

Un estudio histórico del problema de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. Parte I

A historical study of the problem of straight prismatic elements subjected to compression. Part I

Miguel A. Ortega*, José L. Romero**, Emilio de la Rosa***

RESUMEN

En el presente artículo se recogen, desde una perspectiva histórica, las cuestiones básicas que han marcado la evolución del estudio de piezas prismáticas rectas sometidas a compresión. Dicho estudio se lleva a cabo considerando los problemas prácticos en relación con los cuales se han desarrollado tanto los modelos como la teoría que explica su comportamiento.

En un primer apartado se recogen los primeros problemas que dan origen al nacimiento de la teoría de la viga-columna (cargas de pandeo y estabilidad) y sus posteriores desarrollos: imperfecciones, grandes deformaciones, deformación por cortante y asimetrías. Por otra parte se recogen nuevos problemas en relación con el comportamiento de los materiales (plasticidad, reología) y su carácter tridimensional. Por último se menciona la aplicación de la teoría de la fractura y daño al estudio del comportamiento de los pilares.

400-40

Palabras clave: elementos finitos, métodos numéricos, pandeo, pilares, splines generalizados.

SUMMARY

This article presents a historical overview of the key questions that have marked the evolution of the study of straight prismatic elements subjected to compression loads. Straight prismatic elements are researched considering the practical problems on the basis of which models and the theory explaining their behaviour have been developed.

The problems that give rise to the origin of the theory of the beam-column are reviewed in the first section (buckling loads and stability) and their subsequent developments: imperfections, large deformations, shear deformation and asymmetries. On the other hand, new problems in relationship to the behavior of the material (plasticity, rheology) and its three dimensional nature are considered. Finally, the application of fracture and damage theory to the study of the behaviour of the columns is mentioned.

Keywords: beam-columns, buckling, finite elements, generalized splines, numerical methods.

*Dr. Ingeniero de Caminos. Empresarios Agrupados. Departamento Civil

**Dr. Ingeniero de Caminos. Facultad de Informática. UPM

***Dr. Ingeniero de Caminos. E. T. S. de Ingenieros de Caminos. UPM

Persona de contacto/Corresponding author: mon@empre.es ([Miguel A. Ortega](mailto:mon@empre.es))

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento de los pilares ha sido una fuente de aportaciones teóricas y de resultados prácticos de gran interés para la ingeniería de estructuras del que han surgido importantes áreas como la estabilidad. Su análisis se ha fundamentado en distintas ramas como la mecánica clásica, con sus principios variacionales básicos, y la mecánica de los medios continuos: elasticidad y plasticidad. Todo ello ha permitido la utilización de los métodos de resolución que se han desarrollado en el campo de la física matemática. La evolución del estudio no ha sido continua y en el avance se han entrecruzado distintas cuestiones. A grandes rasgos se pueden distinguir diferentes periodos y fases que caracterizan este proceso, tal y como se indica en los apartados siguientes.

2. CREACIÓN DEL MODELO ELÁSTICO

En los primeros momentos, la elaboración de una teoría capaz de modelizar y explicar el comportamiento de piezas prismáticas rectas aplicable al caso de piezas sometidas a compresión, resultó ser un proceso en el que se combinaron distintos elementos: por una parte, aspectos de tipo físico: conceptos de tensión y de deformación o el problema de la posición de la fibra neutra; por otra, aspectos geométricos con los que se relacionaba la deformada de la pieza con los esfuerzos internos: relaciones cinemáticas de desplazamiento y deformación o las relaciones constitutivas.

La selección de las hipótesis en cada uno de estos aspectos va marcando la historia de los modelos de piezas prismáticas. Tal y como se indica en Timoshenko (21) y en Love (13) el primer científico que se ocupó de estudiar el comportamiento resistente de una pieza prismática fue Galileo. En su publicación de 1638 "Discorsi e Dimostrazioni matematiche", sin utilizar ninguna ley que relacionara tensión con deformación trata de obtener algunos resultados sobre la resistencia de una viga sometida a cargas transversales, y aunque algunas de las hipótesis que emplea en su análisis no son correctas (por ejemplo, la de la posición de la fibra neutra), su forma de abordar el problema representa un modelo que es seguido por investigadores posteriores, particularmente por Mariotte. Este problema, y, en particular, el de determinación de la elástica o deformada de la viga, es conocido como el problema de Galileo.

2.1. La carga de pandeo, el equilibrio y la bifurcación.

Respecto al problema de pandeo propiamente, Musschenbroek, en 1729, a través de

su programa experimental de resistencia de materiales puso de manifiesto que la carga de pandeo es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la pieza (22). Jacobo Bernoulli, algunos años antes (en 1705), obtiene de una manera precisa la ecuación de la elástica basándose en la hipótesis de Mariotte sobre la fibra neutra, considerando la proporcionalidad existente entre la curvatura de la elástica y el momento flector. Euler, en 1744 (21), mediante su método de cálculo de variaciones obtiene, a partir de la sugerencia de Daniel Bernoulli, la ecuación diferencial de la elástica, publicando dicho resultado en "Methodus inveniendi líneas curvas maximi minimive proprietate gaudentes". En este trabajo Euler obtuvo ya el valor de la carga de pandeo.

En 1757 en su publicación "Sur la force des colonnes" obtiene de nuevo el valor de dicha carga a partir de una simplificación (ecuación linealizada) de la ecuación diferencial de la elástica. Hay que señalar que la carga de pandeo que da Euler contiene una constante C , que denomina coeficiente de elasticidad absoluta de la pieza, en lugar de la rigidez EI , y para la que da las dimensiones correctas de una fuerza por el cuadrado de una longitud. En publicaciones posteriores considera el caso de piezas de sección variable y otros con carga axial distribuida a lo largo de la longitud de la pieza (Figura 1).

2.2. La forma óptima de los pilares

Al mismo tiempo se profundiza en distintas líneas de trabajo: Euler, por ejemplo, no investigó el valor de cargas de pandeo superiores a la primera. En 1770, Lagrange, en su publicación "Sur la figure des colonnes", estudia la ecuación linealizada de Euler (21) (22) y obtiene la sucesión de valores de cargas críticas posibles para la pieza biarticulada relacionando cada carga con la correspondiente deformada:

$$P_n = n^2 \frac{C\pi^2}{l^2} \quad [1]$$

donde:

l es la longitud de la columna,

C es un coeficiente que representa la rigidez de la pieza,

n cualquier número natural.

Asimismo, considerando el valor exacto de la curvatura determina las deformadas para cargas que exceden el valor de la carga crítica. Lagrange también estudia cómo debe ser el éntasis o abultamiento del fuste para un pilar de altura y volumen dados de manera que la carga de pandeo sea lo mayor posible. Concluye erróneamente

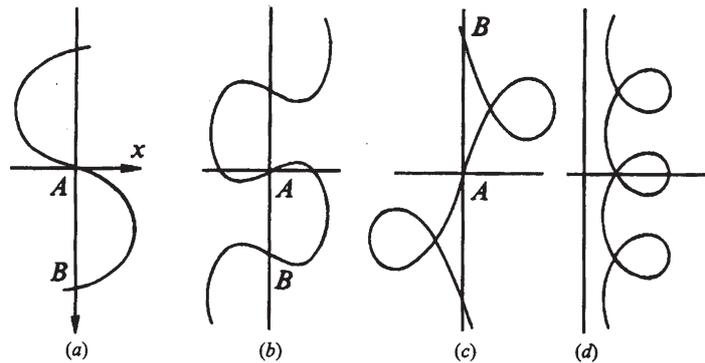


Figura 1. Euler: curvas elásticas.

que la mejor forma es un cilindro circular, es decir, que el éntasis no aumenta la carga de pandeo [(21), p. 39]. Posteriormente, Clausen, en 1851, determina que la pieza óptima frente al pandeo es aquella donde la variación de la sección circular a lo largo del fuste da un perfil algo parecido al de una cicloide [(22), p. 284]. En relación con este problema de cálculo de variaciones sobre el pandeo de la pieza recta hay multitud de publicaciones de gran interés. Una de ellas es la de Keller (1960, The shape of the strongest column pág. 303 de Truesdell), en ella se conjetura que la pieza más resistente al pandeo es una cuya sección varía de la misma forma que la determinada por Clausen, pero, en lugar de secciones circulares, éstas son triángulos equiláteros que mantienen el paralelismo de los lados y con el baricentro en el eje de la pieza.

2.3. Ecuaciones de las piezas prismáticas rectas sometidas a compresión en la teoría de la elasticidad lineal

Pese a los resultados obtenidos en relación con la carga de pandeo y la importancia que tuvo el descubrimiento del fenómeno de la inestabilidad, el problema no quedó resuelto satisfactoriamente. Para ello fue necesario, entre otros aspectos, la correcta situación del eje neutro ("neutral axis" de Tregold (1820)) y su generalización por Navier (Figura 2). En palabras de su discípulo Barre de Sant Venant: "en el curso de 1824, todo error anterior fue corregido y Navier, único entre todos los autores, determina la línea que atraviesan las fibras invariables para secciones de forma cualquiera..."(18).

Con el establecimiento por parte Navier (1826) de la teoría de vigas a flexión es posible plantear la ecuación de la viga-columna en régimen elástico, que tiene la expresión, para el caso de rigidez constante, dada por:

$$u^{(4)} + k^2 u'' = \frac{f(x)}{EI} \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{P}{EI} \quad [2]$$



Figura 2. Navier.

donde:

u = desplazamientos,

$f(x)$ = carga exterior perpendicular a la directriz,

P = carga axil.

Que, con las correspondientes condiciones de contorno, hacen que la solución se pueda determinar teniendo en cuenta el problema de interpolación de Hermite-Birkoff asociado.

De esta forma el problema elástico queda reducido a la resolución de [2] cuya solución general es del tipo:

$$u = A \operatorname{sen} x + B \cos x + Cx + D + u_p \quad [3]$$

donde u_p es una solución particular de la completa y A, B, C y D son coeficientes a determinar con las condiciones de contorno.

3. DESARROLLO DEL MODELO ELÁSTICO

3.1. Imperfecciones

Otro aspecto de interés práctico está relacionado con el efecto de las imperfecciones en

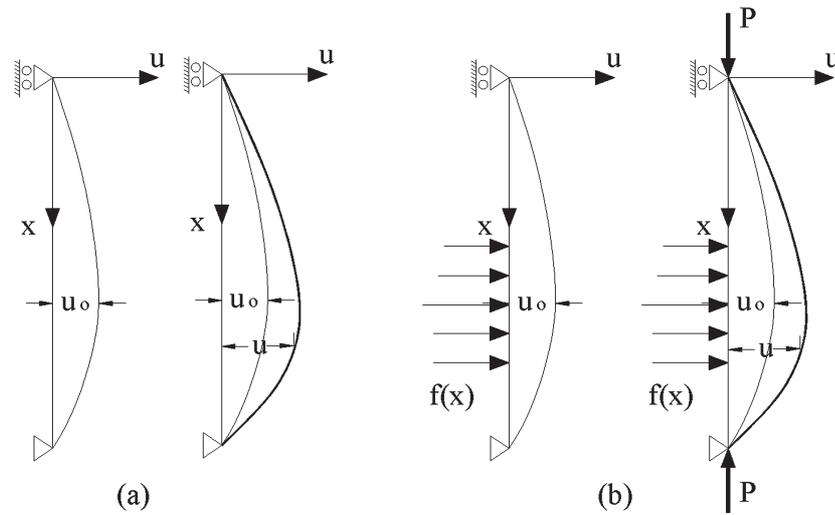


Figura 3. Pilar con imperfecciones.

el comportamiento de las vigas columna. Para su estudio se considera un pilar sin acciones y con una deformada inicial $u_0(x)$ (Figura 3 (a)) o de forma equivalente sometido a una acción $f(x)$ que produce una deformada $u_0(x)$ (figura 3 (b)).

Para este tipo de situaciones como el caso (a) de la figura 3, Thomas Young, en 1807, estableció la ecuación:

$$u'' + k^2 u = u_0'' \quad [4]$$

Mediante un análisis de Fourier se demuestra que utilizando el primer término del desarrollo:

$$\text{máx } u \approx \mu \cdot \text{máx } (u_0) \quad \text{máx } M = \mu \cdot \text{Máx } (M_0)$$

$$\text{con: } \mu = \frac{1}{1 - (P/P_{cr})} \quad [5]$$

μ es el factor de amplificación dado por Young en la citada fecha. Es un procedimiento para aproximar los valores máximos para cargas P próximas a la carga crítica de pandeo.

3.2. Grandes desplazamientos. Los trabajos de Kirchhoff

Como ya se ha indicado anteriormente, Euler, tratando el problema de piezas sometidas a compresión, plantea el problema con generalidad considerando grandes desplazamientos empleando para ello la expresión exacta de la curvatura. Tomando los ejes coordenados como se indica en la figura 4, la ecuación diferencial de la pieza de longitud l y de rigidez constante $A = EI$ sometida únicamente a la carga axial P es:

$$A \frac{d^2 \theta}{ds^2} + P \text{sen } \theta = 0 \quad [6]$$

A partir de esta ecuación, Kirchhoff establece, en 1889, una analogía entre este problema y el de las oscilaciones de un péndulo, denominándose, por esta causa, analogía cinética de las columnas.

Dicha ecuación fue resuelta por Lagrange años antes.

A partir de esta analogía y mediante el uso de integrales elípticas, Kirchhoff llega a determinar la trayectoria carga-desplazamiento poniendo de manifiesto el carácter estable de la trayectoria post-pandeo para el caso de grandes desplazamientos y deformaciones al considerar la curvatura exacta (Figura 5).

Por otra parte, el problema sobre el comportamiento de la pieza sometida a estados más generales de carga que la compresión, es abordado de una manera muy completa por Kirchhoff en 1859, generalizando resultados anteriores obtenidos por Euler [(23),p.167].

3.3. Deformación por cortante

De acuerdo con la teoría de la viga de Timoshenko (Figura 6) que tiene en cuenta la deformación introducida por el esfuerzo cortante V , si θ es la pendiente de la deformada de la viga y ψ es la rotación de la sección se tiene que:

$$\psi' = \frac{M}{EI} \quad [7]$$

El ángulo debido al cortante es:

$$\gamma = \theta - \psi = \frac{V}{GA_0} \quad [8]$$

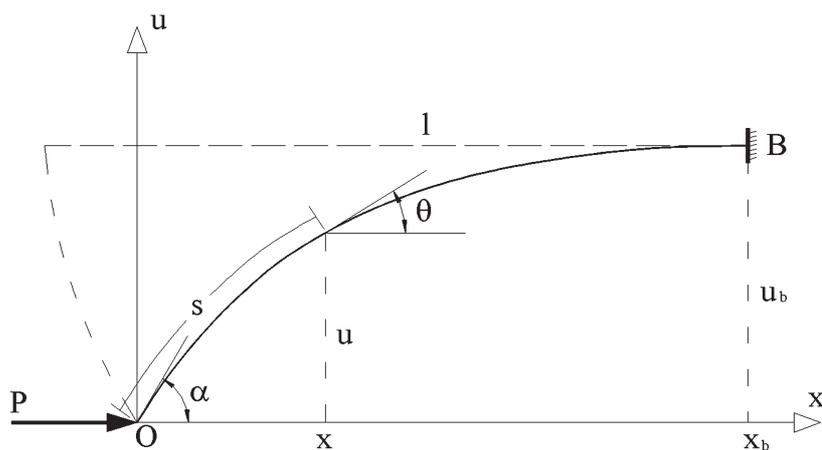


Figura 4. Barra comprimida con grandes deformaciones.

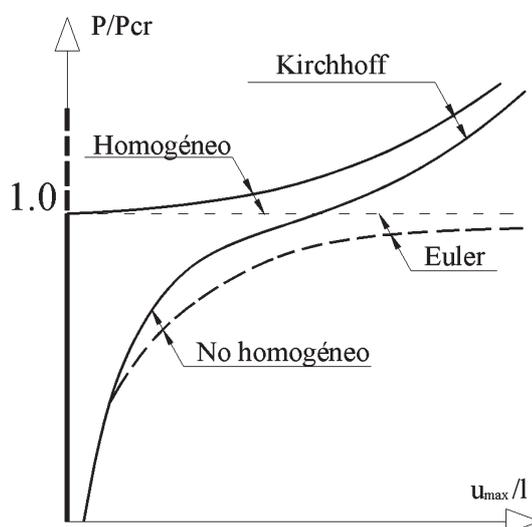
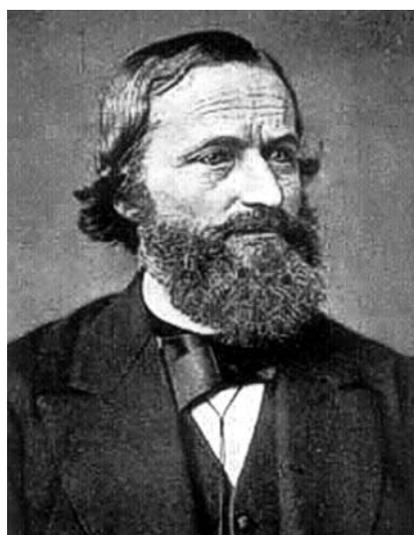


Figura 5. Kirchhoff: la estabilidad con grandes deformaciones.

G es el módulo elástico de deformación por cortante.

$$A_0 = mA$$

Donde A es el área de la sección y m es un coeficiente de corrección por cortante que tiene en cuenta la distribución de las tensiones cortantes en la sección ($m = 1$ para una distribución uniforme).

Para el caso homogéneo, Engesser (1889, 1891), encuentra que las cargas de pandeo para las distintas formas modales son:

$$Pcr_n = \frac{P^0 cr_n}{1 + n^2 m [\pi(l/r)]^2 (E/G)} \quad [9]$$

$P^0 cr_n$ es la carga de pandeo cuando no se tiene en cuenta el cortante.

r es el radio de giro de la sección y l/r la esbeltez.

Cuando la esbeltez es grande el efecto del cortante pierde importancia, recuperándose la carga de pandeo de Euler. Para $n = 1$, de la ecuación anterior se deduce que la tensión en la sección es:

$$\sigma cr_1 = \sigma^0 cr_1 \left(1 + \frac{m \sigma^0 cr_1}{G} \right)$$

donde

$$\sigma^0 cr_1 = \frac{P^0 cr_1}{A} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} \quad [10]$$

es la tensión crítica sin tener en cuenta el cortante que da lugar a la hipérbola de Euler (figura 6-c) en la que, asimismo, se representan los casos de la ecuación [10] para $E/G = 0,26$ y $E/G = 12$.

3.4. Asimetrías e Imperfecciones. Sensibilidad: criterio de Koiter

El estudio de entramados en el campo elástico lineal pone de manifiesto otro hecho

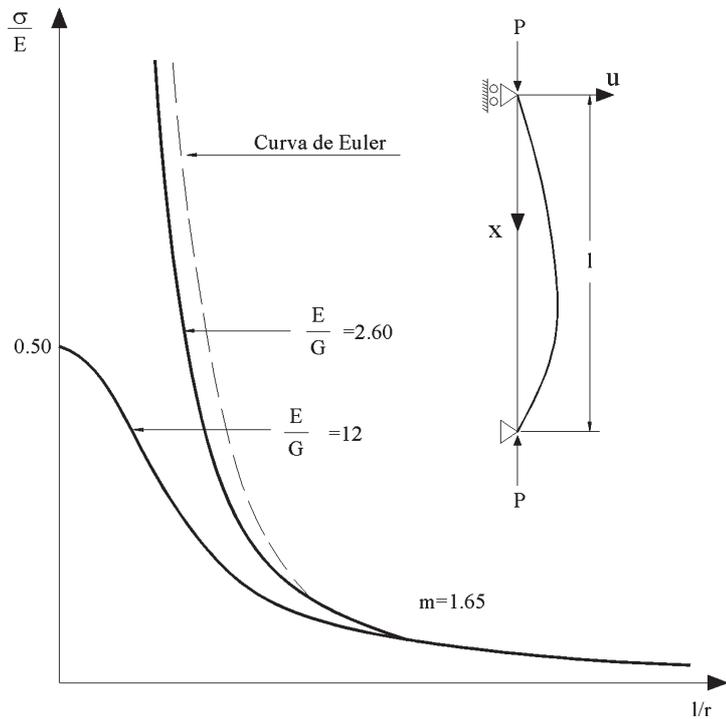
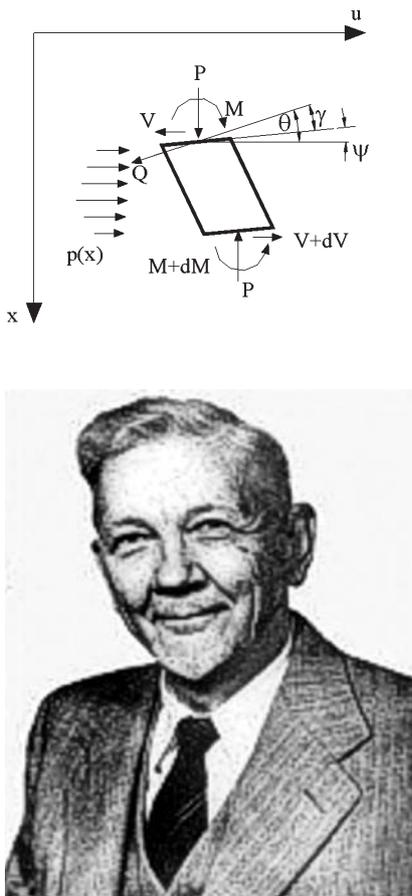


Figura 6. Timoshenko: la deformación por cortante.

de gran interés en el análisis del pandeo de estructuras formadas por piezas prismáticas como es el hecho de la asimetría de las trayectorias, puesto de relieve en los trabajos de distintos autores (12) (16) (17). Para los casos más sencillos de análisis de pórticos en L formados por un pilar y una viga, se obtienen trayectorias como la de la figura 7. Para un pórtico como el de la figura-7(a) sometido a una carga \$P\$ con una excentricidad \$[e]\$ en el vértice que puede representar una imperfección en la aplicación de la carga, como se puede seguir en [(1), pág. 90-95], se obtienen, considerando aproximaciones con términos cuadráticos de segundo orden, las trayectorias indicadas.

En el caso de \$e = 0\$ existe una trayectoria vertical estable con \$P \in [0, P_{cr}]\$ y una trayectoria \$P - \theta\$ inestable dada por la recta

$$P = P_{cr} (1 + a\theta) \quad [11]$$

donde \$P_{cr}\$ es la carga de pandeo del pórtico en régimen lineal y \$a\$ es una constante que depende de los datos geométricos del problema.

Cuando \$e \neq 0\$ la trayectoria viene dada por la ecuación:

$$P = P_{cr} \left[\frac{1 + a\theta}{1 - (\alpha/\theta)} \right] \quad [12]$$

donde \$\alpha \equiv e\$, representa el valor de la excentricidad de forma adimensional.

Esta relación presenta un tramo creciente estable de \$P \in [0, P_{max}]\$ y un tramo inestable asintótico a la recta anterior. Frente a la trayectoria lineal de primer orden, que es siempre estable, de forma que el caso lineal presenta una simetría respecto del eje de ordenadas, la aproximación cuadrática presentaría una rama asimétrica asintótica a la recta creciente a la izquierda del eje de ordenadas (Figura 7 b).

Finalmente, en el gráfico (c) se recoge la variación del valor límite \$P_{max}\$ de la carga para diferentes valores de la excentricidad. Dicha relación es un caso particular de lo que Koiter puso de manifiesto de forma general en 1945 con sus celebres leyes de los exponentes \$1/2\$ y \$2/3\$. Así, para casos

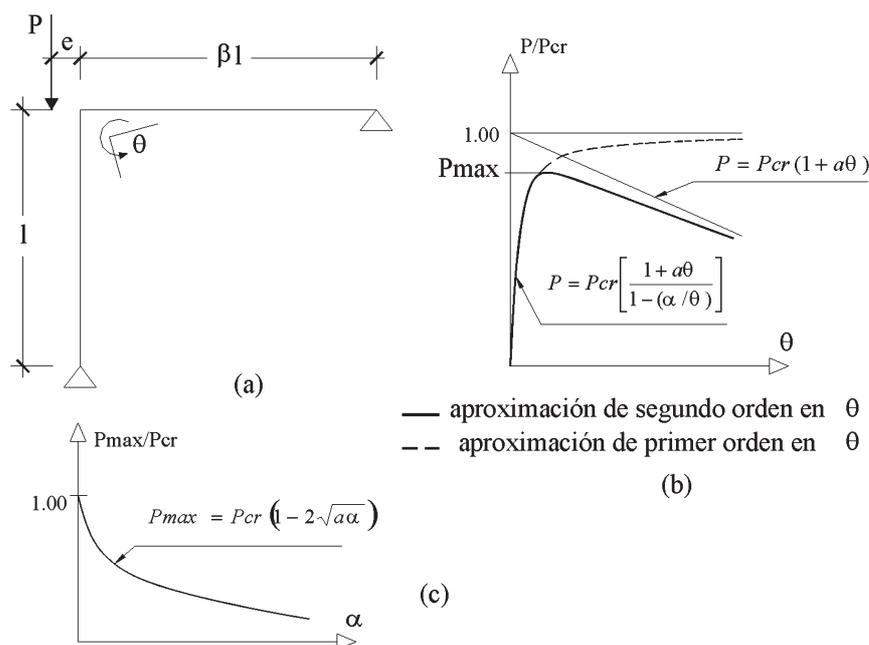


Figura 7. Pórtico asimétrico con imperfecciones.

simétricos:

$$P_{\max} - P_{cr} \approx \alpha^{2/3} P_{cr}$$

mientras que para casos asimétricos:

$$P_{\max} - P_{cr} \approx \alpha^{1/2} P_{cr}$$

Que ponen de manifiesto que las estructuras que presentan un carácter asimétrico son más sensibles frente a las imperfecciones que las de carácter simétrico.

4. AMPLIACIÓN A NUEVOS PROBLEMAS

4.1. Introducción

En el último cuarto del siglo XIX se inicia una nueva etapa en la visión del comportamiento de los pilares cuando un mejor conocimiento de los materiales lleva a algunos autores a utilizarlos más allá del rango elástico, entonces surge de nuevo el problema de la estabilidad cuando se utilizan pilares esbeltos con los materiales en régimen no lineal.

La consideración de las propiedades de los materiales dio lugar a nuevas interpretaciones de las ecuaciones de la viga-columna. Así, Lamarle, en 1845, limita la aplicación de la fórmula de Euler al límite de proporcionalidad del acero. Los primeros pasos del estudio de la estabilidad en condiciones de plastificación se hacen a través de modelos que tratan de explicar el fenómeno de la inestabilidad cuando en determinados puntos de la pieza se entra en fase plástica. Una primera teoría de pandeo que tiene

en cuenta este comportamiento en régimen no lineal de los materiales es la teoría del módulo tangente propuesta inicialmente por Engesser en 1889 (9), sin embargo, unos años más tarde prevalece la idea de Considere, en 1891 (7), del módulo reducido que es desarrollada con detalle por Engesser en 1895 (véase (3) y (4)). Teoría que es respaldada más tarde por Von Karman, tanto teórica como experimentalmente en 1910. En estas teorías, en la expresión de la carga de Euler se sustituye el módulo de elasticidad E por el módulo tangente E_t o reducido E_r del material.

Tras la aportación de Engesser y ante la falta de desarrollos teóricos en este nuevo planteamiento se combinan los estudios experimentales, en los que se pone de manifiesto el comportamiento del tipo de material y argumentaciones empírico-teóricas.

Uno de los primeros autores que introducen los criterios del comportamiento del material para definir la carga o tensión crítica teniendo en cuenta al mismo tiempo las características y tipo de material fue Tetmajer, que establecía una relación entre la tensión crítica y la esbeltez de la pieza de tipo lineal para hierro de construcción o acero fundido y una relación parabólica para material de fundición. Von Karmán, por su parte, sobre la interpretación de ensayos, considera que cuando hay fibras que superan el límite elástico su módulo de elasticidad es distinto de aquéllas que no lo han superado, de esta forma llega a resultados análogos a los de Engesser.

4.2. Pandeo en régimen plástico

La polémica entre la teoría del módulo reducido y tangente dura medio siglo hasta

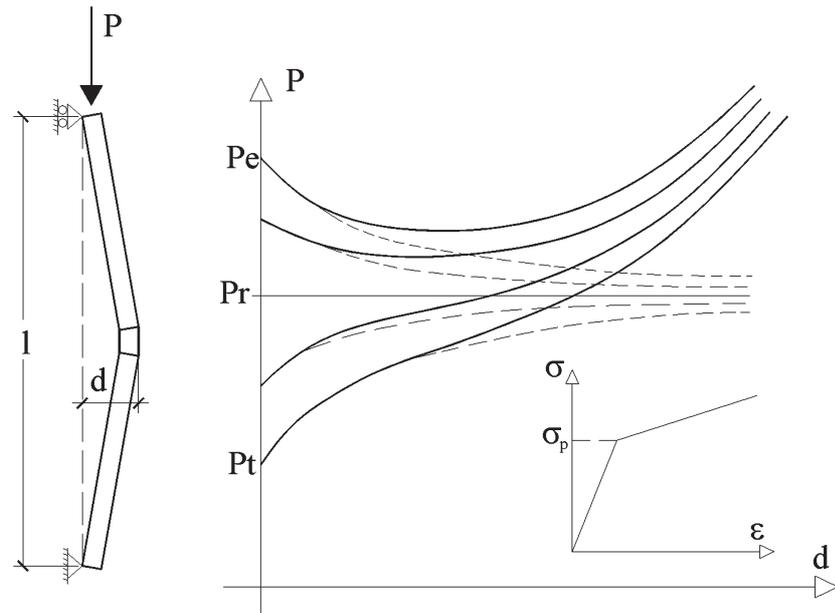


Figura 8. Columna de Shanley.

que Shanley, en 1947, elaboró su celebre modelo (19) en el que simula la plastificación mediante un sistema discreto de dos resortes con comportamiento plástico en la sección crítica del pilar mientras que el resto del pilar a efectos de la demostración se puede considerar rígido. Con este modelo trata de describir, de forma intuitiva, el comportamiento de elementos en régimen plástico. Shanley puso de manifiesto, en primer lugar, a través de su modelo, que la teoría del módulo tangente era más realista que la del módulo reducido lo cual se confirmó experimentalmente.

En segundo lugar, la teoría de Shanley destacó el hecho, todavía más relevante, de la existencia de una infinidad de puntos de bifurcación por encima de la carga dada por el módulo tangente (P_t).

Estas situaciones se representan en la figura 8, en la que las trayectorias a trazos se corresponden con el modelo aproximado de Shanley [(1), p.497] mientras que las de trazo continuo corresponden a soluciones exactas en las que, para grandes deformaciones, aparecen estados de estabilidad.

A partir de los trabajos de Engesser y Shanley ha habido multitud de estudios sobre el comportamiento de piezas rectas cortas y esbeltas en régimen elástico, lineal o no lineal, o régimen plástico, sometidas a compresión simultáneamente con otros estados de cargas. Así, en el estudio de Cimetière y Léger (6), se trató de demostrar matemáticamente que en el modelo plástico de Shanley existen infinitos puntos de pandeo entre la carga crítica del módulo tangente y la carga crítica de Euler. Hutchinson analiza un modelo continuo de Shanley con relaciones constitutivas del tipo Ramber-Osgood (11).

Es a partir del desarrollo de la teoría de la plasticidad cuando los avances en esta línea se consolidan de una forma más rigurosa gracias a los trabajos, en primer lugar, de Hill (10) que, teniendo en cuenta el cambio de geometría durante el proceso de deformación, introduce un criterio de unicidad y estabilidad de una solución por medio de la idea de sólido lineal equivalente. Por su parte, Petryck (15), con criterios energéticos introduce la noción de sólido tangente y la estabilidad de la trayectoria de deformación para sólidos discretizados (a diferencia de Hill permite abordar numéricamente el estudio de las trayectorias). Sus conclusiones se pueden considerar como una generalización del modelo de Shanley (2).

4.3. Reología y estabilidad

Junto a la consideración del comportamiento plástico de los materiales, otro de los capítulos cuyo desarrollo se va a organizar como una de las grandes ramas de la mecánica de los medios continuos va a ser la reología, en particular con el estudio de los fenómenos de fluencia y la relajación de los materiales.

La consideración de la fluencia en el caso de piezas prismáticas introduce nuevas facetas en la ya de por sí compleja cuestión de la estabilidad. En este apartado se van a tratar de recoger algunos elementos claves de esta parte de la historia de las piezas prismáticas a compresión: viscoelasticidad, viscoplasticidad y envejecimiento (1).

Como es sabido, los incrementos de deformación que sufren los materiales a tensión constante con el paso del tiempo se cuantifican mediante la función de fluencia:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + J(\sigma, t - t_1) \quad [13]$$

σ es la tensión aplicada en t_1 .

E_0 es el módulo de elasticidad instantáneo, de forma que el primer sumando representa la deformación instantánea al aplicar la tensión σ .

$J(\sigma, t - t_1)$ da el incremento de deformación en el tiempo t , que depende del estado de tensiones σ y del tiempo transcurrido $t - t_1$ durante el que se aplica la tensión σ .

Desde el punto de vista práctico en lugar de establecer directamente la función de fluencia $J(\sigma, t - t_1)$, históricamente se han creado diversos modelos reológicos elementales (Maxwell, Kelvin, Voigt, etc.) que trataban de recoger comportamientos elásticos y viscosos del material a lo largo del tiempo y que como demostró Roscoe en 1950, su combinación permite ajustar con la precisión deseada la funciones de fluencia.

a) Viscoelasticidad

En el caso de la viscoelasticidad se acepta el principio de superposición y la independencia de los parámetros elástico-viscosos respecto del tiempo. Con esta hipótesis la función de fluencia queda definida para el valor unitario de la tensión:

$$\Delta\varepsilon(t) = J(t - t_1) \quad [14]$$

de forma que en el instante t la deformación acumulada cuando a lo largo del tiempo actúa una tensión $\sigma(t)$ es:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_0} + \int_{t_1}^t J(t - t_1) d\sigma(t_1) \quad [15]$$

cuya parte integral representa la conocida ecuación integral de Volterra.

En la gráfica (Figura 9):

$$P_E = \frac{\pi^2}{l^2} EI \quad P_{E\infty} = \frac{\pi^2}{l^2} E_\infty I \quad [16]$$

P_E y $P_{E\infty}$ son las cargas críticas del pilar para los módulos instantáneos a $t = 0$ E y $t = \infty$ E_∞ respectivamente. De forma que cuando:

- $P < P_{E\infty}$ la deformación está siempre acotada.
- Si $P \geq P_{E\infty}$ la deformación no está acotada pudiéndose considerar el proceso inestable.

Resultados de este tipo son encontrados por Freudenthal (1950), Kemper (1954), Lin (1956), etc.

b) Viscoplasticidad

En el caso de materiales viscoplásticos hay que considerar la expresión general [13] que, desde el punto de vista diferencial, se puede expresar mediante los modelos reológicos con parámetros elástico y viscosos no lineales. Para el caso del modelo de Maxwell, formado por un resorte y un amortiguamiento viscoso, tiene la expresión:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \phi(\sigma) \quad [17]$$

Donde $\phi(\sigma)$ es una función monótona creciente con derivada decreciente.

Las aportaciones en este campo tienen lugar a partir de los años cincuenta del siglo XX: Hoff, que desarrolló el método de la imperfección o perturbación; Gerard y Papinno, en 1963, que propusieron el método de la deformada crítica y Robotnov (1969), entre otros.

El resultado más destacado en este caso es la existencia de un tiempo crítico (t^*) para cada carga P , en el cual la deformación tiende a infinito (Figura 10).

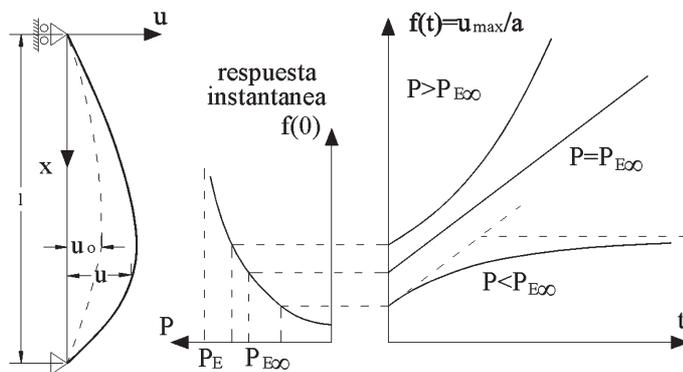


Figura 9. Deformación viscoelástica de barras a compresión.

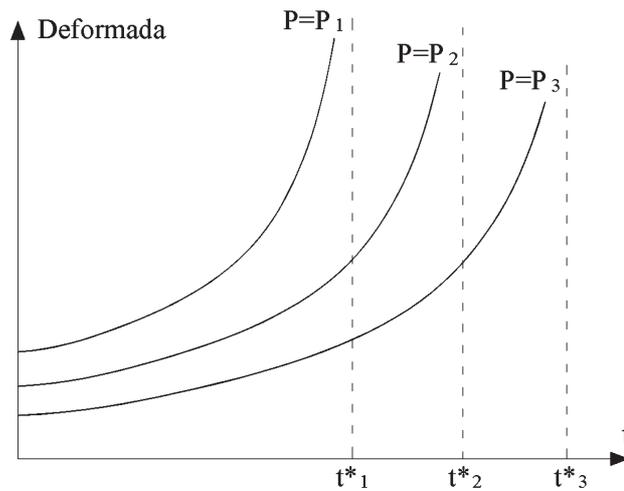


Figura 10. Deformación viscoplástica de barras a compresión.

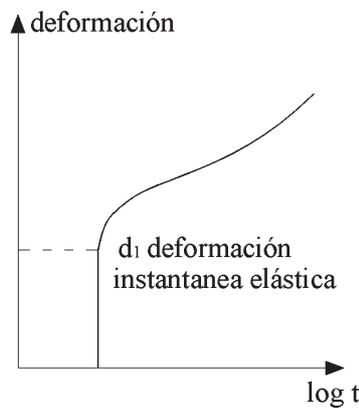


Figura 11. Deformación viscoelástica con envejecimiento de barras a compresión.

Obteniéndose una historia de la deformación (Figura 11).

Para estas situaciones se produce una deformación progresiva creciente, dependiendo su tendencia de las propiedades del material.

5. GRANDES DESPLAZAMIENTOS Y PROBLEMAS TRIDIMENSIONALES

5.1. Grandes desplazamientos

Los aspectos comentados en los apartados anteriores son algunas de las cuestiones básicas mediante las cuales se han ido aportando los elementos esenciales del análisis que explican la naturaleza y comportamiento de los pilares. Sin embargo, otros nuevos problemas y planteamientos se han añadido. En particular dos aspectos complementarios: los grandes desplazamientos junto con aspectos tridimensionales y la consideración de ciertos fenómenos de carácter plástico como la fractura y el daño. Además en este nuevo tipo de problemas tienen cabida distintos modelos sobre el campo de deformaciones (Bernoulli, Timoshenko, Levinson y otros modelos de alto orden), diferentes formas de la expresión de la curvatura (exacta, aproximada), etc.

En el caso de grandes desplazamientos, una forma de abordar el problema que ha recibido gran atención ha sido la utilización de elementos co-rotacionales: Felippa en el campo elástico y Crisfield (8) y Battini (2) en el campo plástico. Este último autor lleva a cabo un estudio del pórtico de Lee considerando grandes desplazamientos y comportamiento plástico (Figura 12). Las trayectorias del vértice \$(u, v)\$ obtenidas coinciden con los resultados de (14) y (5).

c) Envejecimiento

El envejecimiento de los materiales en el sentido de una variación de las constantes que definen el material con el tiempo (por ejemplo de aumento o disminución de su módulo de elasticidad o coeficiente de viscosidad) y que para el modelo de Maxwell tiene la expresión:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E(t)} + \frac{\sigma}{\eta(t)} \quad [18]$$

se ha estudiado en el campo de la viscoelasticidad por Whitney (1932), Glanville (1933), y, en Alemania, por Dischinger (1939), que, utilizando el modelo indicado de Maxwell, deducen la función de fluencia:

$$J(t, t_1) = \epsilon(t) = \frac{1 + \psi(t)}{E_1} \quad \text{con} \quad [19]$$

$$E_1 = E(t_1) \quad \psi(t) = E(t_1) \int_{t_1}^t \frac{dt'}{\eta(t')}$$

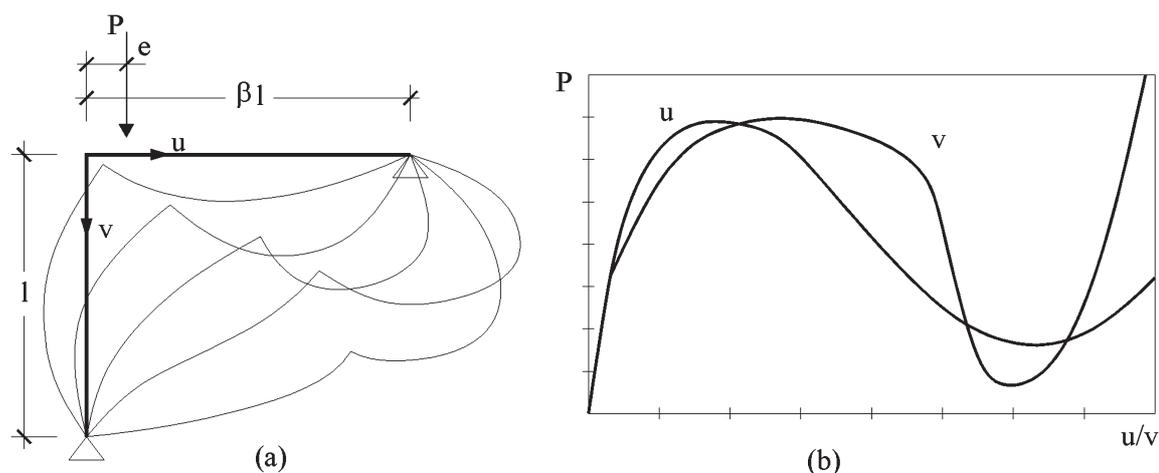


Figura 12. Trayectorias con grandes desplazamientos.

5.2. Aspectos tridimensionales

En este apartado se comentan brevemente algunos resultados sobre el estudio del comportamiento de piezas prismáticas comprimidas teniendo en cuenta que los desplazamientos realmente ocurren en las tres direcciones del espacio.

Salvo aportaciones aisladas durante la primera mitad del siglo XX, el esfuerzo para resolver el problema del comportamiento de elementos tridimensionales a compresión, tanto con comportamiento elástico como plástico de los materiales, se lleva a cabo a partir de la segunda mitad del siglo, para ello se aprovechan los resultados y métodos utilizados en dos dimensiones complementándolos con el comportamiento tridimensional de piezas prismáticas: torsión, alabeo, etc. De esta forma, en los años cincuenta se completa el conjunto de ecuaciones básicas que caracterizan el comportamiento espacial de piezas prismáticas para pequeñas deformaciones (20), incluyéndose, a partir de entonces, nuevos aspectos como grandes deformaciones, siendo necesario tener en cuenta términos de orden superior para incluir adecuadamente el efecto del axil y el torsor. Bajo estas consideraciones y teniendo en cuenta la curvatura exacta, se deducen las ecuaciones diferenciales de equilibrio para el caso elástico [(3), Vol. II, pág. 187] o para el caso plástico [(3), Vol. II, pág. 319].

La historia, en una primera etapa, se caracteriza por los siguientes pasos:

- Inicialmente el pandeo lateral por flexión es un fenómeno clave en el estudio de piezas a compresión tridimensionales, los estudios de Wagner (1929) sobre el pandeo por torsión de sección de pared delgada abren el análisis de los problemas de pandeo por flexión debido a cargas

perpendiculares a la directriz sin la existencia del axil.

- Otro de los aspectos es el desarrollo de ecuaciones diferenciales del pandeo de pilares de secciones en cruz con condiciones iguales en los extremos bajo momentos biaxiales: Wagner and Pretschner (1936), Kappus (1937), Goodier (1941,1942).
- Para comportamiento elástico, la teoría de la flexión y torsión de secciones delgadas se utiliza para resolver pilares cargados biaxialmente.
- El comportamiento plástico de columnas con acciones biaxiales ha sido estudiado extensivamente en los años sesenta: Birnstiel (1963-68), Chen (1966-76), Gaylord (1965-73), Ellis (1964-71) y Vinnakota (1974-76). Otros resultados en el campo plástico son los de Pinadzhyan (1956), Klöppel and Winkelmann (1962), para perfiles metálicos abiertos.

6. FRACTURA Y DAÑO

La sólida construcción de la teoría de piezas prismáticas a compresión, fundamentada en los principios básicos de la Mecánica, ha permitido la incorporación de nuevos fenómenos como la teoría de la fractura y el daño que han quedado adecuadamente integrados en la teoría de la plasticidad en relación con su resolución numérica. En las últimas décadas, a partir de los años 70 del siglo pasado, han constituido un nuevo punto de análisis de piezas prismáticas comprimidas.

El daño igual que la fractura son una fuente de inestabilidad aunque no existan no linealidades geométricas. La inestabilidad depende de la matriz de rigidez tangencial: cuando la matriz es definida positiva y

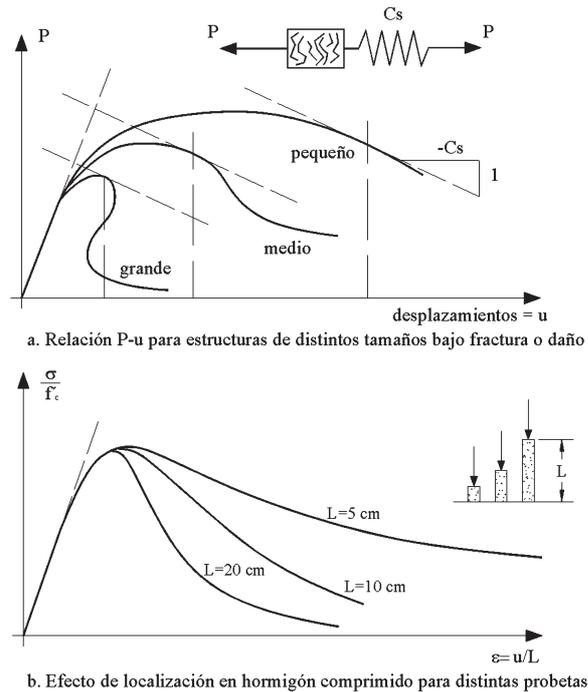
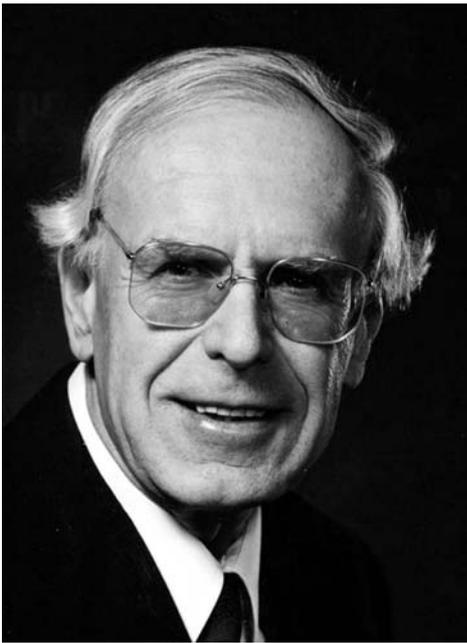


Figura 13. Zdeněk P. Bazant: efecto tamaño. Fractura y daño.

la relación tensión deformación crece (strain hardening- endurecimiento por deformación), el daño no causa inestabilidad, por el contrario, si la matriz deja de serlo cuando la relación tensión-deformación es descendente (strain softening-deformación por reblandecimiento del material), la inestabilidad y la bifurcación aparece. La inestabilidad se produce en una zona localizada con una dimensión característica del modelo

Frente al hecho del endurecimiento aparece la idea de debilitamiento o reblandecimiento por la deformación. Esta idea está bien establecida en el contexto de modelos no locales que poseen una longitud característica. Estos efectos del debilitamiento por deformación tienen un efecto desestabilizador, pudiendo ser mayor que la no linealidad geométrica (1) (Figura 13).

7. CONCLUSIONES

A lo largo del presente artículo se ha llevado a cabo un repaso histórico sobre los estudios realizados en relación con el comportamiento de piezas prismáticas rectas sometidas a compresión en el que se han recogido algunos de los aspectos más destacados que han marcado su evolución.

Su origen aparece estrechamente ligado a la nueva visión de la física que ofrecen los trabajos de Galileo recogidos en su obra en torno al nacimiento de dos nuevas ciencias en 1638. El progreso en el estudio del compor-

tamiento de los pilares tienen lugar gracias al desarrollo de la Física-Matemática en los siglos XVII y XVIII, con las aportaciones de L. Euler, James y Daniel Bernoulli que dan lugar al nacimiento de la Resistencia de Materiales en particular mediante el análisis de elementos prismáticos elásticos entre los que se encuentran la vigas-columna.

- En el caso particular de los pilares los primeros modelos estaban basados en el comportamiento elástico lineal de los materiales. Con la consideración de grandes desplazamientos y la utilización de la hipótesis de la viga columna de J. Bernoulli, Euler, utilizando estas hipótesis y la metodología variacional desarrollada por el mismo, resuelve, en 1744, el problema de la determinación de la carga de pandeo del pilar. Un siglo más tarde Kirchhoff obtiene, utilizando la expresión de la curvatura exacta, la trayectoria secundaria con una relación carga-desplazamiento creciente y, por tanto, con posiciones de equilibrio estable.

- A finales del siglo XIX aparecen distintos tipos de problemas no lineales que abren una nueva fase más realista en el estudio de pilares. En particular, considerando un comportamiento plástico de los materiales se obtienen dos cargas críticas de pandeo: la carga correspondiente al módulo tangente obtenida por Engesser, en 1889 y la carga correspondiente al módulo reducido de Considere, en 1891. La controversia entre las dos teorías se supera en 1947

con el trabajo de Shanley que demuestra la existencia de infinitos puntos de bifurcación entre la carga del módulo tangente y la carga de Euler.

- En un tercer periodo se consideran fenómenos reológicos, en el caso de fluencia viscoelástica, se tiene en cuenta que por debajo de un valor dado de la carga crítica la deformación está acotada y por encima crece indefinidamente mientras que en el caso de fluencia viscoplástica, para cada carga P existe un tiempo crítico a partir del cual la deformación crece sin límite. Junto a estos fenómenos, que tienen en cuenta el

comportamiento del material, se introducen nuevos modelos de vigas-columna en relación con el campo cinemático aprovechando los modelos de la viga de Timoshenko o la de Levinson. Además, todas estas situaciones se extienden a casos de grandes desplazamientos en dos y tres dimensiones (Crisfield y Felippa) y a la consideración de imperfecciones, línea iniciada por T. Young y que tiene una destacada aportación en los trabajos de Koiter. Finalmente, el desarrollo de la teoría de plasticidad ha hecho posible la incorporación de aspectos como el daño y la fractura de los materiales en la línea de Zdenek P. Bazant.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) BAZANT, Z. P. and CEDOLIN, L.: "Stability of Structures". Oxford University Press, 1991.
- (2) BATTINI J. M.: "Co-rotational beams elements in instability problem", Royal Institute of Technology. Ph. D. Stockholm 2002.
- (3) CHEN, W. F. and ATSUTA, T.: "Theory of Beam-Columns". Vols. 1, 2, McGraw-Hill, 1976.
- (4) CHEN, W. F. and LUI, E. M.: "Structural Stability. Theory and Implementation". Elsevier, 1987
- (5) CICHON, C.: "Large displacements in-plane analysis of elastic-plastic frame". Computers and Structures 19: 737-745. 1984.
- (6) CIMETIERE, A. and LEGER, A.: "Some problems about elastic-plastic post-buckling". Int. J. Solids Structures, 1996.
- (7) CONSIDERE, A.: "Résistance des pièces comprimées". Congrès International des procédés des constructions, París, Vol. 3. 1891.
- (8) CRISFIELD, M. A.: "Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures", V.1, John Wiley & Sons, 1991.
- (9) ENGESSER, F.: "Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe". Zeitschrift d. Arch.-u. Ing.-Ver. Zu Hannover. 1889.
- (10) HILL, R.: "A general theory of uniqueness and stability in elastoplastic solid". J. Mech Phys. Solids. 1958.
- (11) HUTCHINSON, J. W.: "Plastic Buckling". Advances in Appl. Mech. 1974.
- (12) KOITER, W. T.: "Post-buckling analysis of simple two bar frame". Recent progress in applied Mechanics. B. Broberg et al. (Folke Odqvist Volume). Almqvist and Wiksell, Sweden, p. 337.
- (13) LOVE, A. E. H.: "A treatise on the mathematical theory of elasticity". Dover publications. 1944
- (14) PARK, M. S. and LEE, B. C.: "Geometrically non-linear and elastoplastic three-dimensional shear flexible beam element of Von Mises-type hardening materia". Int J. Meth Engng, 39:383-408. 1996
- (15) PETRYK, J.: "The energy criteria of instability in time-independent inelastic solid". Arch Mech. 1991
- (16) ROORDA, J.: "Stability of structures with small imperfection". J. Eng. Mech. (ASCE), 91 (1): 87-106.
- (17) ROORDA, J. AND CHILVER, A. M.: "Frame buckling: an illustration of the perturbation technique". Int. J. Nonlinear mechanics, 5: 235-46.
- (18) SAINT VENANT, BARRE DE: "Historique abrégé des recherches sur la résistance et sur l'élasticité des corps solide". INTEMAC. 1972.
- (19) SHANLEY, F. R.: "Inelastic column Theor". J. Aero. Science. 1947.
- (20) TIMOSHENKO, S. P.: "Theory of bending, torsion and Buckling of Thin-Walled Member of Open Cross section". Journal Francklin Institute, Philadelphia. 1945.
- (21) TIMOSHENKO, S. P.: "History of Strength of Materials". Dover Publ. Inc., New York, 1953. También 1983.
- (22) TRUESDELL, C.: "Ensayos de historia de la Mecánica". Editorial Tecnos. 1975
- (23) VILLAGGIO, P.: "Mathematical models for Elastic Structures". Cambridge University Press. 1997.

* * *