

El trazado geométrico del ábside del gótico meridional de la catedral de Tortosa

The geometric layout of the southern Gothic apse of the cathedral of Tortosa

Cinta Lluís-Teruel^(*) Josep Lluís i Ginovart^(*)

RESUMEN

El análisis estadístico del resultado de los levantamientos realizados con láser escáner terrestre (TLS) en la catedral gótica meridional de Tortosa (1383), ha permitido demostrar que el trazado metrológico de su ábside tetradecagonal tiene una precisión metodológica del $[\pm 1,502\%]$. Analíticamente, se determina que, dentro del rango de precisión, el ancho total de la girola es de 150 palmos, y que las capillas radiales tienen una dimensión de 24 palmos que son 3 canas, proporción tonal (9:8) respecto a la medida de la nave lateral de 27 palmos. La clave se sitúa a 100 palmos, y su sección final dispone de una relación (3:2) entre el ancho del deambulatorio de 150 palmos y su altura. Como conclusión, se observa una conjunción proporcional entre el orden medieval y la fábrica gótica. Las proporciones de la catedral de Tortosa forman parte de la tradición del *Timeo*, que bien conocían sus promotores, diferente a la de los maestros góticos septentrionales, con modelos de sección *ad triangulum* ($1:\sqrt{3}/2$) y *ad quadratum* (1:1) definidos en los debates de la catedral de Milán.

Palabras clave: Catedral de Tortosa; geometría sagrada; heptágono; neoplatonismo; proporción; sistemas geométricos.

ABSTRACT

The statistical analysis of the results of the new surveys carried out with Terrestrial Laser Scanner (TLS) in the southern Gothic cathedral of Tortosa (1383), have shown that the metrological layout of its tetradecagonal apse has a methodological accuracy of $[\pm 1,502\%]$. Analytically, it is determined that, within the range of precision, the total width of the ambulatory is 150 palms, and that the radial chapels have a dimension of 24 palms, which is 3 canes, a tonal ratio (9:8) with respect to the measurement of the aisle of 27 palms. The keystone is located at 100 spans, and its final section has a ratio (3:2) between the width of the ambulatory, 150 spans, and its height. In conclusion, we can observe a proportional conjunction between the medieval order and the Gothic masonry. The proportions of Tortosa cathedral are part of the *Timaeus* tradition, which was well known to its promoters, different from that of the northern Gothic masters, with section models *ad triangulum* ($1:\sqrt{3}/2$) and *ad quadratum* (1:1) defined in the debates in Milan Cathedral.

Keywords: Tortosa Cathedral; geometric systems; heptagon; neoplatonism; proportion; sacred geometry.

(*) Universitat Internacional de Catalunya, Barcelona (España).

Persona de contacto/Corresponding author: jluis@uic.es (C. Lluís)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5280-1147> (C. Lluís), <http://orcid.org/0000-0001-5957-762X> (J. Lluís)

Cómo citar este artículo/Citation: Cinta Lluís-Teruel, Josep Lluís i Ginovart (2023). El trazado geométrico del ábside del gótico meridional de la catedral de Tortosa. *Informes de la Construcción*, 75(572): e524. <https://doi.org/10.3989/ic.6442>

Copyright: © 2023 CSIC. Este es un artículo de acceso abierto distribuido bajo los términos de la licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

Recibido/Received: 10/03/2023
Aceptado/Accepted: 19/10/2023
Publicado on-line/Published on-line: 13/12/2023

1. INTRODUCCIÓN

Las técnicas del láser escáner terrestre (TLS) han permitido una aproximación cuantitativa y cualitativa al estudio de las catedrales góticas del Norte de Francia de los siglos XII y XIII corroborando las tesis del orden medieval de bases neoplatónica propuestas por Otto von Simson (1912-1993) (1). A su vez, las catedrales góticas francesas meridionales disponen de unas características constructivas singulares con una readaptación formal a la geografía a la que pertenecen. De aquí, la extrañeza de Viollet-le-Duc (1814-1879) (2) o Robert de Lasteyrie (1849-1921) al analizar las del *Midí* francés (3). En Italia Luca Beltrami (1854-1933) analiza la sección y fachada de la catedral de Milán de la edición de Vitruvio (1521) de Cesare Cesariano (c.1483-1543), con una sección con cubierta de terraza y reducción de ventanales, diverso a los modelos del gótico francés (4).

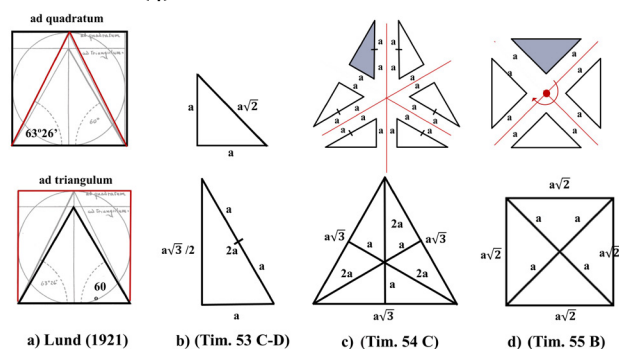


Figura 1. a) Julius Fredrik Macody Lund (1921), *ad quadratum*, *ad triangulum*; *Timeo* (c. 360 BC) de Platón (c.424-c. 347 BC). b) triángulos rectángulos; c) Triángulo equilátero; d) Cuadrado.

El peso de la tradición tardo clásica en el Sur de Francia, Italia y el Levante español, hizo intuir a Viollet-le-Duc la utilización de proporciones diferentes frente a los modelos septentrionales (5). Estos fueron estudiados por Julius Fredrik Macody Lund (1863-1943) y basados en los modelos que el define como *ad quadratum* (1:1) y *ad triangulum* (1:√3/2) utilizados en los debates de la catedral de Milán (1392) (Figura 1.a), con un despliegue a través de la geometría neoplatónica del cuadrado y del triángulo equilátero (6) (Figura 1.b,c,d).

Esta diferencia de arquetipos es reconocida también por Ernst Moessel (1881-1946) (7) y por Matila Costiesco Ghyka (1881-1965) (8). Corrado Verga (1923-1989) comprobó el esquema proporcional de la catedral de Milán superponiendo los modelos *ad triangulum* y el de los triángulos pitagóricos dobles (9).

En el período gótico la sección estaba vinculada al proceso constructivo: determinaba la altura a la que se debían situar las impostas y las claves de los arcos y bóvedas en función del ancho de la edificación. Por consiguiente, se definía la sección transversal a la vez que su proporción en altura, por lo cual estaba sujeta al secretismo profesional prohibiendo revelar el despliegue de la sección en el artículo 13 de los Estatutos de Estrasburgo (1563) (10).

Las fuentes directas confirman esta tesis, en los debates de la catedral de Milán (1386) los maestros discuten en (1392) y (1401) las proporciones más adecuadas (11). Guy Beaujouan (1925-2007) concreta que la metodología geométrica utilizada en el Duomo milanés es de reducción aritmética a través de

números naturales (8;7) (12). Lo mismo ocurre en de la catedral de Girona (1316) en las consultas del 1386 y de 1416-1417 donde participan también los arquitectos de la catedral de Tortosa, donde se habla de proporción a *terça* (3:2) (13) (Street 1865: 501-513). Estos principios están asentados en el *Timeo* (c. 360 BC) de Platón (c.424-c. 347 BC), a través de las progresiones: 1, 2, 4, 8 y 1, 3, 9, 27, y con las ratios (3:2) sesquialtera, (4:3) sesquitercia, (9/8) sesquiocava (*Tim.* 35B-36B) (14).

Las fuentes directas del Archivo Capítular (ACTo), apuntan al conocimiento neoplatónico de los promotores de la catedral de Tortosa. En él se conservan la obra de San Agustín de Hipona (354-420) de la *Ciudad de Dios* (ACTo n.º 20), un fragmento de la Geometría de las *Bodas de Filosofía y Mercurio* de Marciano Capella (fol. 430) (ACTo 80).

Especialmente interesantes para el desarrollo de la teoría de la proporción son el *Comentario del Sueño de Escipión* de Macrobio (fl.400) (ACTo 236) y la traducción y comentario del *Timeo* realizada por Calcidio (f.350) en los códices (ACTo 80), (ACTo 236). En ambos casos el texto se ilustra con tres figuras que indican las secuencias numéricas que dan lugar a las relaciones tonales del *Timeo* (*Tim.* 35B-36B) (15).



Figura 2. Ábside catedral de Santa María de Tortosa (1377-1441).

2. OBJETO Y METODOLOGÍA DEL TRAZADO

El objeto de la investigación es determinar cómo se desarrolló geoméricamente la girola de la catedral de Tortosa (1377-1441) (Figura 2), apoyado en el tratamiento estadístico de los datos del levantamiento con el escáner láser terrestre (TLS) (Figura 3.a). Los resultados obtenidos pretenden complementar los análisis de otras disciplinas como la arqueología y la historia del arte, con el propósito de determinar el proceso de ejecución de los testeros de los ábsides radiales de estas catedrales catalanas (16). Las técnicas constructivas y geométricas del ábside, empezado a construir en 1383, están sometidas a unos procesos de construcción y deconstrucción de los elementos primitivos de la catedral románica preexistente. Las capillas radiales son el primer elemento constructivo que deben de contener los empujes del futuro presbiterio, a través del deambulatorio, que tendrá como centro imaginario la imagen de la clave mayor representando la coronación de la Virgen colocada en 1439 (17) (Figura. 3.b).

El tratamiento de los datos (TLS) de las medidas de la catedral, y sus desviaciones métricas, aportan una valiosa información para comprender estos primeros estadios de la construcción de estas catedrales góticas meridionales (Figura. 3.c).

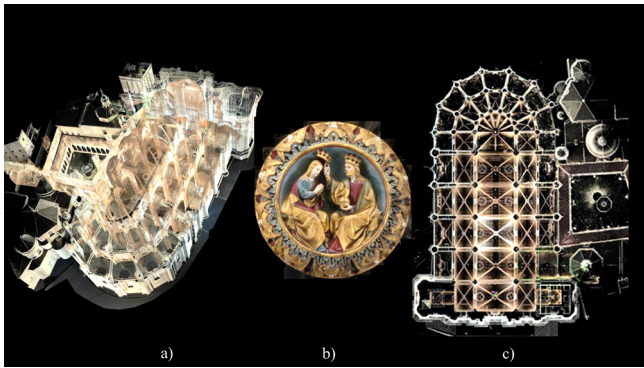


Figura 3. a). Láser escáner terrestre (TLS) de la catedral Tortosa (2015);
 b) Clave del presbiterio con la coronación de la Virgen (1439).

La secuencia constructiva de las capillas radiales variará en función de la posición de la nueva catedral gótica respecto a estas preexistencias, así pues, también su trazado. En el caso de la catedral de Tortosa el centro del deambulatorio estaba ocupado por el presbiterio de la catedral románica (18) (Figura. 4.a), por lo que no pudieron trazar una circunferencia y circunscribir las capillas radiales, teniendo que operar desde otras metodologías de base poligonal (Figura. 4.b, c).

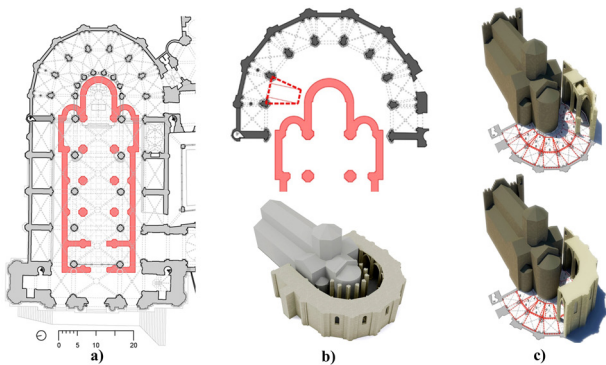


Figura 4. a) Hipótesis superposición sede románicas de Tortosa; b),
 c) Replanteo Catedral de Tortosa (1383).

La investigación quiere indagar sobre la primera impronta de un replanteo de un edificio sacro: cómo y cuáles son sus principios. Existe una referencia dual entre el estamento eclesiástico -como el caso del Papa Liberio (352-366) trazando la basílica de Santa María Mayor- y la del arquitecto que traza de los cimientos -como reconoce Isidoro de Sevilla (c. 556-636) en las Etimologías (c.630) (19)-. Esta tradición de las dos figuras, el obispo y el arquitecto, se recoge en la actual liturgia, con la bendición y la colocación de la primera piedra del edificio a través del Pontificale Romanum (1595) de Clemente VIII (1592-1605) (20).

2.1. Las capillas del ábside

Las capillas son un elemento modular en la construcción de las catedrales, permiten el patrocinio económico de la obra, además de actuar como estribo durante la construcción escalonada de las mismas (21). Desde el punto de vista métrico, las capillas radiales y laterales deben ser iguales ya que forman parte de la secuencia del peregrinaje que circunvala la nave central (22)

La importancia de las capillas laterales tiene su origen en la liturgia gótica *Prochiron, vulgo Rationale divinatorum officiorum* (1291) del obispo de Mende, Guillermo de Durando (1230-1296) (23) conocido en la catedral de Tortosa a través de sus códices (ACTo. 58), (ACTo. 258) y (ACTo. 290). El modelo se impone en el Sur de Francia en Nuestra Señora de la Asunción de Clermont-Ferrand (1248); Sant Justo y Pastor de Narbona (1272), y finalmente llegando a Girona (1312), donde el Cabildo impone un programa de nueve capillas en el ábside (24), al igual que el modelo de Tortosa (1383), la última de las catedrales góticas catalanas.

2.2. Metrología y calibración del proceso

El patrón básico de la medida de la catedral de Tortosa es la *cana* (1,858 m) con 8 palmos de (0,2323 m) y este, 12 dedos de (0,019 m). La medida es muy similar a la *cana destra* (2,796 m), subdividida en 12 palmos destres (0,2330 m) y a su vez en doce dedos (0,019 m) (25) utilizado en el ámbito constructivo (26), con una diferencia de tan solo (0,0007 m) (Tabla 1).

Tabla 1. Unidades metroológicas de la cana de Tortosa y la cana destra.

Cana	Cana (m)	Palmo (nº)	Palmo (m)	Dedo (nº)	Dedo (m)
Tortosa	1.858	8	0.232	12	0.019
Destra	2.796	12	0.233	12	0.019

El levantamiento se realizó con una Leica Scan Station C10, con precisión de 4mm a 50m; precisión angular 12" / 12"; sin el uso de lentes y con un error medio de alineación entre posiciones de 6mm y un Leica Scan Station P20, con precisión de 3mm a 50m; precisión angular 8" / 8"; sin el uso de lentes y con un error medio de alineación entre posiciones de 2mm, y considerados despreciables.

El error total del proceso metodológico (E_t) establece como el sumatorio de los procesos de la evaluación de las incertidumbres de la obra (E_o), el de la observación y toma de datos (E_d), más el del proceso informático del tratamiento de estos puntos (E_i), y los derivados de la apreciación en el replanteo de la obra construida (E_r):

$$[1] \quad E_t = \sum (E_o + E_d + E_i + E_r)$$

En las medidas lineales se establece en la actualidad, en el orden de (0,025 m); por tanto, $E_i = [0,000-0,025 \text{ m}]$. El rango del posible error del proceso de observación y toma de datos $E_d = [0,000-0,010 \text{ m}]$. El tratamiento de datos para registrar las nubes de puntos realizado con software Cyclone, tiene una tiene un error máximo de 0,009 m. La malla 3D se establece con el programa 3DReshaper, donde la densidad de la malla se ajustó a un triángulo de 0,025 m. con un error total en un rango $E_r = [0,003-0,034 \text{ m}]$.

Para la determinación del valor de apreciación, se toma la medida del patrón del *dit* (0,019m), adoptando la mitad de esta medida, de manera que se establece el intervalo de $E_r = [0,000-0,010 \text{ m}]$, teniendo la precisión metodológica de proceso $E_t = [0,000-0,077]$, así el error máximo es de ($\pm 0,084 \text{ m}$) igual a ($\pm 0,362$ palmos) o ($\pm 4,339$ dedos). Para la calibración tomamos el valor (5,592 m) dos *canas destros*, similar al ancho de las capillas, donde el error máximo de ($\pm 0,083 \text{ m}$) que representa el 1,502% de este patrón. Los datos obtenidos de

los valores más característicos del ábside se analizan estadísticamente. De manera que el valor más probable (c_a), será la media aritmética de los valores analizados:

$$[2] \quad c_a = \frac{\sum c_i}{n}$$

Se determina el error medio cuadrático (e_c):

$$[3] \quad e_c = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{(n-1)}}$$

El error máximo o tolerancia (e_m) definido como:

$$[4] \quad e_m = 2,5 e_c$$

y su el error medio cuadrático de la media (c_{cm}):

$$[5] \quad c_{cm} = \sqrt{\frac{\sum c_i^2}{n(n-1)}}$$

El valor correspondiente del error relativo (e_r) será:

$$[6] \quad e_r = c_a \pm c_{cm}$$

Con estos valores analizados, se puede encontrar el valor estadístico del patrón de la metrología y, de esta manera, podremos determinar las proporciones que generan la arquitectura.

3. TRAZADO DE LAS CAPILLAS RADIALES

De las nueve capillas absidiales la catedral de Tortosa, siete se inscriben sobre la semicircunferencia de la girola, en virtud de lo cual se ha de utilizar algún método geométrico para construir un polígono regular de 14 lados. El matemático y canónigo de Noyon, Charles Bovelles (1478-1567) reconocía que una figura tan importante para el cristiano como lo es el heptágono no aparecía en los *Elementos* de Euclides (c.325- c.265 aC) (27) por lo que no se pudieron apoyar sobre la principal base geométrica conocida en el siglo XIV.

Utilizando los sistemas diseño asistido por ordenador (CAD) (1977) el valor para la simulación de una circunferencia de la radio 18 unidades, la medida de las capillas radiales sería [8,011 u] (Figura 5.a). Este valor es una aproximación, un heptágono de $r=9$, su valor CAD (4.00509692), calculando $9 \sin[\pi/7]/\sin[3 \pi/7] = 4.00537681$. La construcción del heptágono más generalizada es la que determina el lado del heptágono regular como la altura de un triángulo equilátero de lado el radio inscrito en la circunferencia como indica el *Underweysung der Messung* (1525) de Albert Dürer (1471-1528), consecuencia del corolario del trazado del pentágono (LII.15) siendo su valor $\sqrt{3}/2$, además del propio del heptágono (LII.11) (28) (Figura. 5.d). Estos métodos basan sus principios en procedimientos geométricos resueltos mediante la instrumentación del compás. Johannes Kepler (1571-1630) planteó el problema de la incommensurabilidad de la construcción del heptágono en las *Harmonices mundi libri V* (29), y fue demostrado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en las *Disquisitiones Arithmeticae* (30).

El origen del método es el *Kitāb fī mā yahtāju al-sāni' min al-a'māl al-handasiyya* (Libro sobre las construcciones geométricas necesarias para los artesanos) (c. 993-1008) de Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani, (940-998) (31) (Figura 5.b). La recepción en el occidente latino de este texto se realiza a través Ibn Yūnus, Ka māl al-Dīn (1156-1242) con el *Commentario*

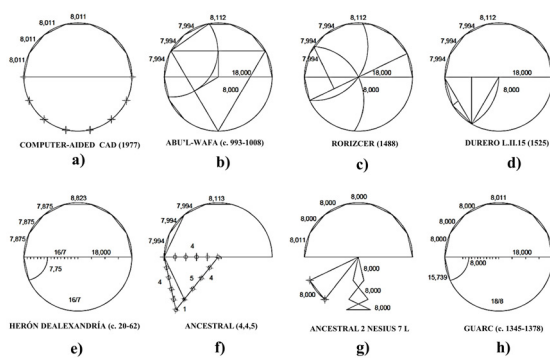


Figura 5. Metodologías para el trazado polígono de catorce lados. Tetradecágono inscrito circunferencia de radio $R=9$.

Geometrico de la Construcciones de Abu'l-Wafa' en la corte del Emperor Frederick II (1194- 1250) (32). Esta metodología se difunde entre los constructores medievales a través de la *Geometria Deutsch* (1472) atribuida a Hans Hösch von Gmünd (f. 1472) (33) y de la *Geometrie Deutsch* (1488) de Matthäus Roriczer (+c. 1495) (34) (Figura 5.c). En la *Metrica* de Herón de Alexandria (c.20-62) se construye a partir del hexágono regular el triángulo equilátero formado con el radio de 8 unidades y altura de 7, con la relación (16:7) entre el lado heptágono y el diámetro de la circunferencia (35). Un método similar se encuentra en la pseudogeometría *Geometria II* de Boecio (480-525) (36). Existen otros métodos que no se transmiten en los textos de geometría erudita como el método de los 15 nudos, donde se construye un triángulo (4,5,4) y donde su lado es la medida del nudo (1-9) (37) (Figura. 5.f). Otro es la construcción *nesius* de siete segmentos iguales, uno determina la base mientras que los otros seis se cruzan hasta que tres de sus puntos se alinean, formando los triángulos de parámetros (3, 1, 3) (38) (Figura. 5.g).

La *geometria fabrorum* reveló el método de la *traça de Guarç* (ca. 1345-1380), (ACTo: Fábrica nº 49), donde establece una relación entre la nave lateral (9) y la medida de las capillas radiales (8), como la relación proporcional de 9/8 (39) (Figura 5.h), apareciendo una solución parecida en el *Manifiesto Geometrico* (1864) de Fray Ignacio Muñoz (ca. 1608-1685) (40). El método de Guarç determina el diámetro de la circunferencia a través del lado del polígono regular a través de la disposición (18:8), a diferencia aquellos de Euclides (ca. 325-265 BC), *Elementos*, Libro IV; donde el lado es consecuencia de la inscripción en la circunferencia (41).

En consecuencia, conociendo la medida de la capilla se determina el ancho del deambulatorio (a_2) y se deduce el lado (c_i) [$c_i=1/4,5 a_2$] (Figura. 6.a); o viceversa, dado el ancho total de la catedral se puede determinar la medida de la capilla radial [$a_2 = 4,5 c_i$] (Figura. 6.b).

La simulación informática del método de Guarç, con la proporción 9:8, arroja unos resultados matemáticos más precisos que los desarrollados por la tratadística de los siglos (XV-XVII). La proporción (9/8), aparece en los códices de la catedral, tanto en la traducción y comentario de Calcidio del *Timeo* de Platón (f.350), (ACTo 80) (ACTo), como en el *Comentario del Sueño de Escipión* de Macrobio (f.400) (ACTo 236), como la relación entre el entero y su octavo (1+1/8), a lo que denominan *epogdous* (42).

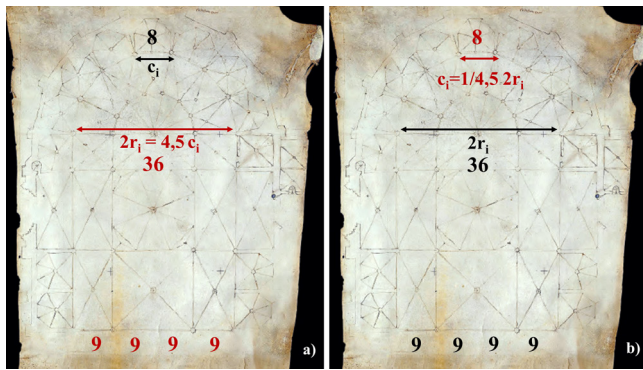


Figura 6. Desarrollo aritmético geométrico de Guarç (ca. 1345-1380).

El principio podría ser interpretado desde el punto de vista del *quadrivium*, de manera aritméticamente $9/8 = 9/9 + 1/8 = 1 + 1/8$, desde la geometría como la relación de un cuadrado y su cuarto. Desde la proporción musical como al intervalo de la segunda mayor o también tono mayor, y desde la astronomía como la distancia al Sol; a Júpiter 9 y al doble de la de Venus 4. Pero lo más potente es que resuelve un problema geométrico a través de una solución aritmética.

También puede ser trazados por métodos empíricos o de ajustes como en el caso del ajuste de los cartabones de la *Primera y segunda parte de la carpintería hecho por Diego López de Arenas* (1619) (43).

3.1. El trazado de la girola de la Catedral de Tortosa

Para determinar la medida del patrón geométrico del ábside, se recogen las referencias de las fuentes directas. Son el caso, la sección de la catedral de Milán del dibujo M1 (c.1387-1390) atribuido a Antonio de Vincenzo (1350-c.14 02) (44) (Figura 7.a), la que aparece en la edición de Vitruvio (1521) de Cesare Cesariano (c.1483-1543) (45) (Figura 7.b), y las líneas auxiliares del pergamino de Guarç (Figura 7.c) donde la proporción se establece desde los ejes y caras interiores de los muros. De esta manera, se permite fijar biectivamente las medidas del TLS. Los diseños de Vincenzo y Guarç se basaban en un esquema proporcional con ejes auxiliares. En consecuencia, el esquema metrológico de la obra pudo haber utilizado puntos interiores de mampostería que ahora son inaccesibles.

La construcción de la girola y la articulación de las capillas hexapartidas de la catedral de Girona (1312), es similar al posterior proyecto de Antoni Guarç para la catedral de Tortosa

(ca. 1345-1380), y muy diferente a la obra realmente ejecutada en 1383, con capillas radiales en forma de crucería. Analizando las medidas (TLS) y comparándolas con el modelo de Guarç podemos reinterpretar el replanteo de la catedral de Tortosa.

3.2. Análisis de los resultados paramétricos (TLS)

Para determinar el ancho total de la girola, determinamos diez radios auxiliares ($rg_1 - rg_{10}$), desde el centro de clave del presbiterio al pie del muro de cerramiento en su cara interior. Obsérvese que la medida se toma por el radio cuyo punto sería tangente a la circunferencia, la cual es igual al fondo de las capillas (c_1, c_9), y diferente a la profundidad de las capillas ($c_2 \dots c_8$). De esta manera, se obtiene que el valor más probable $c_9(rg_1-10)$ es (17,500 m). Se determina el error medio cuadrático ($e_c = 0,065$ m), el error máximo ($e_m = 0,205$ m) y el error medio cuadrático de la media ($c_m = 0,065$ m), obteniendo un del error relativo (e_r) en el intervalo [17,565-17,435 m]. Si tomamos un valor de referencia (17,423 m) que es equivalente a 75 palmos, podemos observar que está dentro del intervalo de referencia de la metodología (17,423± 0,065 m (Figura 8).

Para determinar la medida de las nueve capillas radiales ($c_1 \dots c_9$), y revisando las líneas auxiliares (T6.2) y (T6.3) (Figura 7.c), situadas en el deambulatorio, en los puntos de coincidencia del arco total de la bóveda de crucería de las capillas radiales ($c_1 - c_9$), con el eje de los pilares $P_1 \dots P_{10}$ el valor más probable es ($c_{a(c1-9)} = 5,538$ m). El error medio cuadrático ($e_c = 0,090$ m), el error máximo ($e_{m(c1-9)} = 0,225$ m) y su el error medio cuadrático de la media ($c_{cm(c1-9)} = 0,075$ m), obteniendo un del error relativo ($e_{r(c1-9)}$) que está comprendido entre [5,613-5,463 m]. En el plano de Guarç la escala de 8 unidades corresponde a 3 canas o 24 palmos (5,575 m), estando dentro de nuestro marco de referencia. Unos resultados similares se obtienen analizando las siete capillas radiales ($c_2 - c_8$) donde los valores de referencia están entre (5,645 m) y (5,483 m) y por tanto dentro de las 3 canas (Figura 9).

Si analizamos los diez radios del deambulatorio ($rd_1 - rd_{10}$), en el intervalo [12,506–12,439 m], no está comprendido en un valor de referencia de 54 palmos (12,544 m), pero si dentro del error metodológico (12,544± 0,065 m) del 1,577%. Comprobando los radios en la cara interior del muro de cerramiento de 3 palmos, el valor de referencia está comprendido entre [12,234-12,202 m], en el rango de 52,5 palmos (12,196 m), con lo que el interior del deambulatorio tendría un valor metrológico de 105 palmos, corroborando que las capillas se replantean a 54 palmos de la clave mayor.

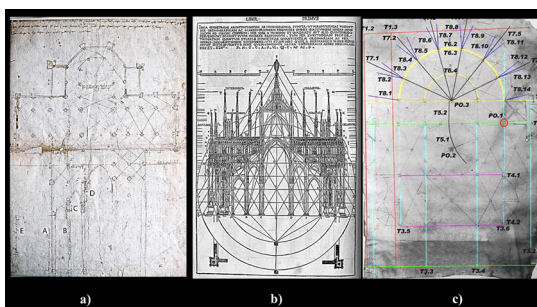


Figura 7. a) Catedral de Milán (c.1387-1390) de Vincenzo; b) Vitruvio (1521) de Cesariano; c) Traza catedral de Tortosa (c. 1345-1380) de Guarç.

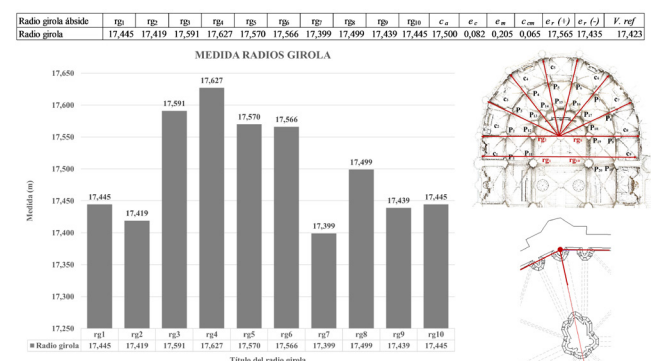
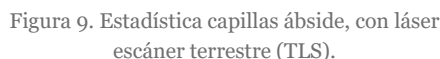


Figura 8. Análisis estadístico girola, láser escáner terrestre (TLS).

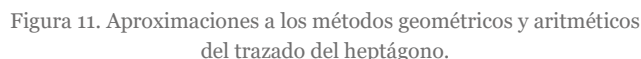


Los centros de los pilares del presbiterio (P_{11} - P_{20}), y los 10 radios (rp_1 - rp_{10}) están situados en a una distancia más probable de ($c_a = 6,249$ m), con un valor relativo entre $[6,278$ - $6,219$ m], dentro de medida de ($6,272$ m), que corresponde a la mitad de los 54 palmos de donde se trazan las capillas radiales (Figura 10). Los centros de los pilares P_{12} y P_{19} no están a la misma distancia que sus homólogos (P_{11} - P_{12}) y (P_{19} - P_{20}), ya que no tienen la misma dimensión.

Podemos especular con el método geométrico que pudieron usar para replantear las capillas radiales. La mayoría de los métodos geométricos basados en el de Abu'l-Wafa (c.993-1008) y heredados por Alberto Durero (1525) que construyen el heptágono a partir de la altura del triángulo $\sqrt{3}/2$ por lo que el tetradecágono tendría la mitad de esta medida ($\frac{1}{2}\sqrt{3}/2=0.4330$).

Existen aproximaciones buscando la relación entre la base del triángulo y su altura; caso de la proporción [7:6] de Gerberto de Aurillac (c. 950-1003) de medida (0,4286) (46). Gabriel Stornaloco en Milán en 1392 utiliza la proporción de [8:7] (0,4375) (47).

Las noticias sobre las aproximaciones aritmético-geométricas entre el radio y el lado del heptágono, como las de Herón de Alexandria (c.20-62) con relación [7:6] (0,4286), y la de Antoni Guarc (c. 1345-1380) [9:8] de manera que el tetradecágono tiene un lado de (0,8889) (Figura 11).

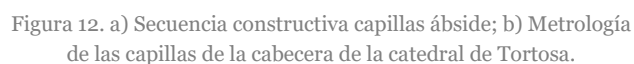


Se analiza la relación entre el lado del tetradecágono (ci) y los ejes radiales del deambulatorio (rdi). Se considera el lado del tetradecágono (ci) como la altura (h) del triángulo, respecto al radio del deambulatorio (ri), considerado como el lado (d) del triángulo. Así, la relación de los valores más probables de las capillas radiales ($c_{a(c2-8)}=5,564$ m) y el del radio ($c_{a(rdi-9)}=12,553$) tienen una relación ($c_{a(c2-8)}/0,5 c_{a(rdi-9)}=0,8864$) que es un valor más cercano a la resolución de Guarc (9/8).

En el caso de la catedral de Tortosa, la primera capilla que se construyó (c₁) fue la del Norte, edificándose después sobre la secuencia ordenada de Norte a Sur (c₁, c₂, c₃...c₉) a modo de cinturón (Figura 12.a). La condición metroológica se basa en el ancho de la capilla con 24 palmos, o tres canas de Tortosa, construyendo un ancho total interior de 150 palmos, igual al número de alabanzas del *Libro de los Salmos*, a la vez que en el atribuido a San Isidoro de Sevilla, del *Libro de los Numeros* (48), este número toma significado a través de las Sagradas Escrituras de número perfecto y de aquellos que son predeterminados por Dios hacia la vida eterna.

La luz de las capillas radiales tiene una profundidad de 21 palmos, de manera que la construcción metrológica es [21-108-21] palmos (Figura 12.b).

La actual catedral de Tortosa tenía el centro ocupado, en el momento de su construcción, por el ábside románico, por lo que no se podía determinar directamente el diámetro del deambulatorio; el despliegue de la girola se realizó con el lado del tetradecagono, equivalente a 24 palmos, resolviendo la



circunscripción en una imaginaria circunferencia de 108 palmos. El trazado del tetradecágono, con la relación del radio del deambulatorio (18:8), con la nave lateral de (9:8) en consonancia con los criterios metrológicos derivados del orden neoplatónico medieval.

4. LA SECCIÓN DEL ÁBSIDE DE LA CATEDRAL DE TORTOSA

Leon Battista Alberti (1404-1472) advertía en su segundo libro, *De re aedificatoria* (1443-1452) de la importancia de la sección para la definición del proyecto arquitectónico, considerando la perspectiva como inadecuada, ya que el objeto pierde condición de su realidad formal (49). Cesare Basilio Girolamo Saluzzo (1778-1853), publicó el *Trattati d'architettura civile e militare* (c. 1475-1495) de Francesco di Giorgio (1439-1502), donde aparecerá el despliegue de la sección de un edificio del Codex Magliabechianus II.I. 141 Biblioteca Nazionale Centrale Firenze (fol. 41r) (50) (Figura 13. a).

Por otra parte, aparecen las primeras representaciones de la sección arquitectónica en la tratadística renacentista, es el caso de Notre-Dame de Paris de Jean Pelerin (c.1445-c.1524) publicada en la *De artificiali perspectiva* (1505) (51) (Figura 13. b). La metodología de la sección gótica difundida en la edición de Vitruvio de Cesare Cesariano (c.1483-1543) ilustra una sección *ad triangulum* de la catedral de Milán (Figura 7.b). Walther Hermann Ryff (c. 1500-1548) la reproduce en la *Der furnembsten, notwendigsten, der gantzen Architectur angehörigen mathematischen vnd mechanischen Künst eygentlicher Bericht* (1547) (52), publicándola en su edición teutónica del Vitruvio de 1548 (53). A la vez, Philibert de l'Orme (1514-1570) planteó el desarrollo proporcional de una sección en el *Le premier tome de l'architecture* (54) (Figura 13.c).

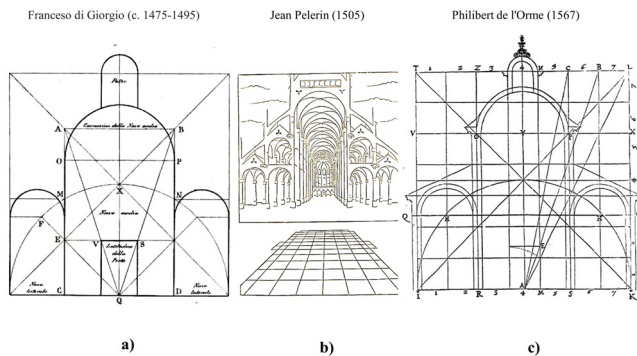


Figura 13. Despliegue de la sección en la tratadística del Renacimiento.

4.1. El despliegue de la sección

Tomando como referencia los debates del Duomo de Milán y la edición del Vitruvio (1521), Ambrogio Nava (1791-1862) reinterpretó la sección de la catedral para poder explicar el despliegue de la sección de acuerdo con un sistema proporcional entre las medidas en planta (x) y alzado (y) (55) (Figura 14.a). Reiterará la teoría Edoardo Arborio Mella (1808-1884) en los *Elementi di architettura gotica da documenti antichi* (56) (Figura 14.b).

Esta misma metodología es seguida en el análisis del concurso de la fachada del Duomo milanés (1886) por Giuseppe

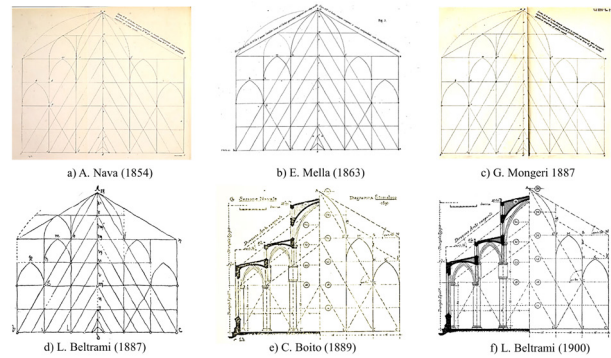


Figura 14. Despliegue de la sección en la tratadística del ochocientos derivada de las fachadas neogóticas.

Mongeri (1812-1888) (57) (Figura 14.c) y Luca Beltrami (58) (Figura 14.d). También en la comparación entre la sección constructiva del Duomo y su sistema proporcional publicada por Camilo Boito (1836-1914) (59) (Figura 14.e) y utilizada también por Beltrami en *Il coronamento nella fronte del duomo di Milano in base ad antichi disegni in parte inediti: con prefazione in risposta al voto di sette architetti* (60) (Figura 14.f).

Un precedente de esta tipología compositiva podría ser el esquema proporcional utilizado en le *Vesci une glize d'esquarie, ki fu esgardée a faire en l'Ordene de Cistiaus* de Villard de Honnecourt (c.1175-1240) (BnF. ms. fr. 190093, fol. 14v. Lam. 27). En su análisis, J.B.A. Lassus (1807-1857) muestra extrañeza al modelo de un ábside cuadrado generado a partir de una trama ortogonal (61).

El Renacimiento aportó la representación a una descomposición de retículas de base geométrica para determinar la *Proporzioni del corpo umano*, del tratado *De ingeneis* (c.1420) de Pietro Mariano, el Taccola (1381-c.1458), (CIm. 197, fol. 36v Bayerische Staatsbibliothek) (Figura 15.a).

Esta base cosmológica se incorporó a las interpretaciones de los despliegues de la sección propuestos por el *matematicus expertus artis geometria* Gabriele Stornaloco de Piacenza de Paul Frank (1878-1962). *The secret of the medieval masons* (62) (Figura 15.b) y Guiseppe Valentini en *Il Duomo di Milano. Una disputa medievale sul modello del tempio* (63) (Figura 15.c).

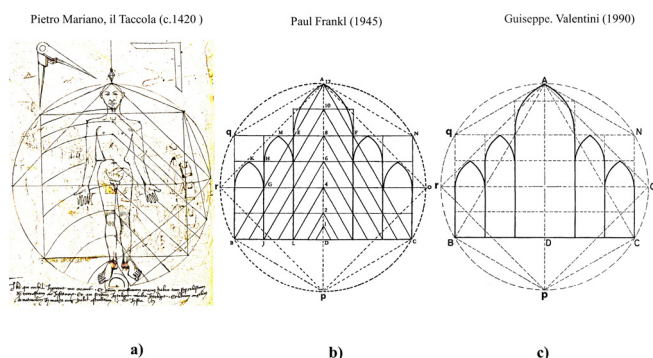


Figura 15. La interpretación cosmológica del despliegue de la sección.

4.2. Análisis de los resultados paramétricos (TLS)

Para determinar la medida de la altura de las nueve capillas radiales ($c_1...c_9$), se toma como referencia el zenit de bóveda de crucería de las capillas radiales (c_1-c_9), situado en el cuello de la clave, siendo el valor más probable ($h_{ca(c1-g)}=10,469$ m). El error medio cuadrático ($e_c=0,134$ m), el máximo ($e_{m(c1-g)}=0,335$ m) y su el error medio cuadrático de la media ($e_{cm(c1-g)}=0,112$ m), obteniendo un del error relativo ($e_{r(c1-g)}$) que está comprendido entre [10,581-10,357 m]. El rango del resultado estadístico está dentro de la medida metrológica de 45 palmos. (Figura 16).

La altura de las nueve bóvedas del deambulatorio ($h_{d1}...h_{d9}$) tiene como valor más probable ($h_{da(c1-g)}=16,007$ m). El error relativo ($e_{r(c1-g)}$) está comprendido entre [16,070-15,94 m] dentro del rango de los 69 palmos y cercano a los 70 palmos dentro de error metodológico (Figura 17).

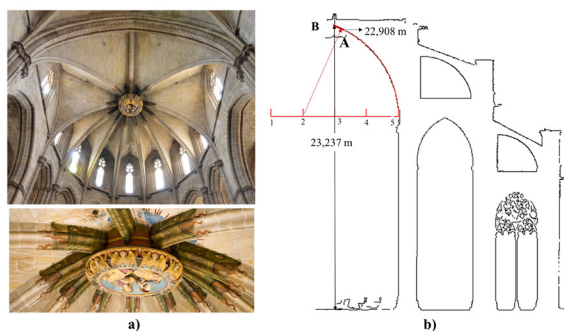
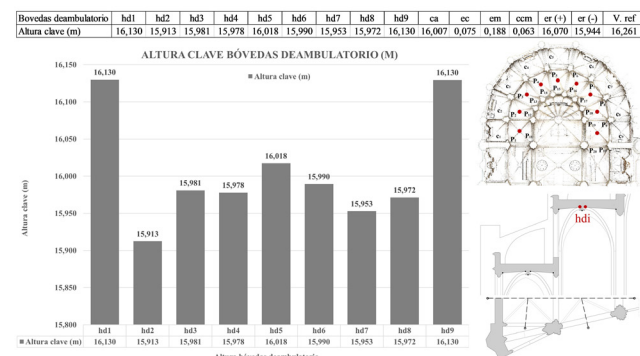
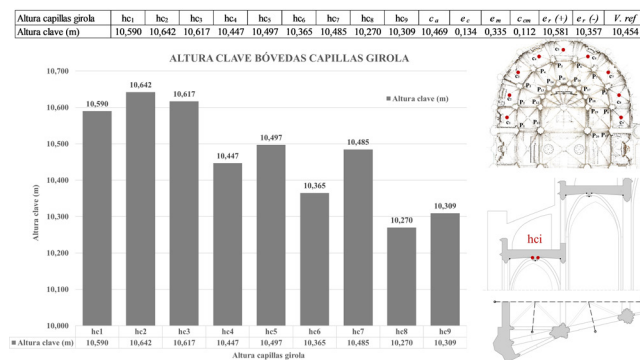


Figura 18. Determinación altura del presbiterio; a) Piedra clave y detalle del cuello, b) Metodología para determinación indirecta de la altura del presbiterio mediante (TLS).

En el caso de la clave del presbiterio, que dispone de un diámetro de 10 palmos hace que exista una sombra sobre la nube de puntos sobre su cuello (Figura 18.a). La sección de la bóveda se determina a través de los puntos (TLS), conociendo el punto A (22,908 m), y dado tiene la sección a cuarta, podemos deducir prolongando dicho arco, el centro de clave que se situaría en (B) a una altura de 23,237 m respecto al pavimento del presbiterio (Figura 18.b). Tomando como valor metrológico el de 100 palmos (23,230 m), se obtiene un valor similar al resultado indirecto determinado por (TLS).

4.3. El despliegue de la sección de las capillas radiales

Analizando la altura de las capillas radiales (45 palmos) con relación a la proporcionalidad de la teoría de la sección gótica con respecto a la metrología de la planta, se observa que en la mitad del deambulatorio ($27+1/2 \cdot 27=40,5$ p) se forma una proporción entre la altura de la capilla y el deambulatorio (45/81), que expresa un desarrollo de una relación de (9÷5) (Figura 19.a). El despliegue teórico del deambulatorio se realiza desde el muro interior de este espacio medido sobre el eje de los pilares (P_1-P_{10}), el valor de estos puntos ($e_{r(c1-g)}$) está comprendido entre [12,234-12,202 m] dentro de la metrología de 105 palmos. Comprobando la medida sobre las bóvedas desde la clave la medida ($e_{r(b1-g)}=[12,065-11,860]$) y que proyectada sobre el eje del pilar con el que forma un ángulo, con un valor de escala de ($f=1,026$) nos daría un valor similar al establecido por los radios de 105 palmos.

El valor de referencia de las claves del deambulatorio [16,070-15,94 m] está dentro del rango de los 69 palmos. Dado que el despliegue de la planta para (9÷5) habría de ser 58+1/3 palmos está lejos del valor del remate de las capillas absidiales. Si realizamos una comprobación para la relación (9÷6), la altura de las

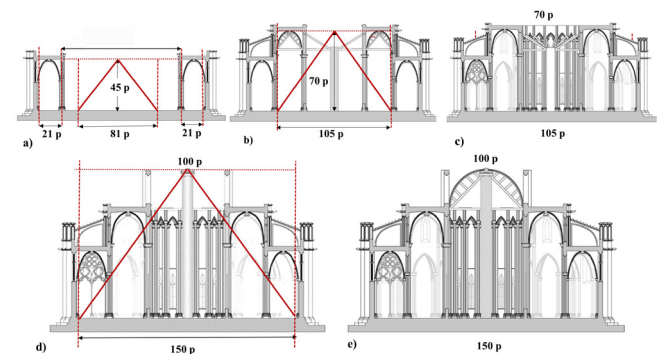


Figura 19. Despliegue de la sección catedral de Tortosa.

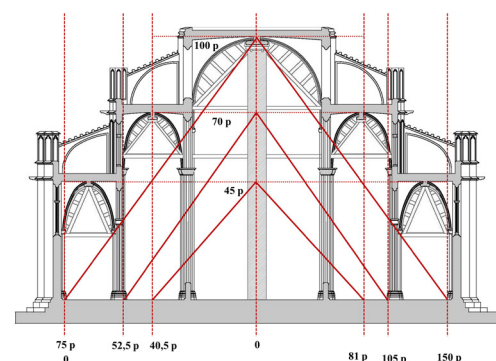


Figura 20. Fases constructivas despliegue de la sección. Proporción capillas del ábside (5÷9), deambulatorio y presbiterio (6÷9).

bóvedas del deambulatorio habrían de situarse a los 70 palmos (Figura 19.b,c). La clave mayor se sitúa a 100 palmos sobre un ancho total de 150 palmos desde la girola hasta la base de la cara interior del muro de la fachada (Figura 19.d,e). Con estos valores podemos plantear un despliegue en planta de las medidas [81-105-150 palmos], elevados en su altura de forma metrológica correspondiente a [45-70-150 palmos] (Figura 20).

4.4. Discusión del replanteo de sección

Si analizamos la ejecución de la obra se observa que al acabar las capillas del ábside con una proporción (9÷5) (Figura 21.a) se cambia a una proporción (9÷6) (Figura 21.b). La nueva proporción la establecen Pascacio Xulbi (ac. 1383- 1441) y Juan Xulbi (ac. 1416-1428), maestros que participaron en el debate sobre la nave única de Girona (1417), donde ya hablan de proporción a *terça* (3:2) y que la imponen unos años después en Tortosa (Figura 21.c). Ellos serán los responsables del replanteo del deambulatorio y como consecuencia del presbiterio. También de la colocación de la piedra clave, de diez palmos de diámetro rodeada con 10 ángeles (64). Serán los responsables de introducir las molduras de los pilares del presbiterio que han de encajar con los nervios de las bóvedas y con la clave mayor situada a 100 palmos de altura.

El cambio de sección inicial de (9÷5) que había de culminar a una altura de (83+1/3 p) sirvió para magnificar visualmente la clave mayor a (100 p) (Figura 22.a). Situados bajo el centro de las claves de las capillas laterales, la imagen de la Coronación de la Virgen es tangente a los arcos formeros del presbiterio, actuando el fondo escultórico como un calado (Figura 22.b). En el *De civitate Dei* de San Agustín de Hipona cien es el número que representa la totalidad (65). De esta manera la clave de medida 10 palmos, al ser multi-

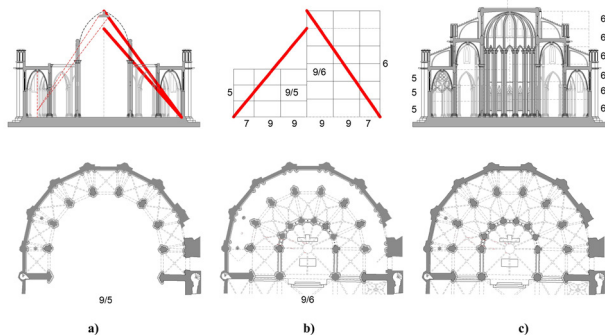


Figura 21. Fases constructivas despliegue de la sección.

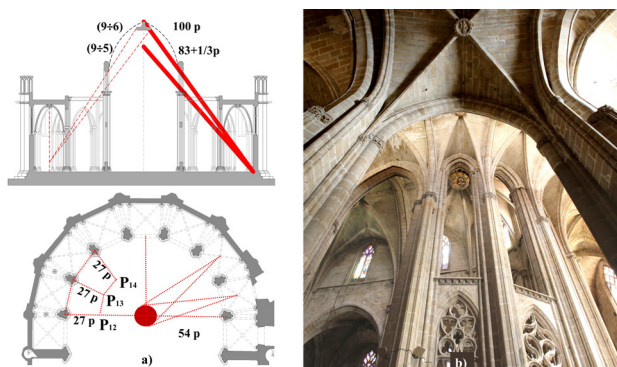


Figura 22. Cambio de la sección en el deambulatorio: replanteo del presbiterio; b) Electo de la Coronación de Santa María como calados.

plicada por 100, se convierte en un cubo que resulta 1000: mil es el número perfecto de la plenitud del tiempo (66).

5. METROLOGÍA DEL ÁBSIDE DE LA CATEDRAL DE TORTOSA

Los valores estadísticos establecidos en el replanteo de la catedral son compatibles con la metrología del proyecto de Guarc (ca. 1345-1380). Así, la expresión del desarrollo aritmético geométrico de Guarc [$2r_i = 4,5 \text{ ci}$] y [$ci = 1/4,5 \text{ } 2r_i$], se expresan como [$2r = 4,5 \times 5,564 \text{ m} = 25,038 \text{ m}$] (107,78 palmos) y [$c = 1/4,5 \times 2 \times 12,533 \text{ m} = 5,579 \text{ m}$] (24,02 palmos). Se puede definir la anchura del deambulatorio, o bien, la del lado de la capilla, y después deducir la otra dimensión. En términos metrológicos las capillas de 24 palmos (3 canas) de ancho, están trazadas equidistantemente a 108 palmos ($c_2 - c_8$) (Figura 7.a,b). Los resultados del deambulatorio tomando como medida la distancia existente entre los pilares radiales de las capillas (P1...P10), hasta el centro de los pilares del presbiterio (P11...P19), el valor metrológico es de 27 palmos, y otros 27 palmos hasta el centro de clave mayor. Esta relación es de 18/8 con respecto al ancho de las capillas radiales de 24 palmos. Por ello, la proporción entre la nave lateral y el ancho de capillas es de (9÷8).

En el estudio detallado de las molduras de la base de los pilares del ábside se observan hasta cuatro tipologías distintas. Tomando como principio que la catedral gótica fue empezada en 1347 por el muro (O), los pilares P₁ y P₁₁, son los del inicio del ábside, igual que los P₁₀ y P₂₀, que disponen de una moldura tipo (A). El pilar P₂ tiene una moldura (B), que es diferente y el resto de pilares del deambulatorio son del mismo tipo (C) y (D), mientras que en interior del presbiterio se impone otro modelo (E) (Figura 23) (67). El ábside de la catedral se replantea geométricamente a partir del eje del arco formero con un módulo de capillas radiales de módulo 24 palmos correspondiente al ancho de las capillas, colocando como profundidad la media de 21 palmos hasta el arranque del muro de cerramiento. El centro de los ejes de los pilares radiales del presbiterio se sitúa a 27 palmos (Figura 24.a). Las capillas toman la porción de (9÷5), mientras que el deambulatorio y el presbiterio lo hacen en la de (9÷6) (Figura 24.b).

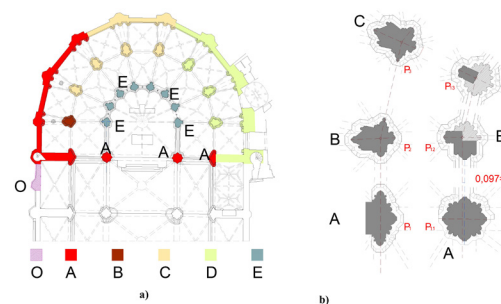


Figura 23. Anomalías geométricas del ábside.

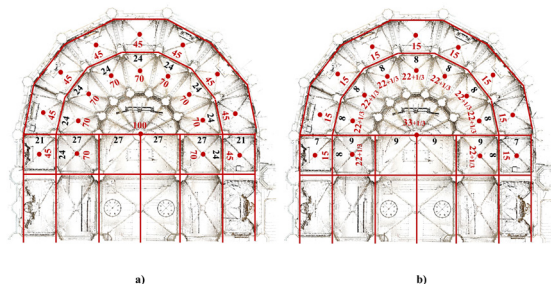


Figura 24. Metrología constructiva del ábside de la catedral de Tortosa.

6. CONCLUSIÓN

El análisis estadístico del resultado (TLS) ha permitido demostrar que el trazado metrológico del ábside heptagonal tiene una precisión metodológica de $\pm 1,502\%$. Analíticamente, se determina que, dentro del rango de precisión, el ancho total de la girola es de 150 palmos, y que las capillas radiales tienen una dimensión de 24 palmos que son 3 canas, proporción tonal (9:8) respecto a la medida de la nave lateral de 27 palmos.

La clave se sitúa a 100 palmos, y su sección final dispone de una relación (3:2) entre el ancho del deambulatorio de 150 palmos y su altura, tomando la relación sesquialtera. Las proporciones de catedral de Tortosa forman parte de la tradición del neoplatonismo del *Timeo*, que tan bien conocían sus canónigos y que han perdurado en sus códices. Este arquetipo es muy diferente a la de los maestros góticos septentrionales, con modelos de prototipo *ad triangulum* (1: $\sqrt{3}/2$) y *ad quadratum* (1:1) en los términos definidos en los debates de la catedral de Milán.

REFERENCIAS

- (1) Bork, R. (2022). A geometrical perspective on Otto von Simson's Gothic Cathedral. *Nexus Netw J*, 24, 397-421. <https://doi.org/10.1007/s00004-022-00591-2>
- (2) Viollet-le-Duc, E. E. (1845-1868). *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle*. vol. 10 Paris: B. Bance, A. Morel, V2, 372-375.
- (3) Lasteyrie, de R. (1926). *L'Architecture Religieuse en France. A L'Epoque Gothique*. Paris: Auguste Picard, 351.
- (4) Beltrami, L. (1887^a). *Per la facciata del Duomo di Milano. Parte Prima. Le Linee Fondamentali*. Milano: Tip. A. Colombo & A. Cordani, 16-36.
- (5) Viollet-le-Duc, E. E. (1863). *Entretiens sur l'architecture*, vol. 1 Paris: A. Morel et C^{ie} Éditeurs, 394.
- (6) Lund, J. F. M. (1921). *Ad Quadratum: a study of the geometrical bases of classical and medieval religious architecture*. London: B.T. Batsford, 1-4.
- (7) Moessel, E. (1926). *Die proportion in antike und mittelalter*. München: C.H. Beck, 69-108.
- (8) Ghyka, M. C. (1931). *Le nombre d'or, rites et rythmes pythagoriciens dans le développement de la pensée occidentale*. Tome I, *Les Rythmes*. Paris: Librairie Gallimard, 81-122.
- (9) Verga, C. (1980). *Il Duomo di Milano da Bramante-Cesariano a Stornaloco*. Crema: Tip. Donarini e Locatello, 25, Figura 9.
- (10) Mathonière, J.M. (2003). L'Ancien compagnonnage germanique des tailleurs de Pierre. *Fragments d'histoire du Compagnonnage*, Musée du Compagnonnage. Tours, 5: 86-90.
- (11) Sebreondi, G. C.; Schofield, R. (2016). First principles: Gabriele Stornaloco and Milan Cathedral. *Architectural History*, 56: 63-132. <https://doi.org/10.1017/arh.2016.3>
- (12) Beaujouan, G. (1963). Calcul d'expert, en 1391, sur le chantier du Dôme de Milan. In: *Le Moyen Age*. Brussels: Librairie Jubilaire, 555-563.
- (13) Laguno, E. (1829). *Noticia de los Arquitectos y Arquitectura de España desde su restauración. 4 vols*. Madrid : Imprenta Real. 1, 261-27.
- (14) Cornford, F. Mc. (1937). *Plato's cosmology. The Timaeus of Plato*. London: Kegan Paul, Trech, Trubner & Co, 66 -71.
- (15) Lluís i Ginovart, J; López-Piquer M. & Urbano-Lorente, J. (2018). Transfer of Mathematical Knowledge for Building Medieval Cathedrals. *Nexus Network Journal*, 20, 153-172. <https://doi.org/10.1007/s00004-017-0359-3>
- (16) Zaragoza A.; Ibáñez, J. (2014). Hacia una historia de la arquitectura en la Corona de Aragón entre los siglos XIV y XV a partir de los testeros de los templos. Ábsides construidos, ábsides proyectados e ideales y ábsides sublimes. *Artigrama*. 29: 261-303.
- (17) Lluís i Ginovart, J; Costa-Jover, A; Coll-Pla, S. (2015). Placing the keystone of the vault over the presbytery in Tortosa Cathedral, Spain (1428-40), *Construction History*. 30 (1), 1-21, (Figura 3.b).
- (18) Lluís i Ginovart J; Costa-Jover, A; Coll-Pla, S. (2014). The reconstruction of a Romanesque palimpsest using non-destructive techniques. *Informes de la Construcción*, 66: 536, e045. <http://dx.doi.org/10.3989/ic.13.184>.
- (19) Barney, S. A. (et alli) (2006). *The Etymologies of Isidore of Seville*. New York: Cambridge University Press, 377.
- (20) Clementis VIII. (1595). *Pontificale Romanum Clementis VIII Pont. Max. iussu restitutum atque editum*. Romae: apud Iacobum Lunam: impensis Leonardi Parasoli & Sociorum., 281-296.
- (21) Puig i Cadafalch, J. (1923). El problema de la transformació de la catedral del nord importada a Catalunya: contribució a l'estudi de l'arquitectura gòtica meridional. *Miscel·lània Partas de la Riba*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans, 65-87.
- (22) Font i Carreras, A. (1891). *Barcelona Cathedral. Slight considerations on its architectural beauty*. Barcelona: Imprenta y Litografía en Henrich y C^a, 9-14).
- (23) Sebastián, S. (1994). *Symbolic Message of Medieval Art. Architecture, Liturgy and Iconography*. Madrid: Ediciones Encuentro, 352-355).
- (24) Canal, J. (1832). España sagrada: tomo XLV, tratado LXXXVIII. Madrid: En la Imprenta de Don José del Collado.
- (25) Alsina, C (et. al.). (1990). *Pesos, mides i mesures dels Països catalans*. Barcelona: Curial, 37-38).
- (26) Riu, M. (1996). Pesos, mides i mesures a la Catalunya del segle XIII. *Anuario de Estudios Medievales*, 26 (2): 825-837.
- (27) Bovelles, Ch. (1542). *Livre singulier et utile, touchant l'art pratique de geometrie, compose nouvellement en françoys, par maistre Charles de Bouvelles*. Paris: Regnaud Chaudière et Claude, 5v.
- (28) Durero, A. 1525. *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheit: in Linien Ebnen vo gantzen Corporationen*. Nürenberg: Hieronymum Formschnyder, 26r-27v.
- (29) Kepler, J. (1619). *Ioannis Kepleri Harmonices mundi libri V*. Lincii Austriae, sumptibus Godofredi Tampachii bibl. Francof.: excudebat Ioannes Plancu, 32-40.
- (30) Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*. Auctore D. Carolo Federico Gauss. Lipsiae: In Commissis apud Gerh. Fleischer Jun, 454-463)

- (31) Aghayani-Chavoshi, (2010). *Ketâb al-nejârat (On what is indispensable to artisans in geometric constructions)* Tehran: Written Heritage Research Centre & Institut Français de Recherche Iran, Y47B-,Y47C, Y47D
- (32) Raynaud, D. (2012). Abū al-Wafā' Latinus. A study of method. *Historia Mathematica*, 39: 34-83. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2011.09.001>
- (33) Heideloff, C.A. (1844). *Die Bauhütte des Mittelalters in kurzgefasste geschichtliche Darstellung mit Urkunden und andern Beilagen, so wie einer Abhandlung über den Spitzbogen in der Architektur der Alten*. Nuremberg: Berlag von Johann Adam Stein, 96-97)
- (34) Roritzer, M. (1999). *Das Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit (fak. Regensburg 1486) und Die Geometria Deutsch (fak. Regensburg un 1487/88)*. Regensburg: Hürtgenwald Guido Pressler, 56-60.
- (35) Schoene, H. (1903). *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol III: Rationes dimetiendi et commentatio dioptrica*. Leipzig : Teubner, 55-59.
- (36) Friedlein, G. 1867. *De institutione arithmetica libri duo. De institutione Musica libri quinque*. In: *Aedibus BG (ed) Accedit geometria quae fertur Boetii*. Leipzig: Teubneri, 420-421.
- (37) Lundy, M. (1998). *Sacred Geometry*. New York: Wooden Books/Walker & Company, 36-37.
- (38) Finlay, A. H. (1959). Zig-Zag Paths. *The Mathematical Gazette*, 43:199.
- (39) Lluís i Ginovart, J.; Fortuny-Anguera, G.; Agustí Costa Jover, A. ; Sola-Morales Serra, P.(2013). Gothic Construction and the Traça of a Heptagonal Apse: The Problem of the Heptagon. *Nexus Network Journal*, 15: 325-348. <https://doi.org/10.1007/s00004-013-0152-x>
- (40) Lluís i Ginovart, J; Lluís-Teruel, C. (2023). Incommensurability, the Heptagon of Ignacio Muñoz (1684), and Kepler's Heresy. *The Mathematical Intelligencer*, 45, 108-117. <https://doi.org/10.1007/s00283-022-10247-1>
- (41) Heath, T. L., ed. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. 3 vols. Cambridge: University Press. vol. 2, 88-111.
- (42) Lluís-Teruel, C.; Lluís i Ginovart, J. (2023). El heptágono de fray Ignacio Muñoz y su Manifiesto Geométrico (1684). *EGA Expresión Gráfica Arquitectónica*, 47, 122-135. <https://doi.org/10.4995/ega.2023.16289>
- (43) Nuere E. (2001). *Nuevo tratado de la carpinteria de lo blanco*. Madrid: Ediciones Munilla-Leira, 68.
- (44) Ascani, V. (1991) "I disegni architetonici attribuiti ad Antonio de Vicenzo. Caratteristiche Tecniche e Ruolo Degli 'apunti grafici' nnella prassi progettuale tardogotica", *Arte Medievale. Periodico internazionale di critica dell'arte medievale*. II Serie, V. 1, 105-115
- (45) Vitruvio, M. P. (1521). *Di Lucio Vitruvio Pollione de Architectura libri dece traducti di latino in Vulgare affigurati: Comentati & con mirando ordine insigniti*. Como: Gotardo da Ponte, 15r- 15v.
- (46) Bubnov, N. (1899). *Gerberti postea Silvestri II papae opera mathematica (972- 1003)*. Berlin: Friedländer, 43-45.
- (47) Ackerman, J.S. (1949). "Ars Sine Scientia Nihil Est" Gothic Theory of Architecture at the Cathedral of Milan, *The Art Bulletin*, 31(2), 84-11.
- (48) Pardillos, M.T. (2000). The book of numbers attributed to Saint Isidore, bishop of Seville. *Emblemata*, 6, 285-304.
- (49) Alberti, L.B. (1485). *De re aedificatoria*. Florence: Niccolò di Lorenzo Alemanno, fol 20 r-21 v.
- (50) Saluzzo, C. 1841. *Trattato Architettura Civile e Militare di Francesco di Giorigio Martini achitectto senese del secolo XV obra per prima volta publicato*. Torino, Tav. III, Figura 5.
- (51) Pelerin, J. (1505). *De artificiali perspectiva*. Viator. Tulli: Petri Iacobi, Illustr., carta [XVII] verso.
- (52) Ryff, W. H. (1547). *Der furnembsten, notwendigsten, der gantzen Architectur angehörigen mathematischen vnd mechanischen Künst eygentlicher Bericht: vnd vast klare, verstendliche Vnterrichtung, zu rechtem Verstandt der Lehr Vitruuij, in drey furneme Bücher abgetheilet: als, Der neuen Perspectiua ... der Geometrischen Büxenmeisterey, vnd Geometrischen Messung*. Nürnberg: Johann Petreius, fol. 22 v-23 r.
- (53) Vitruvius, M. P. (1548). *Der furnembsten notwendigsten der gantzen Architectur angehörigen mathematischen und mechanischen Künst eygentlicher Bericht und verstendliche Unterrichtung*. Johan Petreius. Nürnberg, Propo. XXI-I-XXIII.
- (54) De l'Orme, P. (1567). *Le premier tome de l'architecture*. Paris: Frédéric Morel, 235 r.
- (55) Nava, A. (1854). *Memorie e documenti storici intorno all'origine, alle vicende ed ai riti del Duomo di Milano Publicato per cura del Conte Ambrogio Nava*. Milano: Tipografia de Borroni e Scotti, 26 bis.
- (56) Mella, E. A (1863). *Elementi di architettura gotica da documenti antichi*. Litog^a. Corbetta edit^e prop^e ,Tav XIX, Figura3)
- (57) Mongeri, G. (1887). *Per la facciata del Duomo di Milano. 1887. Memorie e Commenti*. Milano. Prem. Tipo-Litografia degli Ingegneri', 36 bis Vol. XXXV, Tav. II.
- (58) Beltrami, L. 1887b. *Per la facciata del Duomo di Milano. Parte Terza. La Teoria*. Milano: Tip. A. Colombo & A. Cordani.
- (59) Boito, C. 1889. *Il Duomo di Milano e i disegni per la sua facciata*. Milano: Tipografia di Luigi Marchi, 121.
- (60) Beltrami, L. (1900). *Il coronamento nella fronte del duomo di Milano in base ad antichi disegni in parte inediti :con prefazione in risposta al voto di sette architetti*. Milano: Tipografia Umberto Allegretit, 46.
- (61) Lassus, J.B. 1858. *Album de Villard de Honnecourt. Architecte du XIIIe siècle*. Paris: Imprimerie impériale, 113-120, Plancha 27).
- (62) Frank, P. (1945).The secret of the medieval masons. *The Art Bulletin*, 27: 36-75, 59.
- (63) Valentini, G. (1990). *Il Duomo di Milano. Una disputa medievale sul modelo del tempio*. Milano: Nuovo Edizioni Duomo, 70.
- (64) Lluís i Ginovart, J., Costa-Jover, A., Fortuny i Anguera, G. (2015). Elementos auxiliares de construcción en la arquitectura gótica. El pilar «major» de la catedral de Tortosa. *Informes de la Construcción*, 67, 537, e057.
- (65) Aurelius Augustine. 1876. *The City of God, Volume II. Translated by the Rev. Marcus Dods, M.A.* Edinburgh:T. & T. Clark, 357.

- (66) Lluís-Teruel, C. (2019). El quadrivium y la catedral gótica, *Módulo Arquitectura CUC*, 22, 1, 195-218. <https://doi.org/10.17981/mod.arq.cuc.22.1.2019.08>
- (67) Lluís i Ginovart, J., Costa-Jover, A., Coll-Pla, S. (2016). La determinación del concepto de homogeneidad *versus* resistencia en los pilares de una catedral gótica mediante técnicas no invasivas. *Informes de la Construcción*, 68, 543, e155. <https://doi.org/10.3989/ic.15.119>