

estructuras metálicas

los problemas de la inestabilidad elástica

JUAN BATANERO, ingeniero de caminos

1. Generalidades

1.0. Introducción

Nos proponemos divulgar, en una serie de artículos que irán apareciendo sucesivamente en *INFORMES DE LA CONSTRUCCIÓN*, los principales problemas que presentan al proyectista los fenómenos de inestabilidad de las construcciones metálicas. Conviene precisar que, siguiendo el uso, nos referimos, al decir construcciones metálicas, única y exclusivamente a las construcciones de acero, prescindiendo, de momento, de las estructuras de aleaciones ligeras. Y claro está que muchas de las teorías a que hemos de referirnos son aplicables, «mutatis mutandis», a estructuras construídas con cualquier material.

No pretendemos, sin embargo, efectuar un estudio teórico completo, aunque se exponga la teoría suficiente para que puedan entenderse los fenómenos y conocer las raíces de los métodos de comprobación utilizados en el cálculo; y aunque se dé, al final de cada capítulo, una relación bibliográfica en la que la persona interesada pueda profundizar en el planteamiento teórico y en la resolución matemática de los problemas de inestabilidad.

Nuestro propósito es, más modestamente, exponer algunas fórmulas prácticas que permitan determinar, con la mayor sencillez posible, la seguridad de la estructura.

Creemos que este trabajo puede ser de alguna utilidad en la actual coyuntura de nuestra Patria, en la que se prevé un rápido crecimiento de la utilización del acero en las estructuras, siendo prácticamente nula la bibliografía española sobre el tema, en contraste con la espléndida floración de trabajos monográficos y de tratados de conjunto que continuamente ven la luz en todas las lenguas cultas.

Además, el único manual publicado en nuestro país utilizable para el cálculo de estructuras de acero, el «Prontuario de A. H. V.», no trata en forma completa otro problema de inestabilidad que el de la barra recta de sección constante, simple o compuesta, y solicitada a compresión axial o a compresión excéntrica; aunque exponga también algunas fórmulas empíricas para el proyecto de los rigidizadores en las vigas de alma llena. Y, por si fuera poco, la reciente Instrucción de Tramos Metálicos, del Ministerio de Obras Públicas, no entra siquiera en la cuestión, advirtiendo únicamente al proyectista de la necesidad de comprobar la seguridad del tramo y la de sus elementos frente a los fenómenos de inestabilidad, pero sin aconsejar ni preceptuar sobre los métodos de comprobación a utilizar, separándose con ello de la tendencia de todas las normas extranjeras modernas.

Hace algunos años el autor tradujo, y el Instituto de la Construcción publicó la norma alemana DIN 4114, dedicada exclusivamente a los casos de inestabilidad de las estructuras de acero. Diversas circunstancias impidieron entonces el publicar, simultáneamente, unos comentarios y unos ejemplos aclaratorios que facilitasen la aplicación de su articulado en los problemas prácticos. Hoy, con este trabajo, nos proponemos suplir aquella omisión, aspirando a facilitar el de los proyectistas y llamando la atención sobre estos fenómenos, mal conocidos aún por la mayor parte de los Ingenieros, quizá porque, como decía el Prof. Stabilini en la conferencia pronunciada en este Instituto en 2 de marzo de 1954, la cuestión no ha entrado en los programas docentes sino desde poco tiempo atrás y todavía no en todas partes.

Conviene, pues, antes de entrar en la parte de aplicación, hacer algunas consideraciones generales sobre la raíz física de la inestabilidad elástica, en la forma más intuitiva y con el menor aparato matemático que nos sea posible.

1.1. Los problemas de estabilidad

En la actualidad se consideran como «problemas de estabilidad» todos aquellos casos de carga de un determinado sistema resistente en los que la función

$$v = f(P)$$

no es uniforme; representando con P una magnitud característica del estado de carga, y con v , otra que defina el estado de deformación del sistema. Es decir, designamos con aquella locución a todos los estados de sollicitación a los que, cumpliéndose las necesarias condiciones de equilibrio y de compatibilidad, corresponden dos, o más, deformadas del sistema.

Y se incluyen, por tanto, en este grupo de cuestiones, no sólo los casos clásicos de bifurcación de equilibrio, sino también los de agotamiento súbito de la capacidad resistente por imposibilidad de continuar subsistiendo un equilibrio entre las sollicitaciones exteriores y los esfuerzos internos del sistema; y, finalmente, aquellos otros casos en los que, bajo la acción de una cierta carga, el sistema deformado puede variar bruscamente su configuración para buscar una nueva forma estable de equilibrio.

Como iremos viendo, en el primero y en el tercero de los subgrupos enumerados en el párrafo anterior, la inestabilidad ante una determinada sollicitación depende, fundamentalmente, de la geometría del sistema resistente; en el segundo, de las características intrínsecas del material.

Es necesario precisar y aclarar todos estos conceptos; pero antes parece útil recordar algunas cuestiones de nomenclatura.

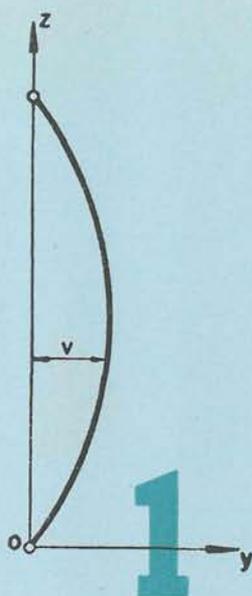
En la mayoría de los problemas que se presentan en la teoría de la elasticidad, o en resistencia de materiales, se supone que las deformaciones son tan pequeñas que no intervienen en el equilibrio que se establece entre las sollicitaciones exteriores y los esfuerzos internos. Por ello, éstos se calculan admitiendo que las fuerzas aplicadas actúan sobre la estructura sin deformar. Esta forma de proceder se conoce con el nombre de «Teoría de tensiones de orden I».

Pero hay ocasiones en las que, por razones de seguridad (arcos) o de economía (puentes colgantes), la deformabilidad relativamente grande del sistema exige que tengamos en cuenta los corrimientos de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores para establecer las ecuaciones del equilibrio anteriormente citado. No obstante, las deformaciones se siguen considerando suficientemente pequeñas para que podamos admitir la forma lineal en la expresión de la curvatura de una barra:

$$\frac{1}{\rho} = v'' = \frac{d^2v}{dz^2} \quad [I-1]$$

con la nomenclatura de la figura 1.

Y, además, prescindir, en general, de los alargamientos o acortamientos de barras debidos a fuerzas axiales y de la influencia de los esfuerzos cortantes sobre la curvatura. Este conjunto de hipótesis se conoce con el nombre de «Teoría de tensiones de orden II». Y es la que, al ser aplicada a los problemas de inestabilidad, conduce a los casos de bifurcación de equilibrio. Ya veremos que, además, éstos vienen ligados a otro grupo de hipótesis idealizadoras.



Puede ser necesario, en sistemas con fuertes deformaciones, en el estudio del período postcrítico, o en la investigación de los problemas de cambio brusco de configuración, prescindir de la simplificación que supone la expresión (I-1) y adoptar la general de la curvatura:

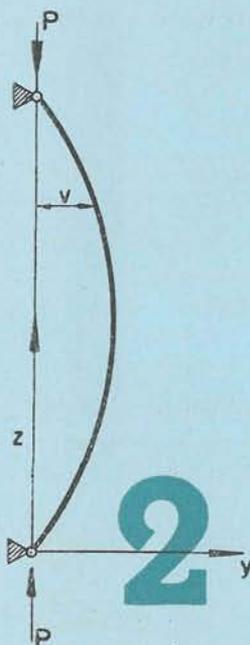
$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} \quad [I-2]$$

aun conservando en muchos casos las otras simplificaciones admitidas en el párrafo anterior. Esta es la que se llama «Teoría de tensiones de orden III».

Naturalmente, la complejidad de la resolución matemática de los problemas va creciendo con el «Orden» de la teoría utilizada y todavía se intensifica la dificultad si, como ocurre en algunos problemas de brusca inversión de forma, es necesario introducir los acortamientos o alargamientos de la directriz de la pieza. Tanto, que, salvo casos muy sencillos de carga o de forma, las cuestiones de orden III son prácticamente inabordables en forma teórica, siendo más conveniente el recurrir en ellas a métodos experimentales.

1.1.1. La bifurcación del equilibrio elástico

El ejemplo obligado de los problemas de bifurcación de equilibrio lo constituye la teoría de Euler sobre la pieza reeta, de sección constante, cargada de punta. Se han publicado millares de páginas impresas sobre el alcance y la validez de esta teoría; se ha discutido hasta la saciedad sobre la importancia de la excentricidad prácticamente inevitable en la aplicación de la carga, sobre la limitación del dominio en el que resulta aceptable la ley de Hooke, sobre la imposibilidad de conseguir en la realidad una pieza geoméricamente rectilínea, sobre la influencia que las imperfecciones del material ejercen en el agotamiento de la capacidad resistente de los sistemas estructurales; pero, dondequiera que nos enfrentemos con un problema de estabilidad, allí está, en forma de magnitud auxiliar o decisiva, aunque sea solamente para recordarnos que las deformaciones van a introducirse en un tobogán que las acelere rápidamente, la carga crítica de Euler, como símbolo permanente de la genial intuición del gran físico-matemático.



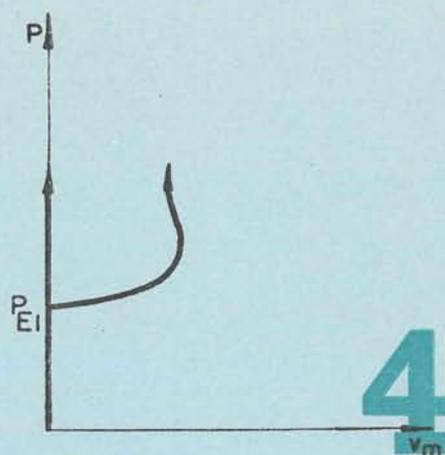
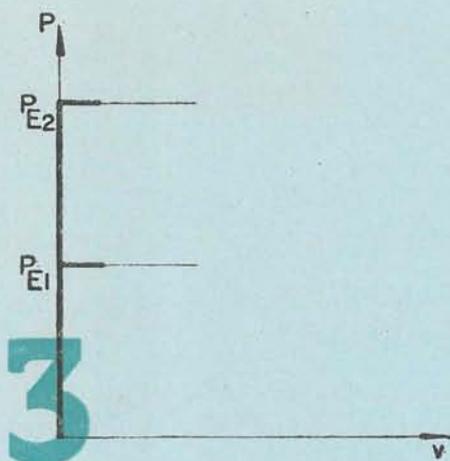
Todos sabemos que Euler suponía una pieza perfectamente reeta, solicitada por una carga de compresión axial exactamente centrada, cuyo material obedecía indefinidamente a la hipótesis de Navier y a la ley de Hooke, y cuyos extremos se encontraban vinculados en forma teóricamente perfecta (articulaciones sin rozamiento y con corrimientos impedidos en dirección perpendicular a la directriz de la barra, en el caso II, o fundamental).

Y que, planteado el equilibrio entre solicitaciones exteriores y tensiones internas, haciendo uso de la teoría de tensiones de orden II, se llega a la ecuación diferencial.

$$v'' + k \cdot v = 0 \quad [I-3]$$

con la notación y ejes de la figura 2, y admitiendo triedro de coordenadas dextrorsum. En ellas es:

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I} \quad [I-4]$$



siendo I el momento de inercia, constante, de la pieza respecto al eje X-X de su sección transversal. La integral general de [I-3] es:

$$v = C_1 \cdot \cos kz + C_2 \cdot \operatorname{sen} kz \quad [I-5]$$

en la que, para cumplir las condiciones de vinculación, debe tenerse:

$$C_2 = 0 \quad \operatorname{sen} kl = 0 \quad kl = n \cdot \pi$$

por tanto:

$$P_E = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} \quad [I-6]$$

expresión de la carga crítica, cuyo menor valor corresponde a $n = 1$. Para este valor la deformada es

$$v = C_2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot z}{l}$$

con C_2 arbitrario y, por tanto, con infinitas formas posibles de equilibrio, dentro de la pequeñez de las deformaciones que nos autoriza a utilizar la expresión [I-1].

En la figura 3 se representa, en trazo grueso, la relación que liga las cargas de compresión con las v ; supuesta superada la primera carga crítica, la pieza no puede mantener según la teoría de Euler otra forma de equilibrio que la rectilínea, puesto que siendo entonces

$$\operatorname{sen} kl \neq 0$$

debe ser $C_2 = 0$, y por tanto v idénticamente nula, para que se cumplan las condiciones de borde. Este resultado extraño se desvanece si recurrimos a la teoría de orden III, utilizando [I-2] como expresión de la curvatura; manteniendo, por otra parte, todas las hipótesis anteriores, la ecuación diferencial del problema se escribe ahora:

$$\frac{v''}{[\sqrt{1 + v'^2}]^3} + k^2 v = 0 \quad [I-8]$$

ecuación que se puede resolver mediante funciones elípticas, admitiendo forma senoidal para la elástica deformada. La relación entre cargas y deformaciones se representa en la figura 4; la rama curva de la función presenta un máximo, para $P \approx 2 \cdot P_E$, aproximadamente igual a $0,45 \cdot l$, si tomamos como magnitud característica de la deformación la flecha v_m en el centro de la barra. Evidentemente, la forma recta puede ser también de equilibrio, pues la solución $v = 0$ satisface a la ecuación diferencial [I-8]. Existe, pues, una verdadera bifurcación del equilibrio.

Abordando [I-8] con métodos aproximados, se han obtenido varias expresiones que dan el valor de la flecha v_m en el período postcrítico. Son expresiones que tienen únicamente un valor teórico, pues

todas ellas demuestran que las flechas de la forma curva crecen muy rápidamente como se indica en la figura, a partir de P_E . Es esta carga, por tanto, la que utilizamos para nuestras necesidades prácticas.

Si, manteniendo las restantes hipótesis, se prescinde de la validez ilimitada de la ley de Hooke y se considera la relación real tensiones-deformaciones de un acero de construcción, o de cualquier otro material, la teoría demuestra que existe también bifurcación del equilibrio, aun en el caso de que la carga crítica sea superior a la que corresponde al límite de proporcionalidad de la barra estudiada. Sólo que, en este caso, la curva adopta una forma distinta de la representada en la figura 4, como consecuencia del comportamiento plástico del material. De ello trataremos más adelante.

Supongamos ahora una barra solicitada por una compresión excéntrica (fig. 5). La ecuación diferencial, deducida con las hipótesis de la teoría de orden II, es:

$$v'' + k^2(v + a) = 0 \quad [I-9]$$

en la que k tiene el mismo significado que en [I-2]. La integral general es:

$$v = A \cdot \text{sen } kz + B \cos kz - a \quad [I-10]$$

que, con las condiciones de borde:

$$v = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad v' = 0 \quad \text{para } z = \frac{l}{2}$$

nos da:

$$B = a \quad A = a \cdot \text{tg } \frac{kl}{2}$$

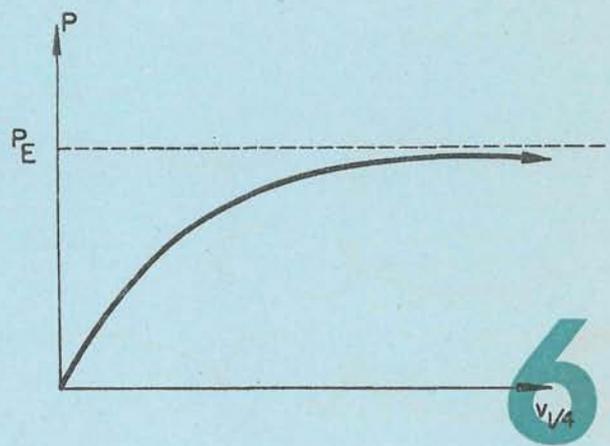
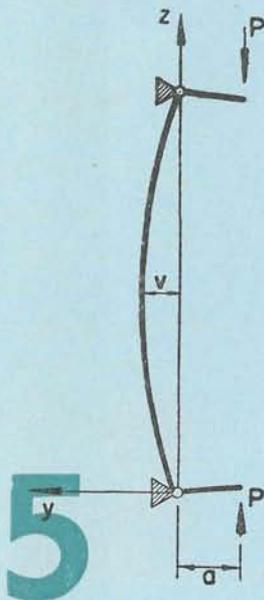
y por tanto:

$$v = a \left(\text{tg } \frac{kl}{2} \cdot \text{sen } kz + \cos kz - 1 \right) \quad [I-11]$$

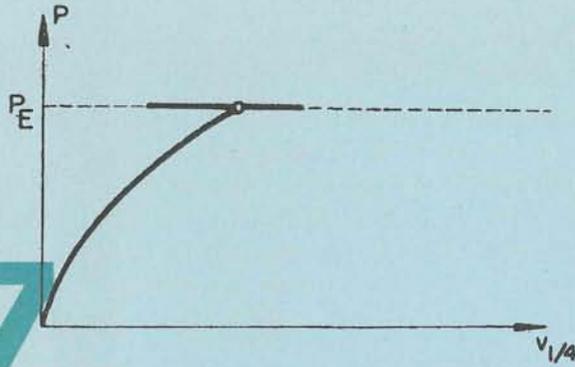
y siendo $a \neq 0$, esta expresión sólo se anula para $z = 0$. No existe forma recta de equilibrio, como era de esperar, pues la barra está sometida a flexión desde el comienzo de la aplicación de la carga. En el centro, la flecha es:

$$v_m = a \left(\text{tg } \frac{kl}{2} + \cos \frac{kl}{2} - 1 \right) \quad [I-12]$$

que para $P \rightarrow P_E$ tiende a hacerse infinita, habiéndose representado la relación $v_m - P$ en la fig. 6. Ello no es posible evidentemente; mucho antes, si la barra es excesivamente flexible, ha dejado de ser aplicable la teoría, y si la barra es rígida, ha agotado su capacidad resistente como consecuencia de las deformaciones crecientes.



7



No hay en este caso bifurcación de equilibrio ni, por tanto, problema de estabilidad; se trata de una pura cuestión de tensiones. Pero no conviene generalizar impeditadamente; no debe suponerse, sin más, que no puedan existir fenómenos de inestabilidad en las barras flectadas desde el principio. En primer lugar, ya veremos que, al prescindir de la validez de la ley de Hooke, aparece la inestabilidad con los materiales reales. Pero, aún suponiendo un material idealmente elástico, pueden darse casos de bifurcación de equilibrio. Recordemos el ejemplo, ya clásico en estas cuestiones, de la barra de Zimmermann (fig. 9).

Llamando A a la reacción del apoyo, la ecuación diferencial se escribe:

$$v'' + k^2(v + a) - \frac{A}{EI} \cdot z = 0 \quad [I-13]$$

siendo k la magnitud expresada por [I-4]. La integral general de esta ecuación es:

$$v = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \operatorname{cos} kz + \frac{A}{P} z - a \quad [I-14]$$

y siendo las condiciones de borde:

$$v = 0 \quad \text{para} \quad \left. \begin{array}{l} z = 0 \\ z = l \end{array} \right\}$$

obtenemos:

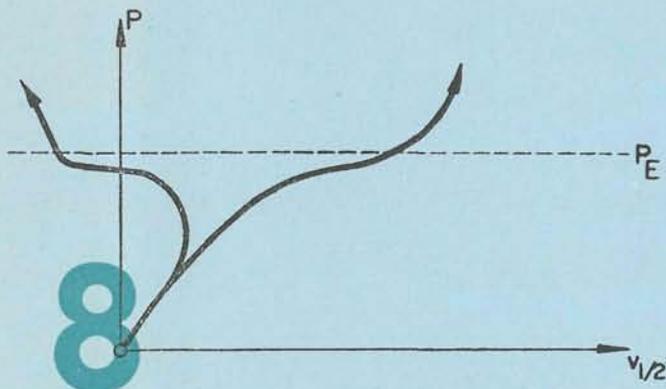
$$C_2 = a \quad C_1 = -a \frac{1 + \operatorname{cos} kl}{\operatorname{sen} kl}$$

luego:

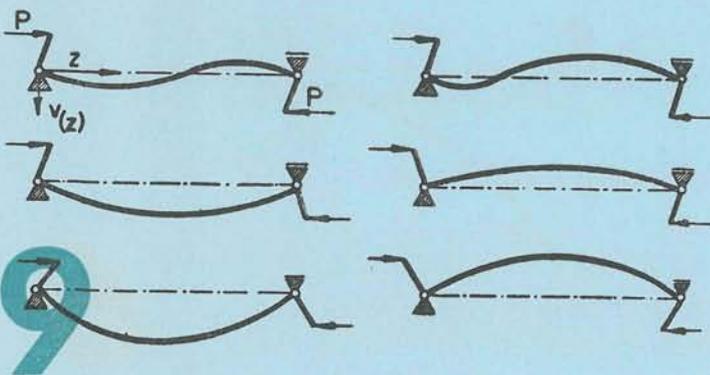
$$v = -a(1 + \operatorname{cos} kl) \cdot \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} kl} + a \cdot \operatorname{cos} kz + \frac{A}{P} z - a$$

en la que, para $P = P_E$, el segundo sumando toma la forma:

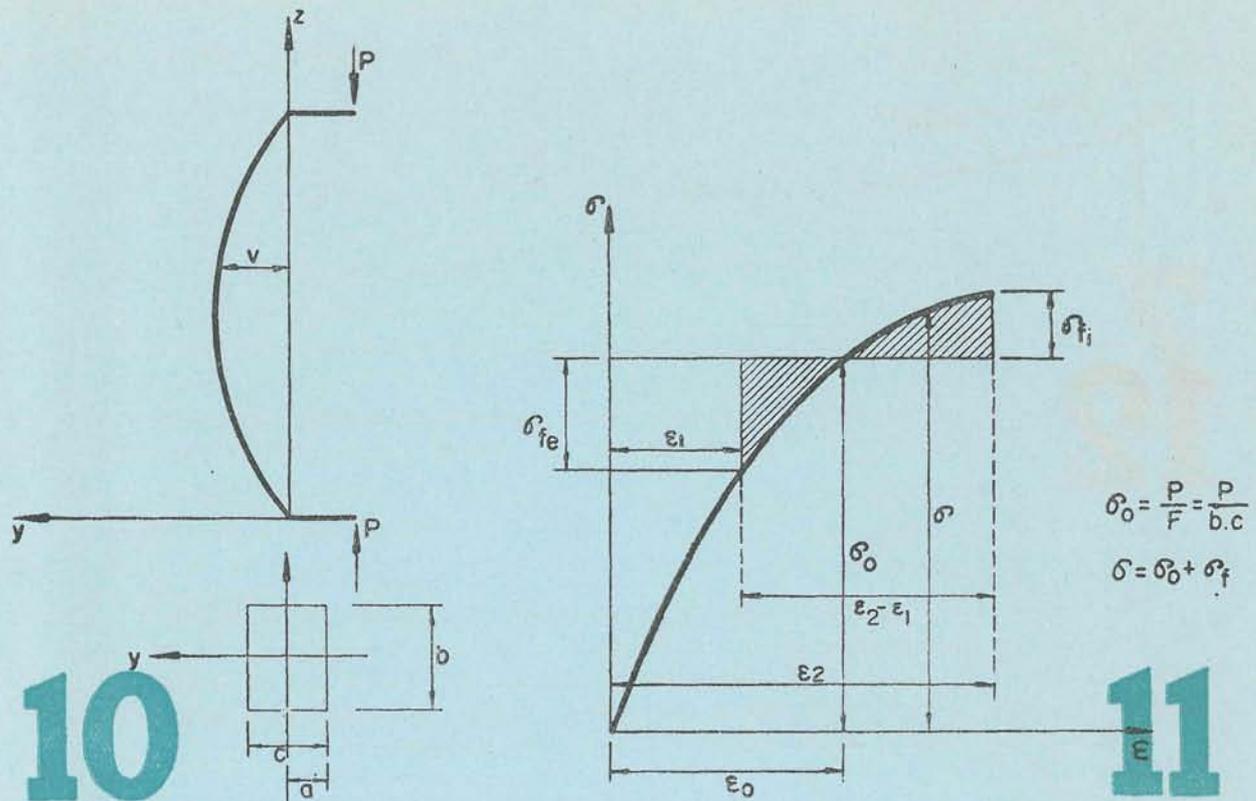
$$\frac{1 + \operatorname{cos} kl}{\operatorname{sen} kl} = \frac{1 + \operatorname{cos} \pi}{\operatorname{sen} \pi} = \frac{0}{0}$$



8



9



indeterminada, siendo posibles, por tanto, para este valor de la carga, infinitas formas de equilibrio. La relación entre cargas y deformaciones, tomando como magnitud característica de estas últimas la ordenada al cuarto de la luz, viene representada en la figura 7.

Esta infinitud de deformadas posibles se deshace cuando, como en el caso de la barra solicitada a compresión axial, se recurre a la teoría de tensiones de orden III. Utilizándola, W. Cornelius ha demostrado que la bifurcación de equilibrio se inicia en el momento de comenzar a actuar la carga y que la ley cargas-deformaciones es la representada en la figura 8.

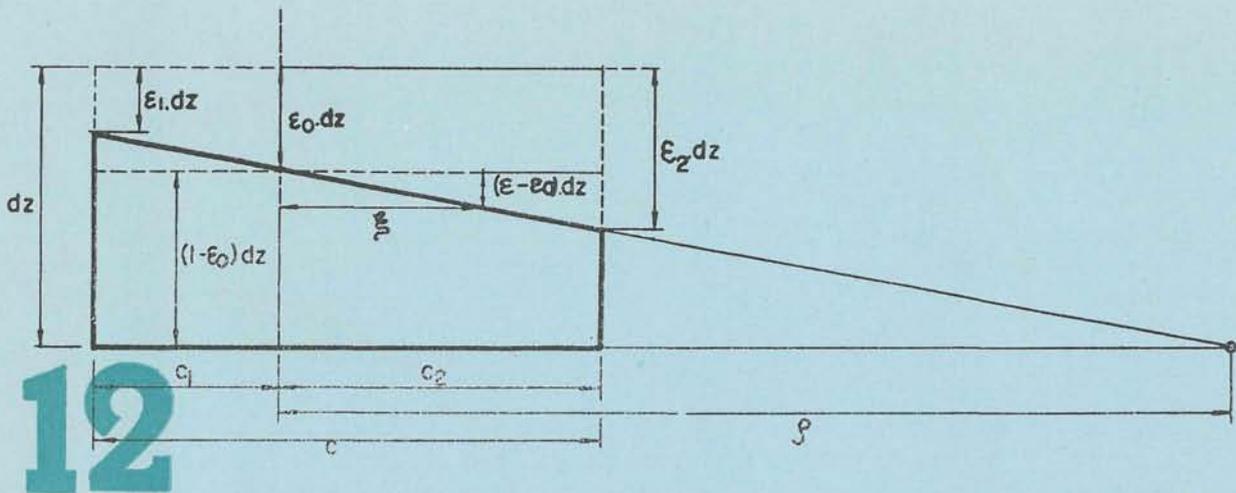
Se sale de los límites de este trabajo el pretender dar una explicación teórica de este problema. Pero se puede comprender intuitivamente examinando la figura 9 y advirtiendo que la barra puede pasar de la configuración con doble onda inicial a otra de onda sencilla; y ello de dos maneras, según que se ensanche la semionda superior o la inferior, correspondiendo cada una de estas posibilidades a cada una de las dos ramas de la curva de la figura.

No obstante, la importancia de la carga crítica de Euler se aprecia, en la figura 8, en el rápido incremento de las deformaciones en las proximidades de la misma.

Klöppel y Lie, utilizando consideraciones de tipo energético, establecieron un criterio que fija la condición que deben cumplir las solicitaciones para que pueda haber bifurcación de equilibrio en las barras comprimidas y flectadas simultáneamente. No podemos entrar aquí en su exposición.

1.1.2. La inestabilidad por agotamiento de la capacidad resistente

Vamos a considerar nuevamente la barra de la figura 5, pero suponiéndola construida de un acero elasto-plástico y prescindiendo, para su estudio, de la validez ilimitada de la ley de Hooke, que antes admitíamos. Supongamos que la sección de la pieza es rectangular y que el punto de paso de la fuerza se encuentra situado sobre uno de los ejes principales de inercia (fig. 10).



12

Si las tensiones han superado el límite de proporcionalidad, el reparto de las debidas a la flexión, que, naturalmente, hay que superponer a la distribución uniforme originada por la compresión, se acomodará a la ley tensiones-deformaciones del material (fig. 11). Porque, por el crecimiento simultáneo de la compresión y de la flexión, no se produce descarga en ninguna fibra de la sección. Evidentemente, las tensiones σ_f deben cumplir las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_{c_1}^{c_2} \sigma_f \cdot d\xi &= 0 \\ \text{b. } \int_{c_1}^{c_2} \sigma_f \cdot \xi \cdot d\xi &= P(a + v) \end{aligned} \quad \text{[I-16]}$$

que sencillamente quieren decir: la primera, la nulidad de la resultante de las tensiones debidas a la flexión; y la segunda, la igualdad entre los momentos interno y externo. Para entender la notación conviene estudiar la figura 12, en la que se representa una rebanada de la barra deformada; y de la que deducimos, además:

$$\frac{\xi}{(\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot dz} = \frac{\rho}{(1 - \varepsilon_0) \cdot dz}$$

siendo ρ el radio de curvatura de la elástica deformada. Y siendo muy pequeño frente a la unidad se puede poner:

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\xi}{\rho}$$

y análogamente:

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{c}{\rho} \quad \text{[I-17]}$$

de donde:

$$\xi = c \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad d\xi = \frac{c \cdot d\varepsilon}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \quad \text{[I-18]}$$

Introduciendo [I-18] en [I-16] quedan estas últimas ecuaciones en la forma:

$$\frac{b \cdot c}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_f \cdot d\varepsilon = 0 \quad \frac{b \cdot c^2}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_f \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot d\varepsilon = P(a + v) \quad \text{[I-19]}$$

En estas ecuaciones, σ_f depende de ε a través del diagrama tensiones-deformaciones del material. Como este diagrama no obedece a una ley matemática sencilla, ya se comprende que las integrales sólo podrán resolverse por métodos gráficos o numéricos.

Por otra parte, en ellas figuran cinco variables: ε_1 , ε_2 , a , P , v , puesto que ε_0 depende de la tensión media σ_0 y, por tanto, de P . Teniendo en cuenta la [I-17], podemos considerar como variables, en el anterior sistema de dos ecuaciones, las cinco siguientes: ρ , ε_2 , a , P , v ; de las cuales tres son, evidentemente, independientes. Fijando dos de ellas y eliminando una tercera, podremos obtener una relación entre las dos restantes. Si fijamos a y P , las dos ecuaciones nos dan las relaciones que existen entre la deformación de la fibra más cargada (ε_2), el radio de curvatura (ρ) y la ordenada de la elástica (v) en las distintas secciones de una pieza comprimida por la carga P , con la excentricidad a . Luego eliminando ε_2 , o dando valores a esta variable y deduciendo con [I-19] los correspondientes de ρ y v , obtendremos una relación entre estas dos magnitudes, que podemos escribir en la forma:

$$v'' = F(v) \quad [I-20]$$

si admitimos la pequeñez de las deformaciones y suponemos $v'' = \frac{1}{\rho}$; [I-20] es la ecuación diferencial de la deformada. Las dificultades de su integración son considerables, pero si la conseguimos habremos obtenido la ecuación de la elástica

$$v = \varphi(a, P, l, z) \quad [I-21]$$

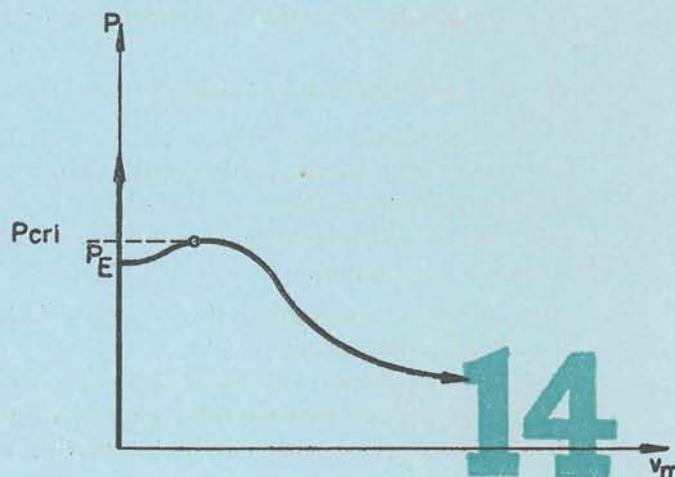
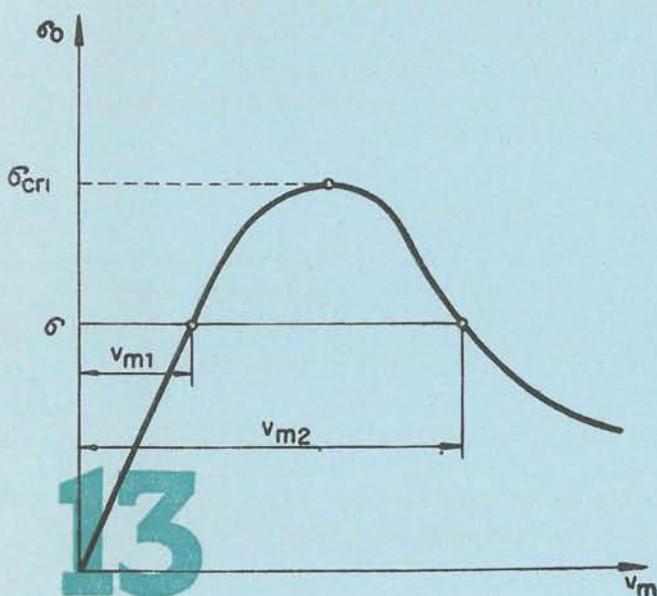
en la que los parámetros a , P estaban presentes de antemano y l se ha introducido al determinar las constantes de integración mediante las condiciones de borde. Interesándonos fundamentalmente la flecha máxima de la barra, en el centro de la misma, la relación [I-21] puede escribirse, haciendo

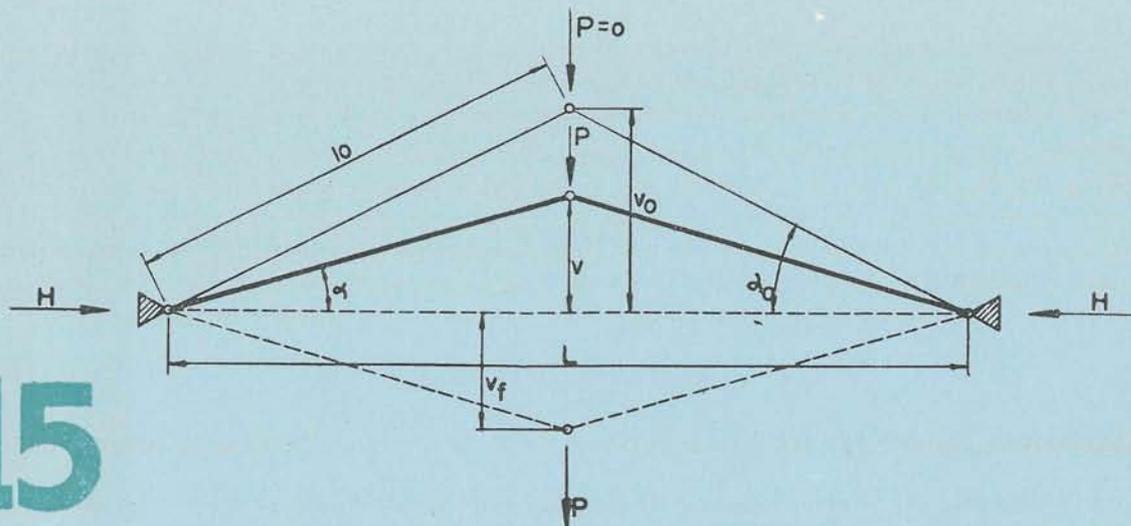
$$z = \frac{l}{2};$$

$$v_m = \theta(a, P, \lambda) \quad [I-22]$$

poniendo la longitud en función de la esbeltez λ y del radio de giro, conocido, de la sección de la barra. Para cada par de valores λ , a , la relación anterior nos permite dibujar una curva que relaciona la flecha v_m con la carga P , o lo que es lo mismo, con la tensión $\sigma_0 = \frac{P}{F}$. Estas curvas tienen la

forma, comprobada experimentalmente por Chwalla, de la figura 13. En ella se ve que a cada valor de σ corresponden dos flechas, la primera de las cuales representa un estado estable de equilibrio y la segunda un estado inestable. La tensión correspondiente al punto que separa ambas ramas de





la curva σ_{crit} , puede considerarse como una verdadera tensión crítica, por encima de la cual es imposible el equilibrio de la barra.

Nuestro propósito, en este apartado, era únicamente el de atraer la atención sobre esta forma de inestabilidad relacionada con el comportamiento plástico del material.

El ver cómo se pueden soslayar las dificultades que encierra, según hemos expuesto, la determinación de la tensión crítica, para poder comprobar fácilmente en la práctica la seguridad de la barra, será objeto de otro apartado posterior.

Pero, antes de pasar a otro punto, es interesante ver cómo influyen las propiedades del material sobre la bifurcación del equilibrio de la barra comprimida axilmente, aunque la tensión crítica se encuentre por debajo del límite de proporcionalidad.

Recordemos la figura 4; al superar la carga crítica, la barra puede, según la teoría expuesta en 1.11, continuar con una forma recta de equilibrio o adoptar una forma curva; supongamos que sea éste el caso y que se trata de una barra de las utilizadas normalmente en construcción, es decir, no excesivamente flexible.

Al aumentar la flecha, como consecuencia del aumento de carga, la barra o, por lo menos, la parte correspondiente a las secciones más cargadas, entrará más o menos pronto en el dominio plástico. Y a partir de este momento, los fenómenos serán los mismos estudiados para la barra comprimida y flectada en este apartado. Luego la verdadera forma de la curva cargas-deformaciones de una pieza solicitada a compresión axil será la representada en la figura 14. Ya veremos más adelante cómo este comportamiento se tiene en cuenta en los métodos de comprobación.

1.1.3. Los problemas de inestabilidad con variación brusca de forma

Hemos estudiado, hasta ahora, los casos de inestabilidad en los que, al llegar a un cierto valor crítico de la carga, la elástica deformada puede adoptar dos formas distintas, inicialmente coincidentes en el punto crítico (bifurcación), y aquellos otros en que, a partir del valor crítico, las deformaciones crecen aceleradamente, sin aumento de la carga, hasta la rotura del sistema (agotamiento de la capacidad resistente).

Pero existe un tercer grupo de problemas de inestabilidad, en los que, para el valor crítico de la carga, la forma del sistema cambia bruscamente para buscar una nueva posición de equilibrio, en la que, incluso, es distinto del inicial el tipo de sollicitación de los elementos que componen el sistema; y sin que, entre una forma y otra, sea posible, supuestas fijas la magnitud y dirección de las cargas actuantes, ninguna posición estable intermedia.

La exposición matemática de estas cuestiones requiere la utilización de la teoría de orden III y, en muchas ocasiones, la introducción de las deformaciones longitudinales, lo cual hace que se salga de los límites que nos hemos propuesto en este trabajo.

Pero puede obtenerse una idea intuitiva considerando un caso muy sencillo que suele servir de ejemplo en casi todos los tratados de Teoría de la Estabilidad y que nosotros vamos a exponer siguiendo a Belluzzi. Se trata de dos puntales muy poco inclinados entre sí, articulados en sus apoyos y en su punto de unión y solicitados en éste por una carga vertical P. La notación es la de la figura 15. En cada uno de los dos puntales el esfuerzo axial de compresión será:

$$C = \frac{P}{\text{sen } 2\alpha} = \frac{P \cdot l}{2 \cdot v} \quad [\text{I-23}]$$

y el acortamiento sufrido por cada uno de ellos

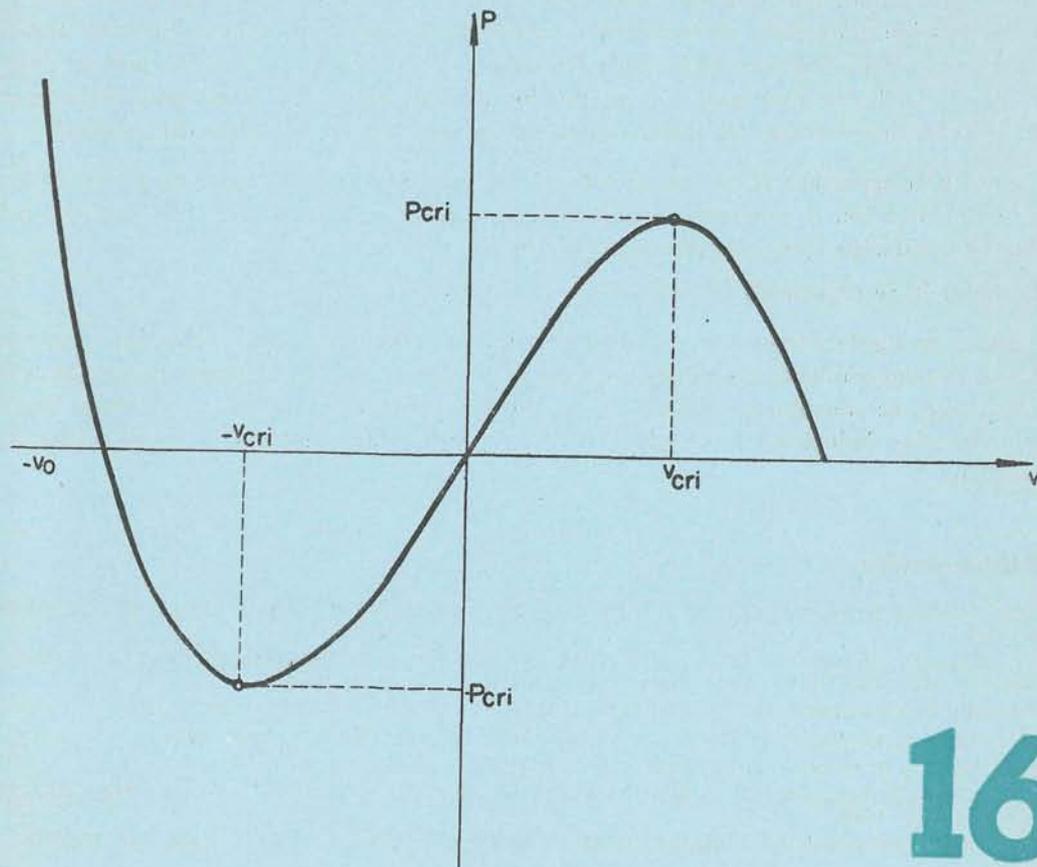
$$l_0 - l = \frac{C \cdot l_0}{E \cdot F} = \frac{Pl}{2v} \cdot \frac{l_0}{EF}$$

Llamando F al área de la sección transversal de los mismos. Dada la pequeñez de las deformaciones elásticas, podemos escribir sin inconveniente:

$$l_0 - l = \frac{Pl^2}{2EFv} \quad [\text{I-24}]$$

Admitiendo que las articulaciones de apoyo son perfectamente fijas, puede ponerse:

$$l_0 = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + v_0^2} = \frac{L}{2} \sqrt{1 + \frac{4v_0^2}{L^2}} \approx \frac{L}{2} \left(1 + \frac{2v_0^2}{L^2}\right)$$



ya que hemos supuesto inclinación muy pequeña en los puntales y, por tanto, v_0 muy pequeño frente a L , análogamente:

$$l \approx \frac{L}{2} \left(1 + \frac{2v^2}{L^2} \right)$$

luego:

$$l_0 - l = \frac{v_0^2 - v^2}{L} \quad [I-25]$$

y sustituyendo en [I-23]:

$$P = \frac{2EA}{L \cdot l_0^2} \cdot v(v_0^2 - v^2) \quad [I-26]$$

que representa la relación entre la carga P y la flecha v del sistema. Si derivamos esta expresión y la igualamos a cero, obtendremos una ecuación de la que puede deducirse el valor de la flecha crítica:

$$\frac{dP}{dv} = \frac{2EA}{L \cdot l_0^2} (v_0^2 - 3v^2) = 0 \quad [I-27]$$

de donde:

$$v_{cri} = \frac{v_0}{\sqrt{3}} \quad [I-28]$$

valor que introducido en [I-26] nos da:

$$P_{cri} = \frac{4EA v_0^3}{3 \cdot \sqrt{3} L \cdot l_0^2} \quad [I-29]$$

Este valor es un máximo de P , porque [I-27], $\left(\frac{d^2P}{dv^2} \right)_{v=v_{cri}} < 0$

A partir del mismo, las deformaciones continúan sin aumento de la carga y sin posibilidad de una nueva posición inmediata de equilibrio estable hasta que el sistema se invierta, quedando las dos barras por la parte inferior de la línea de apoyos y solicitadas a tracción por la fuerza P_{cri} . Evidentemente, la flecha final será $v_f > v_0$ por los alargamientos de las barras solicitadas ahora a tracción. Si se suprime la carga, el sistema quedará en una posición simétrica de la inicial.

Volviendo a la expresión [I-29] ya se comprende que, dado el alto valor de E en los materiales usuales de construcción, el fenómeno estudiado sólo puede producirse, sin rotura o pandeo prematuro de los puntales, cuando v_0 es muy pequeño frente a L .

En la figura 16 se representa la forma de la curva P - v .

Esta forma de inestabilidad puede presentarse en arcos o láminas muy rebajados. Como decíamos al principio, el planteamiento matemático de estos problemas, aun en los casos más sencillos de forma y de solicitación, es sumamente engorroso, por lo cual los métodos de comprobación se basan en fórmulas simplificadas deducidas de estudios teóricos aproximados, confirmados o corregidos por la experimentación.

1.2. bibliografía

- O. Belluzzi: Scienza delle costruzioni. Vol. IV. Cap. 33, La stabilità dell'equilibrio elastico. Zanichelli. Bologna, 1955.
- C. Benito: Estudio de pandeo de la pieza recta cargada de punta. Publicaciones del Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción, núm. 67. Madrid, 1950.
- C. B. Biezeno y R. Grammel: Technische Dynamik. Julius Springer. Berlín, 1939.
- F. Bleich: Buckling Strength of Metal Structures. McGraw-Hill. Nueva York, 1952.
- G. Burgermeister y H. Steup: Stabilitätstheorie I. Akademie Verlag. Berlín, 1959.
- O. Jungbluth: Stabilitätsuntersuchungen in Stahlbau. Manual "Stahlbau". Vol. I. Pág. 269. Stahlbau-Verlag. Colonia, 1956.
- L. Stabilini: La estabilidad del equilibrio elástico. Monografías del I. T. C. C., núm. 145. Madrid, 1954.