

Cuestiones de práctica de Geometría y de Goniometría para el trazado de la orientación en los cenobios hispánicos (siglos IX-XII)

Practical questions of Geometry and Goniometry for the design of orientation in Hispanic monasteries (9th -12 th centuries)

Josep Lluís i Ginovart (*), Cinta Lluís-Teruel (**)

RESUMEN

La primera operación de un edificio sacro cristiano es su orientación. Las liturgias (s. IX-XII) determinan una alineación (E-O), la precisión de algunas iglesias, con Az muy próximo a 90° y con una altura del horizonte (ASS) $> 0^\circ$, indican la utilización de métodos geométricos, entre los que se encuentra el de Gisemundo (c.800) del monasterio de Ripoll (ACA 106), considerado más preciso que los vitruvianos por la sencillez de su trazado equinoccial. Pese a ello, hay implícitamente unos conocimientos goniométricos para determinar la proporción entre el gnomon y la sombra, relacionados con los *horologium pedum* (IX-XII) y los posteriores relojes de sol azimutales como el de Ripoll (ACA 225) (s. XI). Para la latitud de Gisemundo, su método, permite en los equinoccios, trazar con gran precisión el enfilamiento equinoccial, con un gnomon de proporción $[2/3]$, con una sombra $[1]$, próxima a las horas (III-IX).

Palabras clave: orientación; gnomon, Gisemundo; Ripoll; románico.

ABSTRACT

The first operation of a Christian holy building is its orientation. The liturgies (9th-12th centuries) determine an alignment (EO), the precision of some churches, with Az very close to 90° and with a horizon height (ASS) $> 0^\circ$, indicate the use of geometric methods, among which is Gisemundo's (c.800) of the monastery of Ripoll (ACA 106), considered more precise than the Vitruvians due to the simplicity of its equinoctial layout. Despite this, there is implicit goniometric knowledge to determine the proportion between the gnomon and the shadow, related to the horologium pedum (IX-XII) and the later azimuthal sundials such as Ripoll's (ACA 225) (11th century). For the latitude of Gisemundo, his method allows, at the equinoxes, to trace with great precision in the equinoctial line, with a gnomon of proportion $[2/3]$, with a shadow $[1]$, close to hours (III-IX).

Keywords: orientation; gnomon; Gisemundus; Ripoll; romanesque.

(*) Universitat Internacional de Catalunya, Barcelona (España).

Persona de contacto/Corresponding autor: jlluis@uic.es (Josep Lluís i Ginovart)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5957-762X> (J. Lluís); <http://orcid.org/0000-0002-5280-1147> (C. Lluís)

Cómo citar este artículo/Citation: Lluís i Ginovart, Josep; Lluís-Teruel, Cinta (2022). Cuestiones de práctica de Geometría y de Goniometría para el trazado de la orientación en los cenobios hispánicos (siglos IX-XII) *Informes de la Construcción*, 74(568): e465. <https://doi.org/10.3989/ic.90235>

Copyright: © 2022 CSIC. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

Recibido/Received: 01/07/2021
Aceptado/Accepted: 15/03/2022
Publicado on-line/Published on-line: 17/11/2022

1. INTRODUCCIÓN

Nicolas IV (1288-1292) reformó la primitiva fachada de Santa María la Mayor, en la que encargaba a Filippo Rusuti (c.1255-c.1325) la realización de unos mosaicos (1288-1292) donde se representaba al Papa Liberio (352-366) trazando sobre la nieve la planta de la basílica con la inscripción: *Virgo Maria apparuit PP Liberio dicens: fac mihi ecclesiam in monte Superagio sicut nix indicat* (1). Esta imagen que influyó decisivamente en el frontispicio de la obra de Paolo de Angelis (1580-1647), *Basilicae S. Mariae Majoris de Urbe, a Liberio Papa* (1621), representado la disposición del edificio sacro. (Figura 1).



Figura 1. Replanteo Santa María Mayor. Basilicae S. Mariae Majoris de Urbe, a Liberio Papa (1621). Paolo de Angelis.

La importancia de la bendición y posterior replanteo del espacio quedó reflejada en el *Ceremoniale Episcoporum*, en donde las estampas del *Pontificale Romanum* (1595) de Clemente VIII (1592-1605), referidas al *De benedictione & impositione primarii lapidis pro Ecclesia aedificanda*, representa las figuras del obispo, del diacono y del arquitecto como artífices principales de la ceremonia (Figura 2).



Figura 2. Bendición primera piedra de un edificio sacro. De benedictione & impositione primarii lapidis pro Ecclesia aedificanda (1595).

El rito de este simbolismo aparece ya en el *Historia Sancti Florentii Salmurensis*, referido a Geofredo Martel (1040-

1060), en que se relata la colocación de la cruz y la disposición de la orientación en iglesia del Castillo de Saint-Florent-le-Vieil (2).

La investigación recaba en la orientación de la edificación Sacra entre los siglos (IX-XII). Aunque existen diferentes criterios, para ellos, las liturgias prerrománicas y románicas determinan una alineación equinoccial (E-O). La exactitud de trazado de algunas iglesias, con un azimut (Az) muy próximo a 90° y con una altura del horizonte (ASS) > 0°, comporta que sea necesario el concurso y utilización de algún método geométrico (3) (Figura 3).

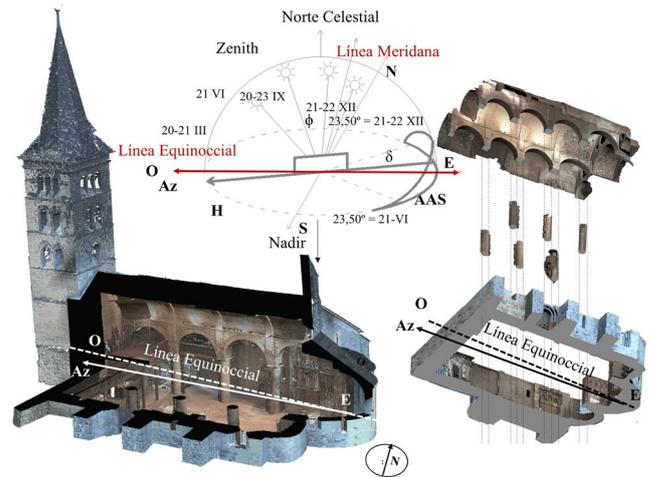


Figura 3. Orientación edificios sacros. Santa María de Arties, Az= 92, 12° ASS= 45, 80° ($\phi=42, 70$)°, imagen autores.

Uno de estos trazados es el *Ars gromatica Gisemundi* (c.800) (ACA 106) transcrito en el monasterio de Ripoll, es considerado un método más preciso que el de los vitruvianos, por las escasas operaciones geométricas que necesita (4). Pese a ello, hay implícitos unos conocimientos prácticos de goniometría, como la relación entre la altura del gnomon (L_g) y las sombras arrojadas (L_s), que están relacionados con los *horologium pedum* conocidos en otros cenobios hispanos (s. IX-XI). La precisión de la orientación tiene que ver, además, con el ángulo horario (ω) que forman las sobras meridianas y postmeridianas, relacionadas con los relojes de sol azimutales, como es el caso del de Ripoll (ACA 225) (s. XI), que la investigación desarrolla.

1.1. La primitiva orientación para la oración

Simbólicamente el Oriente es la fuente de la luz, la dirección de Jerusalén es el significado del Paraíso como “Luz del mundo” (Malaquías 4:2, Lucas 1:78, Juan 8:12). Oriente será el lugar de donde vendrá el Redentor para juzgar a la humanidad. Según mandan las *Constituciones Apostólicas* (Const. Apost., II, 7) (c. 380) redactadas por los apóstoles y transmitidas a través de Clemente de Roma (+97), el lugar de reunión y comunión debe mirar a Oriente (5). En el *Apologeticus* (197) de Tertuliano (c. 160-c. 220) dice que los cristianos oran hacia oriente (16, 9-11) (6). Las primeras referencias en cuanto a la disposición para ejercer el rezo vienen de Orígenes Adamantius (185-254) en el tratado *De Oratione* (c.233-234) prescribe la oración orientada al Este (7). Antes de la construcción de las basílicas paleocristianas, las actas de los magistrados Hiparco (+297) y Filoteo (+297), víctimas de Maximiano

(250-310), cuentan que en su casa existía un espacio reservado para la oración, en cuya pared había pintada una cruz para marcar el Oriente (8). Pese ello las primeras basílicas se construyen sobre preexistencias, careciendo de criterio para la orientación. Así, San Juan Letrán (9-XI-324) se sitúa sobre asentamientos militares, San Pablo Extramuros (18-XI-324) en la base un cementerio cercano al Tíber (Figura 4).



Figura 4. Basílicas de San Juan de Letrán, San Pablo extramuros, San Pedro Vaticano y Santa María la Mayor (Google Earth Pro).

La Basílica Constantiniana de San Pedro (c. 326) tomará la orientación del circo de Nerón (9) (Figura 5) y Santa María la Mayor (5-VIII-358-) la topografía y edificaciones existentes en el monte Esquilino, todas ellas con ábsides hacia el Oeste.

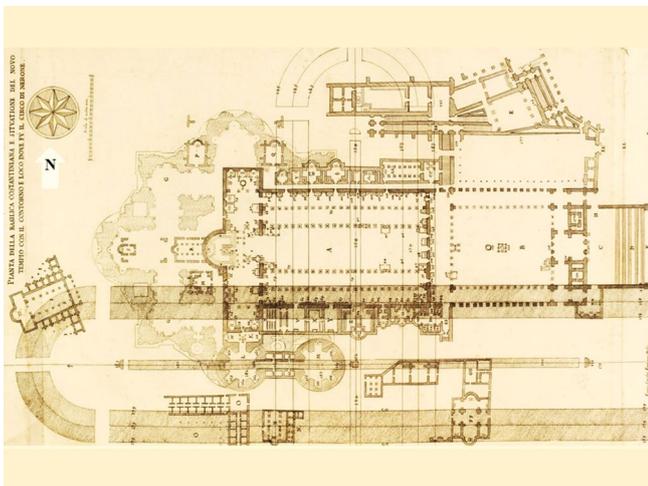


Figura 5. Superposición Basílica de San Pedro la de Constantino y Circo de Nerón. Il Tempio Vaticano e sua origine. (1694). Carlo Fontana.

En las primeras construcciones sacras sobre nuevos espacios, los ábsides se orientan hacia Poniente. Así se demuestra en San Félix en Nole construido por Paulin de Nole (353- 431), y en la iglesia edificada en 472 en Lyon citada por Sidoine Apollinaire (430-486) (10).

San Isidoro de Sevilla (c. 556-636), en el *Originum sive etymologiarum libri viginti* (c.630) define que *De aedificiis sacris* deben de estar alineados en dirección al oriente equinoccial (*Etym.* L XV. iii, iv) (11). También lo hará Rabano Mauro

(c. 776-856) en su *De Universo libri viginti duo* (c.844), *orientem expectabant æquinocialem* (*De. Uni.* L XIV. XXI) (12). La orientación de las iglesias fue evolucionando: desde una orientación de los ábsides a Poniente, hacia unos ábsides al Este; y desde una posición alineada del altar y la sede sobre el eje central de la iglesia, hacia una traslación de la sede hacia la epístola.

1.2. Las orientaciones sacras de los siglos IX-XII

El estudio de las orientaciones y de la arqueoastronomía cristiana ha revelado que, existen casos de iglesias mozárabes, prerrománicas o románicas, que no están orientadas en el eje Este-Oeste, estableciendo diferentes criterios para su trazado.

El criterio canónico, de acuerdo con los tratados litúrgicos de los siglos IX-XIII, sitúa los ábsides de Este a Oeste, heredando la tradición romana como indica M. Delcor (1987) (13). El del calendario Pascual, supone iglesias orientadas en la festividad de Pascua del año de su construcción, como señalan G. Romano (1997) (14) o S.C. McCluskey (1998) (15). El del calendario Litúrgico, donde la iglesia se orienta según W. Johnson (1912) (16), H. Benson (1956) (17) y E. Spinazzè (2016) (18) al día de la festividad a que iba a ser dedicada la construcción. El criterio topográfico supone la orientación de la iglesia ligada a su entorno geográfico propuesto por A.B. Knapp y W. Ashmore (1999) (19) y A. Sassin (2016) (20). El constructivo fijado por la adecuación de las necesidades constructivas propuestas por J Pérez Valcárcel y V. Pérez Palmero (2019) (21).

1.3. La orientación canónica

La orientación con el ábside dispuesto hacia el Este se impuso con el influjo de las principales liturgias de la época basadas en el *Liber officialis* (820-826) de Amalario de Metz (c.780-851) (22) que inspirará a los principales cánones románicos de Ruperto de Deutz (c. 1075-1129) con su *Liber de divinis officiis* (1120) (23).

Las consideraciones se establecen en el *Gemma animae* (c.1120) de Honorio de Autun (1080-c.1153), en la *ecclesiae ad orientem vertuntur ubi sol oritur* (*Gem. Ani. I, 129, De situ ecclesiae*) (24), en el *Mitralis de Officio* (1190) de Suardo, obispo de Cremona (1185-1215), *Ad orientem, id est, ortum solis æquinocialem* (*Mitra. I, 2, De fundatione ecclesiae*) (25), en el tratado de Jean Beleth (fl. 1135-1182) del *Rationale divinarum officiorum*, (c.1150), es especificada en el *Versus sim orientem, hoc est, versus solis ortum æquinocialem* (*Ration. cap. II, De loco*) (26).

La determinación de la orientación Este Oeste ($Az = 90^\circ$) es posible, si se visualiza el horizonte el orto solar en los equinoccios ($ASS = 0^\circ$). De lo contrario cuando la altura del horizonte ($ASS > 0^\circ$), se va a necesitar el concurso de alguno de los métodos geométricos conocidos en el mundo tardo clásico (Figura 6).

2. LAS FUENTES DIRECTAS DE LOS CENOBIOS BAJOMEDIEVALES

Existe la evidencia del conocimiento por parte de clérigos y laicos de la *De architectura* (c.15 aC) de Marcos Vitruvio Polión (c.80-c.20 aC), y aunque han existido intentos de buscar



Figura 6. Orientación de Sant Andreu de Salardú, equinoccio (2018), 8:45 h. GTM (Google Earth Pro). Imagen autores.

la influencia directa de Vitruvio en la arquitectura medieval, está muy cuestionada (27), y su uso generalizado no se realizará hasta el descubrimiento del código Poggio en el monasterio de San Gallen hacia (1415) por Gian Francesco Poggio Bracciolini (1380-1459). Vitruvio es conocido por los 132 códices hasta el siglo XV, en la actualidad conservados (28). El arquitecto palatino Eginardo (770-840) que edifica un arco de triunfo para el monasterio de Maestrich, aconseja comprenderlo e interpretarlo en sus *Epistolae* (29). Las *Constitutio* de York (926) promulgan el estudio de Euclides y Vitruvio (30). Por otra parte, el obispo Oswald de Morchester (912-992) acudía a la geometría para la fundación de la abadía de Ramsey (969) (31). También lo hace el obispo Bernward de Hildesheim (993-1022), que citando a Vitruvio, construyó la iglesia abacial de San Miguel (1001-1031) (32). Reconocido por Riquero de Reims (c. 940-998) *Historiae* (CXXXVIII 107), *secundum Vitruvii atque Boetii*, por Hucbaldo de San Amado (840-930) *De harmonica institutione* (CXXXII 946), *Ut Vitruvius dixit in libro de Architectura*; Hugo de San Victor (1096-1141) *Eruditio Didascalica* (CLXXVI 765), *Palladius quoque De agricultura scripsit; Vitruvius autem De architectura*, Pedro Dácono de Montecasino (1107-1140), *De viris illustribus Cassinensibus* (CLXXIII 1048), *Vitruvium de Architectura mundi abbreviavit* o Vicente de Beauvais (c.1194-1264) en el *Speculum naturale* (XXVIII 2), *Vitruvius in libro tertio de architectural Corpus hominis ita natura composuit* (33), Vitruvio era ampliamente reconocido.

En relación con la orientación, Vitruvio describe dos métodos para poderla determinar, aquella meridiana de Norte a Sud (*Vitr, LI.VI.6*) y la equinoccial de Este a Oeste (*Vitr, LIX.VII.4*).

Reclama, a su vez, saber astronomía y conocer el uso del *gnomon* para determinar los equinoccios y solsticios (*Vitr, L.I*). Vitruvio definió así mismo la construcción de relojes solares (*Vitr, L.IX, 7*). Marco Cetio Faventino recoge la tradición de la construcción de relojes, definiendo el de doble hacha o plecino y el semicircular o de cuadrante (*Fave. XXIX*)

La experiencia de las fuentes gromáticas, y su transmisión medieval en los cenobios permiten fijar otras fuentes directas. Higinio Gromático (fl. 98-102), en *De limitibus constituendi* (La. 166-208) determina los ejes del curso del sol, E-O y el eje del mundo N-S, cuyo origen está en la tradición

Etrusca, y que se realizaba a partir del punto por el que se producía la salida del sol el día de la fundación de la ciudad, que coincidía a menudo con el *Die Natalis* de su fundador (34). En los *De limitibus*, Frontino (c. 30-104) (La. 26-33) se enfrenta a la orientación de los ejes meridianos, menciona las referencias históricas (III.1) y los errores inducidos (III.5, III.12), pero no hay ninguna descripción que determine la línea meridiana (35). En otros casos la orientación equinoccial, apoyada en la práctica de divisiones parcelarias rurales, son aplicables al replanteo de los castros o de las ciudades de nueva creación con la técnica del *varatio* (36) de Marcus Iunius Nipsius (f. 200), descrita en el *Fluminis varatio* (La. 285) y *Limitis repositio* (La. 286-295).

2.1 Métodos geométricos de traza de orientaciones

El trazado y precisión de las orientaciones de las edificaciones sacras *ad orientem vertuntur ubi sol oritur* se basan en métodos geométricos y de observación. Trazan, o bien la línea meridiana N-S y después la de E-O, o bien directamente la equinoccial E-O.

Se establecen como precedente los de Vitruvio, estudiados por Moritz Benedikt Cantor (1829-1920) (37). El método (M_1) (*Vitr, LI.VI.6*) que determina la orientación meridiana a través de dos sombras y cuya ejecución necesita de seis operaciones geométricas (Figura 7), y el método (M_2), (*Vitr, LIX.VII.4*), que determina una orientación equinoccial a través de tres sombras y cuya ejecución necesita de quince operaciones geométricas.

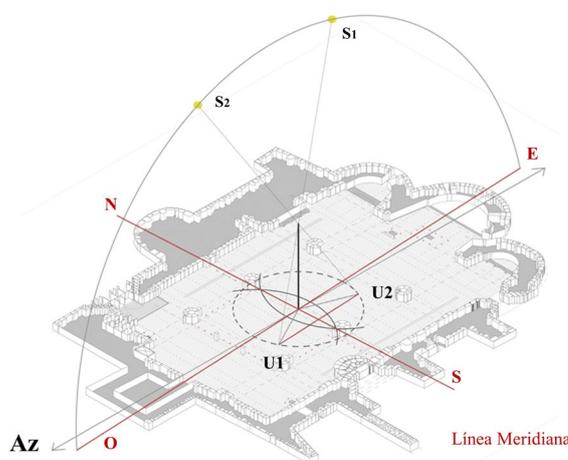


Figura 7. De architectura (c.15 aC), Marco Vitruvio Polión. Método (M_1) con orientación meridiana. Imagen autores.

Otras técnicas son las fuentes del *De limitibus constituendi* (La. 166-208) (38) de Higinio Gromático a las que se refiere Oswald Ashton Wentworth Dilke (1915-1993) (39). El método (M_3) (La. 108-112) determina la meridiana mediante la observación de la *hora prima* y de máxima altura solar durante la *hora sexta* en él (M_4) (La. 188) (40). El sistema (M_5) (La. 188-189), determina una orientación meridiana mediante dos sombras y su ejecución necesita de seis operaciones geométricas, es similar al (M_1) de Vitruvio, como lo es él (M_6) (La. 189-191) donde se determina una orientación equinoccial mediante quince operaciones, similar al (M_2) (41).

Se conocen las técnicas del *Ars gromatica siue geometría Gismundi* (c.800), cuyo procedimiento se basa en la sombra y

su traslación sobre una circunferencia de referencia, de esta manera, se determina una orientación equinoccial a través de dos sombras, con cuatro operaciones geométricas (M_7) (Figura 8). El método (M_8) determina una orientación equinoccial mediante dos sombras muy próximas y cercanas al mediodía, la ejecución de su trazado necesita de dos operaciones geométricas (42).

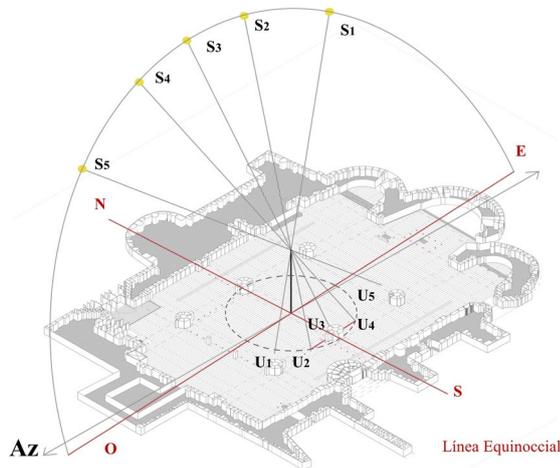


Figura 8. Ars gromatica, Gisemundo (c.800). Metodo (M8), orientación equinoccial. Imagen autores.

Los métodos procedentes de la obra apócrifa de Gerberto de la *Geometria Incerti Auctoris* (c.1000), son el (M_9) similar al (M_1) de Vitruvio y al (M_5) de Higinio Gromático y el método (M_{10}) similar al (M_2) y al (M_6). (43). Finalmente cabe plantear la hipótesis de la utilización de la brújula (M_{11}), documentada en la Europa del siglo XII (44).

De los once métodos descritos anteriormente se basan tanto en la observación solar directa como en sistemas operativos a partir de la observación de sombras, los que son geométricamente más sencillos porque necesitan menos operaciones y movimientos gráficos son los (M_7) y (M_8) de Gisemundo (Tabla 1).

2.2. Ars gromatica siue geometria Gisemundi

Rudolf Beer (1863-1913) dio la primera referencia del *Ars gromatica Gisemundi* en *Die Handschriften des Klosters Santa Maria de Ripoll, I* (1907), reconociendo la singularidad de este tratado de agrimensura (fol. 76-86) (45) y difundido en el Boletín de la Real Academia de Buenas Letras de Barcelona (1910) (46). Pero fue Carl Olof Thulin (1871-1921) quien lo introdujo dentro del *Corpus agrimensorum Romanorum* (47), y fue estudiado y editado por Josep Maria Millàs Vallicrosa (1897-1970) (48).

Del *Ars gromatica Gisemundi*, cuyos orígenes codicológicos se sitúan en la geometría de Pseudoboecio (s. VIII), se conservan dos copias: el *Codex Parisinus* BN 8812 (c. 800-833) de la Francia meridional (110/097) y el *Codex Riuipullensis* 106 (c. 850-900) del cenobio de Ripoll (118/096) (49). Su parte introductoria remite a la *Demonstratio artis geometricae* de Pseudoboecio y a unas excerptas del *De limitibus* de Higinio Gromático (50) y del *Corpus Agrimensorum Romanorum*, en donde aparece la metodología de la orientación (fol.77r25-77v 10) (51).

El códice *Ripollensis* de Gisemundo contiene trazos de escritura visigótica. Se ha identificado la labor de un agrimensor altomedieval de fuentes cercanas a Higinio Gromático que, lejos de ser un mero copista, conocía los fundamentos de esta disciplina tanto a nivel teórico como práctico (52). Dentro de este contexto, el método M_7 es profundamente práctico, las cinco sombras observadas trazan figuradamente la analema del curso solar. Parte de una construcción geométrica de tan solo dos principios básicos: el trazado de una circunferencia y disponer de un gnomon escuadrado sobre el plano donde se ha situado la circunferencia marcando directamente la línea equinoccial, pudiendo replantear directamente el edificio sacro mediante la operación conocida como *extendere lineam* (Figura 9).

El artífice, traza la circunferencia a primera hora de la mañana, con un diámetro menor que la sombra que arroja el gnomon de longitud L_g en aquel momento (U_1), es la primera operación geométrica a realizar. Luego observa y marca los puntos donde la sombra coincide con la circunferencia (U_2), y

Tabla 1. Métodos de trazados de la orientación.

Tipo orientaciones y tolerancia en los métodos de trazado						
Método	Autor	Tipo orientación	Tipo trazado	Características	Operaciones geométricas	Error (max) =0,92%
M1	Vitruvio	Meridiana	Instrumental	2 sombras	6	0,15
M2	Vitruvio	Equinoccial	Instrumental	3 sombras	15	0,06
M3	Higinio Gromatico	Meridiana	Observación	Hora pima	-	-
M4	Higinio Gromatico	Equinoccial	Observación	Hora sexta	-	-
M5	Higinio Gromatico	Meridiano	Instrumental	2 sombras	6	0,15
M6	Higinio Gromatico	Equinoccial	Instrumental	3 sombras	15	0,06
M7	Gisemundo	Equinoccial	Instrumental	2 sombras	4	0,23
M8	Gisemundo	Equinoccial	Instrumental	2 sombras	2	0,46
M9	Apocrifo de Gerberto	Meridiana	Instrumental	2 sombras	6	0,15
M10	Apocrifo de Gerberto	Equinoccial	Instrumental	3 sombras	15	0,06
M11	Brújula	Meridiana	Observación	Brújula	-	-

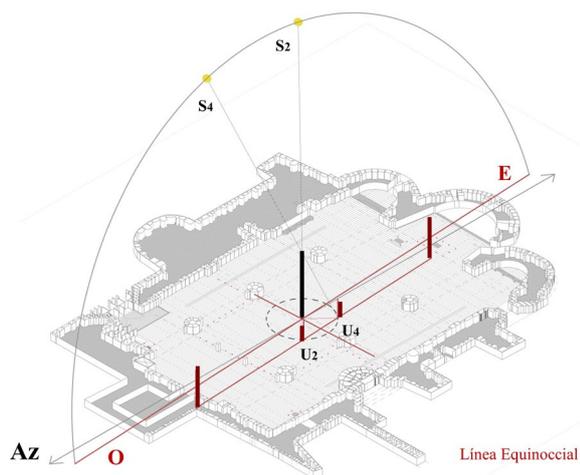


Figura 9. Ars gromatica(c.800), Gisemundo. Método (M7) orientación equinoccial, ecclesia ad orientem. Imagen autores.

espera a que la trayectoria del sol se acerque a la base del gnomon (U_3). Posteriormente, volverá a marcar el punto donde el extremo de la sombra vuelve a coincidir con la circunferencia (U_4), y así, uniendo los puntos (2-4), ya obtiene la orientación E-O, sin necesidad de utilizar la última sombra más alargada (U_5). La construcción M_7 del *Ars gromatica Gisemundi* (c.800) es eminentemente práctica y derivada de la experiencia gromática y de los métodos (M_6) y vitruviana ($M1$), pero opera y alinea los edificios con mayor facilidad y precisión. Para el replanteo final necesitará, después de realizar *extendere lineam*, una nueva operación mediante *pertice aequilae ad perpendicularum*, con un plomo y una escuadra (Figura 10).

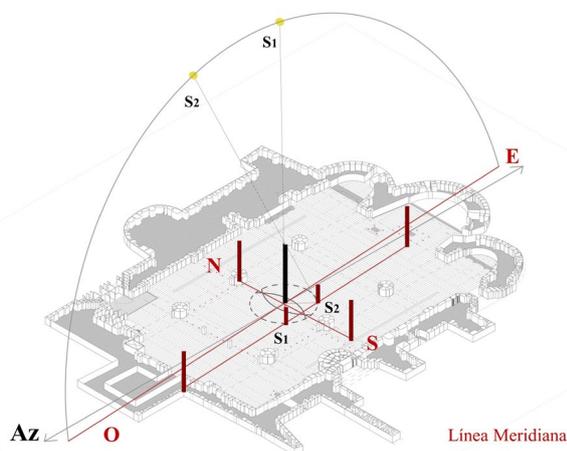


Figura 10. Replanteo con jalones de una fábrica sacra de los Métodos (M1) de Vitruvio y (M5) de Higinio Gromático. Imagen autores.

3. GONIOMETRÍA PRÁCTICA EN EL CENOBIO DE RIPOLL

El conocimiento científico tardo clásico se recoge en el *scriptorio* del cenobio de Ripoll, en el *Ars gromatica* de Gisemundo ACA 106, y en el ACA 225 del siglo XI, ambos relacionados con la obra apócrifa de Gerberto de Aurillac (938-1003), el Papa matemático (999-1003), formado en el año 986 en Vic por el obispo Ató (957-971), difusor en el año mil de estos conocimientos.

Pese a que el trazado geométrico de Gisemundo, el método (M_8), dispone solo de dos operaciones geométricas, al tratarse de puntos muy próximos entre sí, próximo a la hora sexta, la alineación de las sombras (U_1-U_2) puede tener más error que el (M_7), ya que permite trazar una alineación con dos puntos más alejados entre sí (U_2-U_4) con un mejor enfilamiento y precisión de orientación. El método (M_7), geoméricamente, es también muy elemental, ya que solo necesita del trazado de una circunferencia y de la observación del transcurso solar en cinco puntos (U_1-U_5), pero necesita de ciertos conceptos básicos de base goniométrica para determinar su utilidad y precisión de trazado óptimo a través de las sombras (U_2-U_4).

En primer lugar, habrá que conocer la relación entre la altura del gnomon (L_g) y su sombra (L_u) que es el radio de la circunferencia, y donde las sombras proyectadas puedan ser intersecadas sobre ella. De esta relación dependerá la época del año en que este método (M_7) pueda utilizarse. La sombra de un gnomon se determina mediante la altura del sol (H_s) [1], en función de la latitud (φ) y de la declinación astronómica (δ):

$$[1] H_s = 90^\circ - \varphi + \delta$$

Para determinar (δ) [2] se puede utilizar la fórmula de Spencer:

$$[2] (\delta) = 0.006918 - 0.399912 \cos \Gamma + 0.070257 \sin \Gamma - 0.006758 \cos 2\Gamma + 0.0000907 \sin 2\Gamma - 0.002697 \cos 3\Gamma + 0.00148 \sin 3\Gamma$$

$$\Gamma = 2\pi \frac{J-1}{365}$$

siendo J el número de orden del día del año

En función del ángulo horario (h) se puede determinar la elevación solar (θ_s) [3] en una hora del día mediante la expresión:

$$[3] \sin \theta_s = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos h \cdot \cos \delta$$

Una consecuencia práctica de la proyección de las sombras son los llamados relojes de pies de Rutilio Tauro Emiliano Paladio (s. IV). Estos, se expresan mediante tablas con relación entre la sombra de una persona, referida a la hora canónica y con respecto a los meses del año. En Ripoll se conserva un *Excerpta* de *De temporum ratione* de Beda el Venerable (c. 672- 735) en el ACA 225, ff. 39v-64v que desarrolla cuestiones similares en la apócrifa obra del *Libellus de Mensura Horologii* en el *Concordia XII mensium* (53).

Por otra parte, la precisión va a depender de la distancia que exista entre las sombras cuando se intersequen con la circunferencia ($U_2=U_4$). Cuanto más alejados estén estos puntos, mayor precisión para la alineación, y esto se produce cuando el ángulo entre sombras (ω) es más cercano a 180° , y referidas al ángulo horario (h) próximo al intervalo $(+45^\circ)-(-45^\circ)$. Un ejemplo práctico de estas proyecciones referidas al método (M_7), es el reloj de sol azimutal donde el gnomon no está paralelo al eje del mundo como en los relojes que se basan en el cuadrante ecuatorial, sino que el gnomon está colocado verticalmente y perpendicular al suelo, y donde las horas se definen por la proyección de la sombra, de acuerdo con la altura del Sol en la bóveda celeste, y por el ángulo medido en el horizonte, descrito en el código ripollense (ACA 225), ff. 94r-97r.

3.1. La proporción sombra altura gnomon

La proporción de la sombra de un cuerpo respecto (L_u) respecto a la altura de un gnomon (L_g), se determina mediante la expresión del ángulo θ_s [4];

$$[4] \tan \theta_s = L_g / L_u$$

Una forma práctica era conocida de la tradición tardo clásica a través de la sombra de una persona tabulada por Rutilio Tauro Emiliano Paladio (s. IV) al final de los libros (II-XIII) *De re rustica* (54).

No existe ni en los códices ni en las ediciones de la obra una referencia exacta de una relación entre el *mentor* y su *umbra* en *pedes*. En la edición de Paladio de Désiré Nisard (1806-1888), atribuye la posibilidad de que la obra fuera escrita en la Galia (55). En los estudios astronómicos, Otto Neugebauer (1899-1990), sitúa esta proporción entre 6:1 y 7:1. (56). Por otra parte, Jonathan Roth (1955-) refiriéndose a las Regulaciones Imperiales, sugiere que la altura mínima de los reclutas es de (5+5/12) de pies romanos y le atribuye una magnitud de 165 cm (57). Desde el punto de vista metrológico y de proporcionalidad, Vitruvio (*Vitr*, LIII.5) establece la relación 6:1, dice; *por haber advertido que el pie del hombre era la sexta parte de su altura; y que el codo constaba de seis palmos, a saber, 24 dedos* (58).

Metodológicamente, y ante las diferencias numéricas de medida y proporción, para determinar la dimensionalidad entre la altura del observador y la del pie, tomaremos un sistema de la proporcionalidad en el intervalo [5,42 /6/ 7], de manera que la proporción entre el cuerpo humano y su sombra sea fácilmente observable por el *mentor*. Con ello se pretende así generalizar para el uso de la misma relación en el gnomon (L_g) y su sombra (L_u). Podemos determinar en forma de tabla la sombra en pies en función de la hora canónica y el mes, así como los diferentes resultados de la proporcionalidad entre la altura del *mentor* (M_c) y la *umbra* proyectada (U_p), en el caso de Paladio (Tabla 2).

En el intervalo proporcional de la tabla 2 de Paladio, la sombra más corta y alargada respecto al cuerpo humano está entre [0,29-5,35], próximo a la proporción humana [(1/3)-5+(1/3)], donde (1/3) es la distancia entre el pecho y la cabeza.

De este tipo de tablas horaria tenemos fuentes directas en laudas y sillares de algunas iglesias cristianas. Una referencia cronológicamente cercana a la obra de Paladio es la tableta de piedra con un reloj de sol de pies, aunque incompleto, de la basílica de Ammaedara (c. 550) en la ciudadela justiniana de Haïdra (Túnez). Realizada bajo el pontificado del obispo Jacinto de Ammaedara, del que se han conservado una parte de los meses abril/septiembre, mayo/agosto y junio/julio. En su reconstrucción, las sombras se acortan para las horas de enero/diciembre (27-7) y febrero/noviembre (26-6) (59), estando dispuesta para una latitud ($\varphi=35, 56^\circ$), el intervalo [0,29-4,98] está próximo a la proporción humana [(1/3)-5].

Otro de estos ejemplos es reloj de sol de pies es el existente San Pedro de la Nave (1930). La iglesia fue trasladada del embalse de Ricobayo por Alejandro Ferrant (1897-1976). La tabla grabada sobre un sillar de (0,72 m. ancho x 0,42 m. alto), tiene una cronología y procedencia incierta, y cuya datación epigráfica se sitúa entre los siglos (VII-IX) (60). En la tabla inconclusa aparecen los meses de enero/diciembre (28-8), y febrero/noviembre (27/07), con unas sombras algo más cortas que las de Paladio. Para su ubicación actual ($\varphi=41, 58^\circ$), el intervalo [0,29-5,17], está próximo a la proporción antropométrica de [(1/3)-5+1/6].

La obra de Paladio fue matizada por otras tablas en función de la latitud del lugar del observador, y acomodada a la necesidad y utilidad de las horas canónicas de los monasterios benedictinos bajo la *Regula Sancti Benedicti* (529) de Benito de Nursia (480-543), y de los que se conservan unos sesenta códices en los cenobios o catedrales del medioevo latino.

La adaptación geográfica de estos relojes de pie, como las diferentes fuentes, autores y copias de estos códex, han provocado una clasificación sistemática: Los de la serie A, modelo

Tabla 2. Horologio de Rutilio Tauro Emiliano Paladio (s. IV)

Rutilio Tauro Emiliano Paladio (s. IV)													
hora	Calendario meses							Me/Up 6:1					
	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
I-XI	29	27	25	24	23	22	10	4,83	4,50	4,17	4,00	3,83	3,67
II-X	19	17	15	14	13	12	3	3,17	2,83	2,50	2,33	2,17	2,00
III-IX	16	14	12	11	10	9	4	2,67	2,33	2,00	1,83	1,67	1,50
IV-VIII	12	10	8	7	6	5	2	2,00	1,67	1,33	1,17	1,00	0,83
V-VII	10	8	6	5	4	3	1	1,67	1,33	1,00	0,83	0,67	0,50
VI	9	7	5	4	3	2		1,50	1,17	0,83	0,67	0,50	0,33
	2	2	1	1	1								
	Me/Up 5,42:1							Me/Up 7:1					
I-XI	5,35	4,98	4,61	4,43	4,24	4,06		4,14	3,86	3,57	3,43	3,29	3,14
II-X	3,51	3,14	2,77	2,58	2,40	2,21		2,71	2,43	2,14	2,00	1,86	1,71
III-IX	2,95	2,58	2,21	2,03	1,85	1,66		2,29	2,00	1,71	1,57	1,43	1,29
IV-VIII	2,21	1,85	1,48	1,29	1,11	0,92		1,71	1,43	1,14	1,00	0,86	0,71
V-VII	1,85	1,48	1,11	0,92	0,74	0,55		1,43	1,14	0,86	0,71	0,57	0,43
VI	1,66	1,29	0,92	0,74	0,55	0,37		1,29	1,00	0,71	0,57	0,43	0,29

de Aachen, bajo la obra del benedictino Wandalbertus de Prüm (c.813-870); lose B, modelo de Flavigny; los clasificados como C, modelo Abadía de San. Gallen, hasta con seis variantes (C₁, C_{1,5}, C₂, C_C, C_L, C_S), bajo el influjo de Beda Venerable (c. 672- 735); los códices mozárabes serie D (61), a los que se han añadido como E los de Palladio (62).

En la península ibérica existen hasta doce códices descritos como hispánicos (63) en centros monacales como San Martín de Albelda (φ=42, 66°) con el *Codex Albeldense Vigilanus* (c. 976), San Millán de la Cogolla (φ=42, 36°) con el *Codex Aemilianensis* (c.992), Santo Domingo de Silos (φ=41, 96°) con *Liber Ordinum* (c.1052). Se añade el antifonario de la catedral de León (c. 950) (φ=42, 60°), el de la catedral de Burgo de Osma (s.XI-XII) (φ=41, 59°), así como una copia del Fuero Juzgo (1058) conservado en el VITR/14/5 Biblioteca Nacional de España (Figura 11).

Estos códices tienen su representación en las tablas de sombras, con un rango [0,29-5,17], donde la porción del solsticio de verano es la misma que en el de Palladio, mientras que la de invierno sería menos alargada. Para la latitud promedio de los códices de tradición mozárabe (φ=42°), la proporción humana [(1/3)-5+1/6], coincidente con el *Horologio* de San Pedro de la Nave. Así en los códices hispánicos la proporción del gnomon tendría como mínimo la sección [1 / (5+1/6)] (Tabla 3).

El conjunto del resto de variantes de los códices de *horologium pedum* conservados series A, B, C, tienen también representaciones en forma de tablas (Figura 12)

Si analizamos el conjunto de las tablas de los códices para el intervalo determinado, para las sombras máximas producidas en el mes de enero-diciembre y hora prima (E-(I-XI), y las sombras mínimas, en junio-julio y hora sexta (J-(VI), según la *concordia mesium*, se obtiene un resultado de [0,29-5,90] (Tabla 4). Las sobras mínimas no afectan a la proporción para determinar (L_u) respecto a la altura de un gnomon (L_g), pero si las más largas. Las tablas de los relojes de pie nos dan una relación para determinar el gnomon de [1/6],

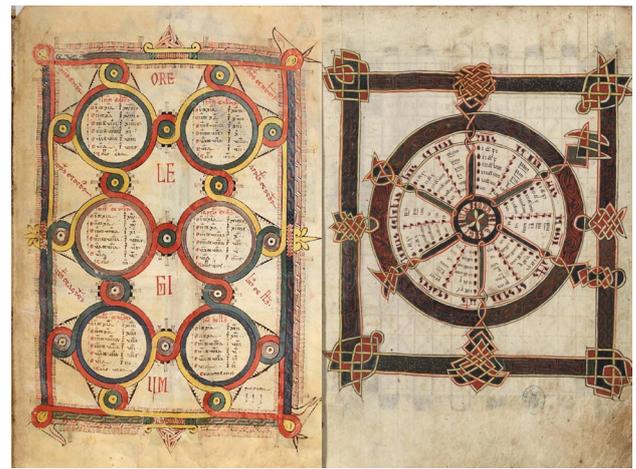


Figura 11. Códices hispánicos de relojes de pie, a) Paris, BnF Lat. 2171, f. 23r. (s.X) Vaticano, b) Madrid, BNE, VITR/14/5, p. 21(1058).

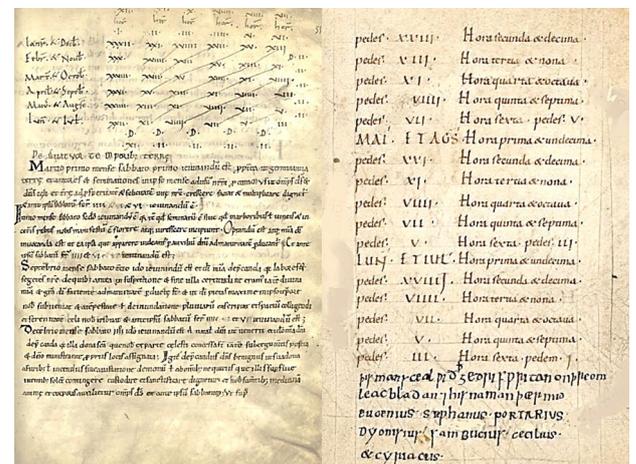


Figura 12. Horologium pedum, a) Códices A. Madrid, BNE, Mss/3307, códice de Metz, f. 51 r (c. 828-850), b) Códices C, Vaticano, Bibl. Apost. Vat.Reg.lat.338 f.91 5 (s. IX).

Tabla 3. Horologium pedum códices hispánicos.

Horologium Mozarabe (VII-XI)													
hora	Calendario meses							Me/Up 6:1					
	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
I-XI	28	27	25	24	23	22	10	4,67	4,50	4,17	4,00	3,83	3,67
II-X	18	17	15	14	13	12	4	3,00	2,83	2,50	2,33	2,17	2,00
III-IX	14	13	11	10	9	8	3	2,33	2,17	1,83	1,67	1,50	1,33
IV-VIII	11	10	8	7	6	5	2	1,83	1,67	1,33	1,17	1,00	0,83
V-VII	9	8	6	5	4	3	1	1,50	1,33	1,00	0,83	0,67	0,50
VI	8	7	5	4	3	2		1,33	1,17	0,83	0,67	0,50	0,33
	1	2	1	1	1								
Me/Up 5,42:1													
I-XI	5,17	4,98	4,61	4,43	4,24	4,06		4,00	3,86	3,57	3,43	3,29	3,14
II-X	3,32	3,14	2,77	2,58	2,40	2,21		2,57	2,43	2,14	2,00	1,86	1,71
III-IX	2,58	2,40	2,03	1,85	1,66	1,48		2,00	1,86	1,57	1,43	1,29	1,14
IV-VIII	2,03	1,85	1,48	1,29	1,11	0,92		1,57	1,43	1,14	1,00	0,86	0,71
V-VII	1,66	1,48	1,11	0,92	0,74	0,55		1,29	1,14	0,86	0,71	0,57	0,43
VI	1,48	1,29	0,92	0,74	0,55	0,37		1,14	1,00	0,71	0,57	0,43	0,29
Me/Up 7:1													
I-XI	5,17	4,98	4,61	4,43	4,24	4,06		4,00	3,86	3,57	3,43	3,29	3,14
II-X	3,32	3,14	2,77	2,58	2,40	2,21		2,57	2,43	2,14	2,00	1,86	1,71
III-IX	2,58	2,40	2,03	1,85	1,66	1,48		2,00	1,86	1,57	1,43	1,29	1,14
IV-VIII	2,03	1,85	1,48	1,29	1,11	0,92		1,57	1,43	1,14	1,00	0,86	0,71
V-VII	1,66	1,48	1,11	0,92	0,74	0,55		1,29	1,14	0,86	0,71	0,57	0,43
VI	1,48	1,29	0,92	0,74	0,55	0,37		1,14	1,00	0,71	0,57	0,43	0,29

con ella se podría cubrir la utilidad para todas sus latitudes del imperio romano Imperio romano época de Vitruvio, $\varphi = [23 + 1/4^{\circ} - 53 + 1/4^{\circ}]$.

3.2. La proyección horizontal de la sombra

La observación de la trayectoria solar y la descripción sobre un plano horizontal del método (M_7) de Gisemundo, (c.800), tiene la misma base que los relojes de sol azimutales. La epístola de Gerberto al *Fratri Adae* (998) (64), conocida como *Epistola de horologiis duorum climatum ad fratrem Adam*, es la primera referencia directa a este tipo de relojes, y cuya tipología se ha conservado en escasos códices latinos de los siglos (XI-XIII) (65)(Figura 13), algo posteriores a la obra de Gisemundo y entre ellos, el más antiguo, el (ACA 225), ff. 94r-97r (s. XI) (66).

El códice de Ripoll dispone de la construcción de dos modelos del reloj de azimutales para una duración del día entre 9 y 15 horas y trazados sobre una piedra plana (67). El primero RIP₁ construido por seis circunferencias concéntricas, y descritos desde el interior, con los meses (junio-julio) con una duración de 15 h, hasta el círculo exterior (enero-diciembre) con solo 10 h. El segundo RIP₂,

dispone siete círculos, el primero del mes de junio, con 15 h.; el segundo (mayo - julio) 14 h; hasta el séptimo de diciembre con 9h, dividiendo las figuras en ambos casos por la con una línea meridiana. Esta línea le permitirá orientar el instrumento con la ayuda del *horóscopo*, o la estrella Polar. La metodología gráfica consiste dividir el día del mes representado en 24 partes, y donde se elige en el RIP₁ el círculo C_{1,1} marcando horas H₁₁ = 15, en el caso del RIP₂ el círculo C_{2,7}, H_{2,7} = 9. El trazado necesita de ciertas habilidades geométricas y aritméticas puesto que se han de dividir los arcos de circunferencias, es sus respectivas horas. Así el Arc_{1,1} H₁₁ = 15, en 15 partes, el Arc_{2,7} H_{2,7} = 9 en nueve partes, y para ello se supone con la ayuda del mencionado astrolabio (Figura 13).

La propuesta metodológica del reloj azimutal (s. XI) del occidente latino, es muy similar a la observación de las sombras que propone Gisemundo (s. IX). Así, el trazado de estos relojes depende de la latitud y por ello de las horas diurnas, con trazados para horarios de entre [9-15 h.] y [6-18 h]. En algunos códices solo marcan la hora prima, la tercia y nona, que indica precisamente el cambio de labores manuales y la hora sexta del *Angelus* del mediodía (68) (Figura 14).

Los puntos de las sombras próximas a la hora tercia (U_{III}), que representa el principio de la labor matinal y la hora nona (U_{IX}), donde empieza el trabajo por la tarde, son los que están más separados en su equidista de la hora sexta (U_{VI}), la hora de la comida, dado que forman entre si un ángulo horario (h), próximo a [+45°; -45°]. Estos conocimientos, algo posteriores al (ACA 106), estaban implícitos en la observación del método [M7], ya que el ángulo (ω) de las sombras [U_{III}-U_{IX}], es cercano a 180° y, por tanto, permiten un alineamiento óptimo.

3.3. Simulación geométrica y goniométrica de Gisemundo

Utilizando una metodología experimental, como pudiera haberlo hecho Gisemundo, para determinar la orientación del método de (M_7), y aunque el texto del (ACA 106) no

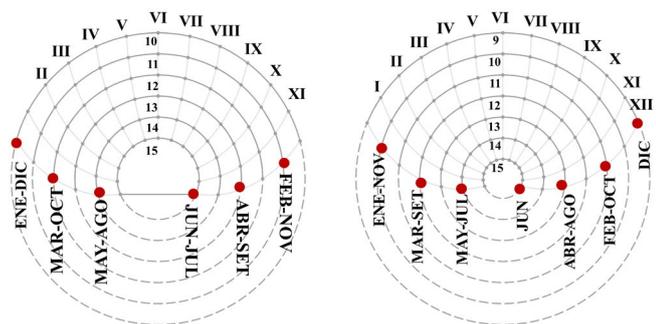


Figura 13. Descripción instrumento orológico del códice ACA 225, ff. 94r-97r (s. XI) del Monasterio de Ripoll. Imagen autores.

Tabla 4. Códex latinos *Horologium pedum* del medioevo

mes/hora	Horologium pedum									
	Codicología Reloges de Pié									
	A	B	C1	C1,5	C2	Cc	CL	Cs	D	E
Ene-(I-XI)	32	27	29	29	29	29	21	29	28	29
Jun-(VI)	3	2	1	1,5	2	1,5	1	2	2	2
Ene-(I-XI)	Me/Up 5,42:1									
Jun-(VI)	5,90	4,98	5,35	5,35	5,35	5,35	3,87	5,35	5,17	5,35
	0,55	0,37	0,18	0,28	0,37	0,28	0,18	0,37	0,37	0,37
Ene-(I-XI)	Me/Up 6:1									
Jun-(VI)	5,33	4,5	4,83	4,83	4,83	4,83	3,50	4,83	4,67	4,83
	0,50	0,33	0,17	0,25	0,33	0,25	0,17	0,33	0,33	0,33
Ene-(I-XI)	Me/Up 7:1									
Jun-(VI)	4,57	3,86	4,14	4,14	4,14	4,14	3,00	4,14	4,00	4,14
	0,43	0,29	0,14	0,21	0,29	0,21	0,14	0,29	0,29	0,29

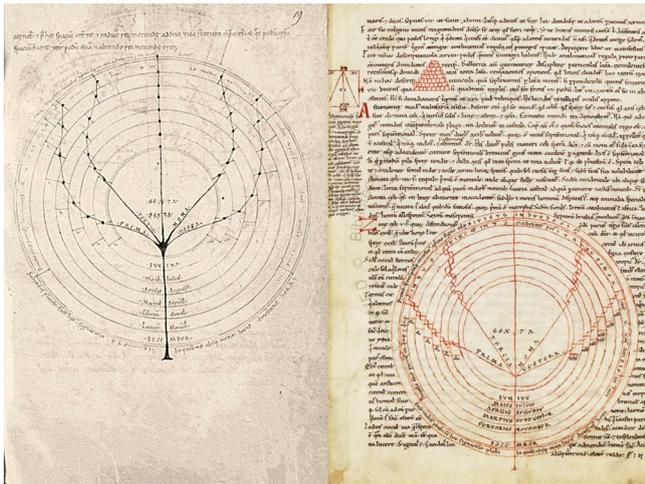


Figura 14. Códices de relojes azimutales; a) Paris, BnF Lat. 7412, f.19 r. (s. XI-XII); b) Vaticano, Bibl. Apost. Vat., Lat. 3101, f. 6v. (s. XIII).

sugiere ni la instrumentación, ni la construcción, tomando como referencia unos códices posteriores, para la construcción de cuadrantes del occidente musulmán (s. X-XIII), podemos simular el proceso de construcción y de observación del código de Ripoll. Tomamos la descripción de cómo, con una *balāta* (69), gnomon, podemos conocer las horas del día, del tratado del cuadrante del *Kitāb al-hay'a* (s. XI) del cordobés Qāsim b. Mutarrif al-Qattān (70). El proceso indica la disposición sobre piedra blanda, al igual que el (ACA 225), construyendo allí una circunferencia de un palmo de diámetro y con un gnomon en el centro de medio palmo, (L_u 1: L_g 1/2), colocado con precisión, y sin error de inclinación, además de sujetarlo con cal para que no se mueva. El resto de la descripción es muy similar a la operativa de Gisemundo, pero trazando la línea meridiana de Vitruvio.

La instrumentación necesaria para Gisemundo aparece en los enciclopedistas cristianos en los *De instrumentis aedificiorum* y *De Lignariis* de las *Etymologiarum* (XIX.18-19), trazando la circunferencia con el compás, *circinus*, (Etym, XIX.19.10), o bien con el cordel, *linea* (Etym. XIX.18.3). La escuadra, *norma* (Etym.XIX.18.1) o la plomada, *perpendicularum* (Etym.XIX.18.2) para el gnomon y finalmente el cordel

o la regla, *regula* (Etym. XIX.18.2) para la alineación de los puntos coincidentes.

Para la simulación se construye una circunferencia de radio ($R=1$) ($L_u=1$), con un gnomon de diferentes proporciones, utilizando el sistema proporcional de la época, de medida (L_g). Utilizando la cuadrada (1:1), la sesquitercia (1: 3/4), la sesquiáltera (1:2/3), la mitad (1:1/2) y la cuarta (1:4), para las coordenadas del monasterio de Ripoll (42° 12' 04" N- 2° 11' 27" E), determinando las sombras (U_i), para un hora medio (h_1), GMT=0 para facilitar su posible reproducción, aunque los resultados gráficos no sean simétricos sobre el ángulo solar $h=0^\circ$. De las cinco sombras arrojadas U_i que describe el método, dos se intersecan con

la circunferencia, la primera (U_2) en hora pre meridiana (h_2), y la otra (U_4) postmeridiana (h_4), formando un ángulo horario(ω) (Tabla 5).

Los resultados gráficos de la aplicación del método de Gisemundo se determinan para la hora media, representada por (12) en la figura, situando la hora local sobre la perpendicular de las sombras (U_2 - U_4) el ángulo solar local $h=0^\circ$ en la figura (VI), permiten determinar que los gnomones altos, de proporción (1:1), tienen más precisión geométrica en el solsticio de verano ya que en esta época del año las (U_2 - U_4) llegan a tener un ángulo (ω) =180°. Con esta proporción no podríamos utilizar el método en el solsticio de invierno (Figura 15).

Los del intervalo de medida más corta [3:4, 1:2], facilitan la utilización en los equinoccios, aunque tampoco serían útiles para trazarlos en el solsticio de invierno, y sus días próximos, donde necesitaríamos como mínimo un gnomon entre las proporciones experimentadas de proporción (1:4), 0,25 en la tabla 5, que trazarían dos puntos cercanos a la línea meridiana con un (ω)=165, 68°, con lo que los gnomones cortos son más efectivos en los solsticios de invierno. Los trazados óptimos (E-O) para el monasterio de Ripoll, se producen cuando el alineamiento de las sombras (U_2 - U_4), con un ángulo (ω) =167, 28°, muy próximo al ángulo horario (h) (+45°, -45°), que representan las horas canónicas (III-IX), se producen con la proporción de (2:3) en los equinoccios.

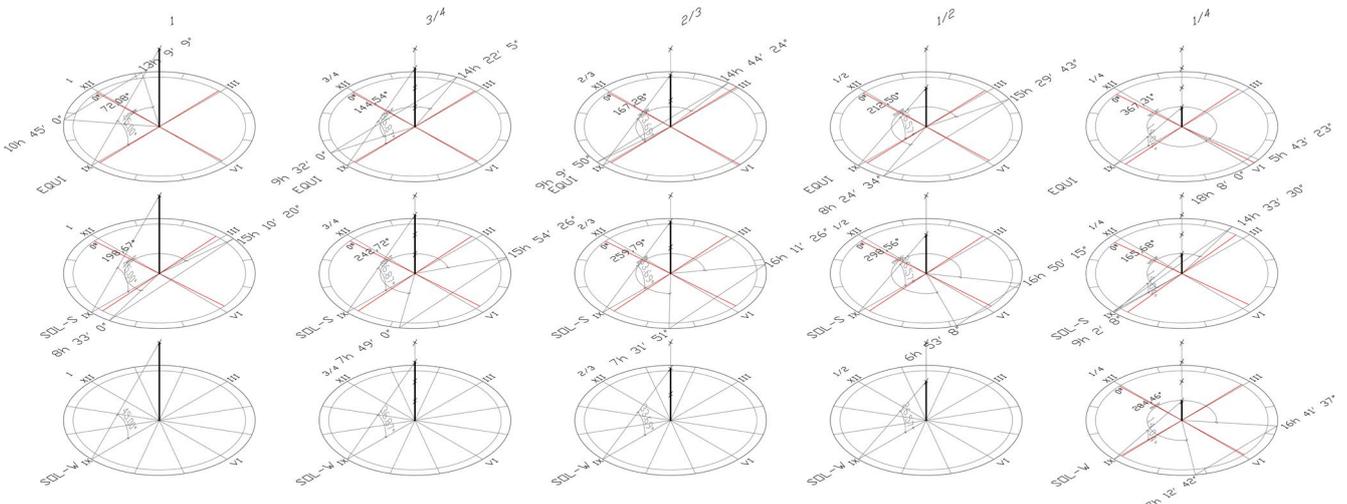


Figura 15. Aplicación del método de Gisemundo (M7), en los equinoccios solsticios para diferentes longitudes de gnomones. Imagen autores.

Tabla 5. Sombra y su ángulo horario(ω) del monasterio de Ripoll

Monasterio de Ripoll (φ) 42° 12' 04" N; (λ) 2° 11' 27" E											
Lg/Lu	Fecha		Lu=100			Δ (Lu2--Lu1)			ω (L1-L2) ^o	360 ^o - ω	$(\omega$ L1-L2)/180 ^o Ref. =1
			h	m	seg	h	m	seg			
1	21/3/21	U2 h(a.m)	10	45	0				72,08	287,93	0,5996
		U4 h(p.m)	13	9	9	2	24	9			
	21/6/21	U2 h(a.m)	8	33	0				198,67	161,33	-0,1037
		U4 h(p.m)	15	10	20	6	37	20			
	21/12/21	U2 h(a.m)	-	-	-				-	-	-
		U4 h(p.m)	-	-	-	-	-	-			
0,75	21/3/21	U2 h(a.m)	9	32	0				145,04	214,96	0,1942
		U4 h(p.m)	14	22	5	4	50	5			
	21/6/21	U2 h(a.m)	7	49	0				242,72	117,28	-0,3484
		U4 h(p.m)	15	54	26	8	5	26			
	21/12/21	U2 h(a.m)	-	-	-				-	-	-
		U4 h(p.m)	-	-	-	-	-	-			
0,67	21/3/21	U2 h(a.m)	9	9	50				167,28	192,72	0,0706
		U4 h(p.m)	14	44	24	5	34	34			
	21/6/21	U2 h(a.m)	7	31	51				259,79	100,21	-0,4433
		U4 h(p.m)	16	11	26	8	39	35			
	22/12/21	U2 h(a.m)	-	-	-				-	-	-
		U4 h(p.m)	-	-	-	-	-	-			
0,5	21/3/21	U2 h(a.m)	8	24	34				212,50	147,50	-0,1806
		U4 h(p.m)	15	29	43	7	5	9			
	21/6/21	U2 h(a.m)	6	53	8				298,56	61,44	-0,6587
		U4 h(p.m)	16	50	15	9	57	7			
	22/12/21	U2 h(a.m)	-	-	-				-	-	-
		U4 h(p.m)	-	-	-	-	-	-			
0,25	21/3/21	U2 h(a.m)	7	12	42				284,46	76,04 75,54	-0,5803
		U4 h(p.m)	16	41	37	9	28	55			
	21/6/21	U2 h(a.m)	5	43	23				367,31	-7,31	-1,0406
		U4 h(p.m)	18	0	0	12	14	37			
	22/12/21	U2 h(a.m)	9	2	8				165,68	194,32	0,0795
		U4 h(p.m)	14	33	30	5	31	22			

4. CONCLUSIÓN

El *Ars gromatica siue geometria Gisemundi* recoge una simplificación geométrica del método de Vitruvio, trazando directamente la línea equinoccial, con solo cuatro operaciones gráficas, una circunferencia, dos puntos y una alineación. Para ello, ha de resolver implícitamente en el proceso algunas cuestiones goniométricas, como la proporción entre el radio de circunferencia (L_g), sombra, respecto a la altura de un gnomon (L_g).

La cuestión ya había sido abordada por agrimensura romana, a través de Paladio y constatadas en los *scriptorios* de los ce-

nobios a partir del siglo VIII con las tablas de los *horologium pedum*. Los gnómones altos (1:1) funcionan mejor en el solsticio de verano, los bajos (1:1/4) en el de invierno y los medios (2:3) para los equinoccios.

La precisión va a depender de la proyección de las sombras, cuestión desarrollada posteriormente en los relojes de sol azimutales, por ello, cuando las sombras ($U_2=U_4$) están próximas a las horas (III-IX), es cuando se traza mejor la alineación. Este momento horario coincide con aquel en que en la vida monacal se realiza el cambio de las labores de "*ora et labora*".

NOTAS

ACA Archivo Corona Aragón

(De Uni.) De Universo Libri Viginti Duo. Rabanus Maurus. MPL111.

(Etyrn.) Lindsay. 1911. Isidori Hispalensis episcopi 1911. Etymologiarum sive Originvm libri XX. Oxonii.

(Fave.) Rose 1899.. 1899. N. Ceti Faventivi. Liber artis architectonae. Iterum edidit Valentinus Rose. Lipsiae , pp. 283-309.

(La.) Lachman. 1848. Die Schriften der Römischen Feldmesser Herausgegeben

(Vitr.) Rose 1899. Vitruvii. De architectura Libri Decem. Iterum edidit Valentinus Rose. Lipsiae, pp. 1-282.

REFERENCIAS:

- (1) Tucker, M.A.R; Malleson H. (1900). *Handbook to christian and ecclesiastical Rome. Part I. The christian monuments of Rome*. London:adam and Charles Black, p.134.
- (2) Marchegay, P; Mabille, E. (1869). *Chroniques des églises d'Anjou*. Paris: Chez Mme. Ve. Jules Renouard, p.282.
- (3) Lluis i Ginovart, J.; Lluis Teruel, C; Ugalde Blázquez, I. (2021). Cosmology and Precision in the Val d'Aran. *Nexus Network Journal* 23, pp. 433–451
- (4) Lluis i Ginovart, J.; Ugalde Blázquez, I; Lluis Teruel, C. (2021). Gisemundus and the orientation of the romanesque churches in the Spanish Pyrenees (11th -13th centuries). *Mediterranean Archaeology and Archaeometry*, Vol. 21, No 1, (2021), pp. 205-214.
- (5) Cleveland A. (1886). *The ante-nicene fathers: Translations of the writings of the fathers down to A.D. 325. Fathers of the third and fourth centuries; Lactantius, Venantius, Asterius, Victorinus, Dionysius, Apostolic teaching and constitutions, homily, and liturgies, Vol. 7. Christian Literature Company*. Michigan: Wm. B. Eerdmans publishing company Grand Rapids Cleveland, p. 421.
- (6) Tertuliano (2001). *Apologético. A los Gentiles*. Madrid: Gredos Tertuliano, p.104.
- (7) Origen (1954). *Player. Exhortation to martyrdom translated and anotated by John O'Meara*. New York: Newman press, p. 136.
- (8) Daniélou, J. (1960). *Théologie du Judéo-christianisme*. Paris: Desclée, p. 292.
- (9) Fontana, C. (1694). *Il Tempio Vaticano e sua origine: con gl'edifitii piu cospicui, antichi e moderni, fatti dentro e fuori di esso*. Roma: Nella stamparia di Gio. Francesco Buagni Fontana, p.90.
- (10) Vogel, C. (1962). Sol aequinoctialis. Problemes et technique de l'orientation dans le cultura chretien. *Revue Sciences Religieuses*, n° 36, p. 175.
- (11) Isidoro de Sevilla. (1919). *Isidori Hispalensis episcopi. Etymologiarum sive Originvm libri XX. Recognovit brevique adnotatione critica instruxit W. M. Lindsay. Tomus II*. Oxonii: e Typographeo Clarendoniano, pp. 167-169.
- (12) Rabanus Maurus (1864). *De universo libri viginti duo. Documenta catholica omnia. De scriptoribus ecclesiae relatis*. Migne JP. Patrologia Latina, MPL111, Col. 0009, 0614B.
- (13) Delcor, M. (1987). Les églises romanes et l'origine de leur orientation. *Les Cahiers de Saint-Michel de Cuxa* 18: 39-53.
- (14) Romano G. (1997). Deviazioni negli orientamenti del tipo "Sol Aequinoctialis". *Journal: Memorie della Società Astro-nomia Italiana*. 68(3), 723-729.
- (15) McCluskey, S.C. (1998). *Astronomies and Cultures in Early Medieval Europe*. Cambridge: Cambridge University Press.
- (16) Johnson, W. (1912). *Byways in British Archaeology*. Cambridge: Cambridge University Press. Johnson (1912:225).
- (17) Benson, H. (1956). Church Orientations and Patronal Festivals. *The Antiquaries Journal* 36:205-213.
- (18) Spinazzè, E. (2016). The alignment of medieval churches in northern-central Italy and in the Alps and the path of light inside the church on the patron saint's day. *Mediterranean Archaeology and Archaeometry*, 16.4:455-463.
- (19) Knapp, A.B.; Ashmore, W. (1999). Archaeological landscapes: constructed, conceptualized, ideational. En: *Ashmore, W; Bernard Knapp B. (eds) Archaeologies of Landscape: contemporary perspectives* 1-30. Oxford: Blackwell Publishing.
- (20) Sassin, A. 2016. Church Orientation in the Landscape: a Perspective from Medieval Wales. *Archaeological Journal*, 173/1:154-187.
- (21) Pérez J; Pérez V. 2019. La orientación de las iglesias románicas en la Península Ibérica, *Anuario de Estudios Medievales* 49 (2), 761-791.
- (22) Hanssens, J.M. (1948-1950). *Amalarii episcopi Opera liturgica omnia*, 3 vols. Città del Vaticano: Biblioteca apostolica vaticana,
- (23) Rupertis Tuitiensis (1967). *Rupertis Tuitiensis. Liber de divinis officiis editit Hrabanus Haacke*. Turnholti :Typographi Brepols Ruperti Tuitiensis. Liber de divinis officiis editit Hrabanus Haacke.
- (24) Honorius Augustodunensis (1895). *Gemma Animae. Documenta Catholica Omnia. De Scriptoribus Ecclesiae Relatis*. Migne JP. Patrologia Latina. MPL172. Honorius Augustodunensis. (1895: MPL172, Col. 0541-0738B)
- (25) Sicardus Cremoniensis Episcopus (1855). *De mitrali seu tractatus de officiis ecclesiasticis. Documenta Catholica Omnia. De scriptoribus ecclesiae relatis*. Migne JP. Patrologia Latina. MPL213Sicardus Cremoniensis (1855: MPL213, Col. 0011-0011).
- (26) Joanne Beletho (1855). *Rationale divinorum officiorum. Documenta Catholica Omnia. De scriptoribus ecclesiae relatis*. Migne JP. Patrologia Latina. MPL 202. Joanne Beletho. (1855: MPL 202, Col. 0165-0167).
- (27) O Kruff, H-W. (1991). *Geschichte der Architekturtheorie: von der Antike bis zur Gegenwart*. München: München Beck, pp. 31–43.
- (28) Schuler, S. (1999). *Vitruv im Mittelalter: die Rezeption von "De architectura" von der Antike bis in die frühe Neuzeit Köln: Böhlau, apéndices*.
- (29) Cervera, L. (1986). Notas para un estudio sobre la influenciade Vitruvio en el Renacimiento carolingio. *Academia: Boletín. Real Acad. Bellas Artes San Fernando*, 62, pp. 35-58.
- (30) Cervera, L. (1978). *El Códice Vitrubiano hasta sus primeras versiones impresas*. Madrid: Instituto de España, p.44.
- (31) Harvey, J. (1972). *The medieval architect*. London: Wayland Publishers London, p. 107.
- (32) De Bruyne, E. (1946. 2). *Etudes d'esthétique médiévale. I. De Boèce à Jean Scot Erigène. II. L'époque romane. III. Bruges: De Tempel*, pp. 409-410)
- (33) Manzanero, F. (2008). Introducción. En: *Vitruvio. Arquitectura. Libros I-V*, 8-99. Madrid: Editorial Gredos, pp. 8-99.
- (34) Aveni, A; Romano, G. (1994). Orientation and Etruscan Ritual. *Antiquity*, 68, pp. 545-563.

- (35) Guillaumin, J.Y. (2005). *Hyginus Gromaticus: Les arpenteurs romains. Tome I : Hygin le Gromaticus. Frontin*. Paris: Les Belles Lettres, pp. 157-161.
- (36) Orfila, M. (2017). Urbanizar en época romana: ritualidad y practicidad. Propuesta de un procedimiento homologado de ejecución. *SPAL*, 26: 113-134.
- (37) Cantor, M. (1880). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, von Moritz Cantor Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n. Chr.* Leipzig: Druk und Verlag von B.G. Teuberner, pp. 454-456.
- (38) Blume, F; Lachman, K; Rudorff, A. (1848). *Die Schriften der Römischen Feldmesser Herausgegeben und erläutert von von F. Blume, K. Lachmann, und A. Rudorff. Erster Band.* Berlin: Bei Georg Reimer, pp. 166-208.
- (39) Dilke, O. A. W. (1967). Illustrations from Roman Surveyors' Manuals. *Imago Mundi*, 21, pp. 9-29.
- (40) Higinio Gromático (1998). *Hyginus et Siculus Flaccus. Opuscula Agrimensorum veterum. Traducción y comentarios de M^a Jose Castillo*. Logroño: Universidad de la Rioja, pp. 4-12.
- (41) Neugebauer, O. (1975). *A history of Ancient Mathematical Astronomy*. Heidelberg: Springer. Neugebauer (1975: pt. 2, 841-842; pt. 3, 1376-1377).
- (42) Lluís i Ginovart, J. (et alli.) (2019) Orientation of the romanesque churches in the region of Val d'Aran, Spain (11th-13th centuries). *Archaeometry* 61(1), pp. 226-241.
- (43) Bubnov, N. (1899). *Gerberti postea Silvestri II papae opera mathematica (972-1003)*. Berlin: Friedländer, pp. 363-364.
- (44) La Ronciere, Charles de (1897). Un inventaire de bord en 1294 et les origines de la navigation hauturiere. *Bibliothèque de l'école des chartes* Vol. 58, pp. 394-409.
- (45) Beer, R. (1907). *Die Handschriften des Klosters Santa Maria de Ripoll*, Vol. I. Viena: A. Hölder.
- (46) Beer, R; Barnils, P. (1910). *Los manuscritos del monastir de Santa María de Ripoll*. Barcelona: Estampa de la Casa Provincial de Caridad, pp. 49-50.
- (47) Thulin, C.O. (1911). *Die Handschriften des Corpus agrimensorum Romanorum*. Berlín: Akademie der Wissenschaften, p. 87.
- (48) Millàs Vallicrosa, J.M^a. (1931). *Assaig d'història de les idees físiques i matemàtiques a la Catalunya medieval*. Vol I. Barcelona: Institució Patxot, pp. 327-335.
- (49) Toneatto, L. (1995). *Codices artis mensoriae. I manoscritti degli antichi opuscoli latini d'agrimensura (V-XIX sec.)*. Spoleto: Centro Italiano di studi sull'alto medioevo, pp. 999-1112.
- (50) Toneatto, L. (1982). Note sulla tradizione del Corpus Agrimensorum Romanorum. I Contenuti e struttura dell'Ars Gromatica de Gisemundus (IX sec.). *Mélanges de l'école française de Rome Année 94-1*: 191-313.
- (51) Andreu, R. (2012). *Edició crítica, traducció i estudi de l'Ars gromatica siue geometria Gisemundi*. Tesis Doctoral codirigida por los doctores Cándida Ferrero y Oriol Olesti. Departamento de Ciencias de la Antigüedad y de la Edad Media. Universidad Autónoma de Barcelona, p. 58.
- (52) Olesti, O. (2017). Héritage et tradition des pratiques agrimensoriques: l'Ars Gromatica de Gisemundus. *Dialogues d'histoire ancienne*, 43-1: 257-274.
- (53) Beda Venerabilis (1904). *Libellus De Mensura Horologii*. Migne JP, *Patrologia Latina, MPL090*. Parisiis: Apud J.P. Migne et Garnier Frates, col. 0951-0956.
- (54) Paladio (1990). *Tratado de agricultura; Medicina veterinaria; Poema de los injertos. Intr., trad. y notas de A. Moure Casas*. Madrid: Editorial Gredos, pp. 167-168; 119; 229; 271; 285; 298-299; 313; 337; 353-354; 381; 411-412; 418)
- (55) Nisard, Désiré (1864). *Les agronomes Latins. Caton, Varron, Columelle, Palladius, avec la traduction en français de M. Nisard*. Paris: Chez Firmin Didot Frères, fils et Cie, Libraires, p. 648.
- (56) Neugebauer, O. (1975), *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, II, Berlin: Springer-Verlag, p. 739
- (57) Roth, Jonathan P. (1999). *The logistics of the roman army at war (264 BC-AD 235)*. Columbia Studies in the Classical Tradition. Vol. 23. Leiden; Boston; Köln Brill, pp. 9-13.
- (58) Vitruvio, M. (1787). *Los diez libros de arquitectura de M. Vitruvio Polion traducidos del latin, y comentados por don Joseph Ortíz y Sanz*. Madrid: Imprenta Real, p. 60.
- (59) Baratte, François; Bejaoui, Fethi (2004). Un évêque horloger dans l'Afrique byzantine: Hyacinthe d'Ammaedara, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres Année 2004* 148-3 pp. 1121-1151.
- (60) Llidó Miravé, Javier (2019). El papel de la epigrafía en la datación de San Pedro de la Nave. *Boletín del archivo epigráfico*, n^o 4 2019, pp.26-49.
- (61) Schaldach, Karlheinz (2008). Gli 'schemi delle ombre' nel Medio Evo latino. *Orologi Solari*, n. 16, Novembre 2008, pp. 9-16.
- (62) Arnaldi, Mario (2020). Gli 'Schemi delle ombre' nel Medio Evo latino. Addenda. *Orologi Solari*, n. 21, Aprile 2020, pp. 17-34.
- (63) Novella, Pedro J. (2020). Relojes de sol canónicos V numeración Pedro J. Novella V.20.
- (64) Havet, J. (1889). Lettres de Gerbert (983-997), publiées avec une introduction et des notes par Julien Havet. Paris: Alphonse Picard, pp. 135-136.
- (65) Arnaldi, M. (2008). Orologi solari azimutali medievali. Analisi dei testi e possibili collazioni (seconda parte). *Orologi Solari*, n. 15, Giugno 2008, pp. 31-40.
- (66) Arnaldi, M. (2012). De cursu solis medieval azimuthal sundials. From the primitive idea to the first structured prototype. The british sundial society. BSS Monograph No. 10. London: The Royal Astronomical Society, 24-27.
- (67) Farré, Eduard (1991). The sundial in the manuscript 225 of Ripoll. *Bulletin of the British Sundial Society* 91.2, Jul 1991, p 35-37.
- (68) Arnaldi, M. (2008). Orologi solari azimutali medievali in due manoscritti inediti: Darmstadt 1020 e Karlsruhe 504 (prima parte). *Orologi Solari*, n. 14, Febbraio 2008, pp. 51-63.
- (69) Martínez, E. (2014). Legado gnomónico de al-Andalus. Personajes, documentos y materiales. Córdoba: Editorial el Reloj Andalusi, pp. 163-169.
- (70) Casulleras, Josep (1993). Descripciones de un cuadrante solar atípico en el occidente musulmán. *Al-Qantara*, 14, pp.65-87.