ .

La figura 11 corresponde a un recubrimiento más exagerado, del 30 por 100, con  $q = 2$  por 100. La curva es decreciente en todo el intervalo.

Las diferencias son pequeñas, del orden del 3 por 100. Pero lo que interesa es el hecho y no su cuantía. Y el hecho se presenta.

### ¿Se ajusta la teoría a la realidad?

C

La respuesta a esta pregunta no puede ser terminante: hay que conjeturar para llegar a ella. En esos casos de pequeña armadura de tracción, es muy difícil decir cómo se reparten, en la realidad, el hormigón y el acero las tensiones de compresión.

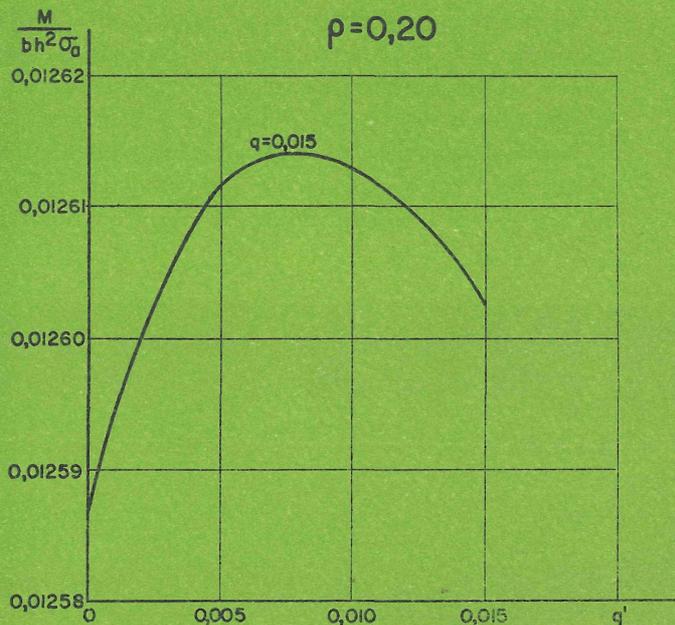


Fig. 10

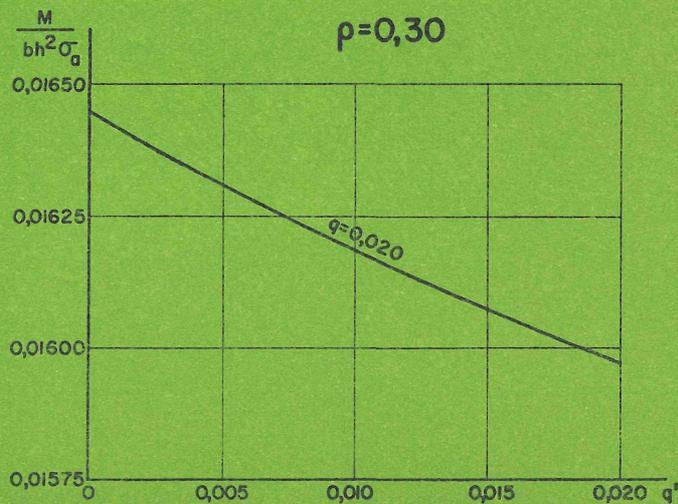


Fig. 11

El diagrama real debe ser parecido al de la figura 12 a. El diagrama simplificado que considera la H.A. 61 (figura 12 b) es, en este caso marginal, absurdo (\*). Pero ya se ve que no puede dar grandes errores. El momento vale  $U \times B$ . El primer factor se conserva. El segundo factor está acotado entre  $h'$  y  $h$  ( $h' < B < h$ ) y se sustituye por otro,  $B'$ , que tiene la misma acotación. La diferencia entre ambos valores de  $M$  no será grande. Además, hemos visto anteriormente que estábamos en el lado de la seguridad; es decir, que la teoría nos da un momento de agotamiento no superior al real.

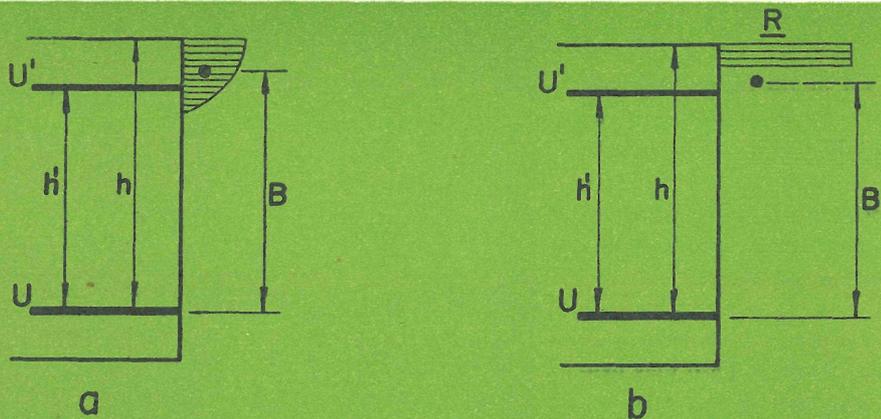


Fig. 12

En cuanto al comportamiento, en la realidad, de dos secciones (A y a) iguales, pero una (A) con más armadura de compresión que la otra (a), parece evidente que la primera no se agotará, en flexión, antes que la segunda. Pero si la teoría indica que ambas armaduras de compresión están en exceso, puede asegurarse que la sección (A) no resistirá más que la (a). Ambas fallarán a la vez por el punto débil que les es común: la armadura de tracción.

Recordemos, por último, una idea que no debe estar ausente cuando se trata de estas cuestiones: me refiero a la dispersión propia del material. Vigas idénticas (hormigonadas a la vez, con aceros de la misma partida, ejecutadas y ensayadas en condiciones exactamente iguales) presentan diferencias de comportamiento de un 10 por 100 con relativa frecuencia. Mal puede pedirse a una teoría que nos proporcione una precisión más grande de la que posee la propia realidad.

Por todo ello, no creo que deba darse mayor importancia a la «paradoja de la armadura U». Al menos, en la práctica.

(\*) En este caso y en otros. Pero recuérdese que no se pretende que el diagrama H.A. 61 sea el real, sino, únicamente, que conduzca a resultados suficientemente aproximados a los reales.

### **A propos de l'instruction du béton armé H. A. 61**

Alvaro García Meseguer, ing. des Ponts et Chaussées.

Dans cet article sont commentées les formules de calcul en rupture de l'Instruction du Béton Armé HA61, dans les cas de flexion. En particulier, est amplement étudié l'apparent paradoxe qui se présente parfois, quand des sections munies d'une plus forte armature de compression s'épuisent avant d'autres qui, cependant, ont une armature de compression plus faible.

L'analyse de ce phénomène se divise en trois parties: 1<sup>ème</sup>. Dans quels cas et pourquoi cela arrive-t-il? 2<sup>ème</sup>. Le phénomène se présente également avec la théorie classique. 3<sup>ème</sup>. Comparaison entre la théorie et la réalité.

---

### **Comments on reinforced concrete Specification H. A. 61**

Alvaro García Meseguer, civil engineer.

A commentary is given on the ultimate load method of calculating structures in bending, as given in the Reinforced Concrete Specification HA61. In particular, extensive attention is given to a discussion of the apparent paradox that arises in cases where sections with greater compressive reinforcement fail more easily than similar sections with weaker compressive reinforcement.

The analysis of this phenomenon is divided into three parts: 1. In what cases does it arise, and why. 2. This phenomenon is also present in the classical theory. 3. Comparison between theory and practice.

---

### **Ueber das Bauen mit Stahlbeton H. A. 61**

Alvaro García Meseguer, Bauingenieur.

Es werden die mathematischen Formeln am Bruch, der Anweisung des Stahlbetons HA 61 in den Biegungsfällen, besprochen. Besonders studiert man eingehend die scheinbare Widersinnigkeit, die sich manchmal zeigt, da Abschnitte mit grösserer Druckbewehrung sich früher erschöpfen als andere, deren Druck-Bewehrung schwächer ist.

Die Analyse dieser Erscheinung wird in drei Teile aufgegliedert: 1. In welchen Fällen und warum tritt sie auf.—2. Die Erscheinung stellt sich auch bei der klassischen Theorie ein.—3. Vergleich zwischen der Theorie und der Wirklichkeit.