

Problemas asociados al equilibrio en estructuras de membrana con bordes rígidos

Equilibrium problems in membrane structures with rigid boundaries

G. Viglialoro^(*), J. Murcia^(**), F. Martínez^(***)

RESUMEN

Este trabajo aborda el análisis del equilibrio de una membrana con borde rígido. La idea de utilizar las membranas en aplicaciones tales como las pasarelas, una nueva tecnología que se está desarrollando en España, requiere un análisis estructural muy ajustado. Debido a los esfuerzos de tracción, la membrana se identifica a una superficie con curvatura de Gauss negativa. De esta forma, el equilibrio se expresa directamente por medio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en términos de la forma de la membrana y del tensor de esfuerzos. A partir de dichas ecuaciones, se pueden considerar dos enfoques complementarios, aquí llamados *problema directo* y *problema dual*. Se analizan ambos problemas, estudiando sus posibles soluciones con el objetivo de obtener resultados prácticos. En particular, se profundizan los principales aspectos analíticos del problema directo, se propone un método numérico para la resolución y, finalmente, se presentan ejemplos de solución analítica y numérica.

445-23

Palabras clave: membrana; pasarela; borde rígido; problema elíptico; problema hiperbólico.

Notaciones

– Si $f(x,y)$ es una función de dos variables, utilizaremos la siguiente convención:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{,1} = f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad y \quad f_{,2} = f_{,y} = \frac{\partial f}{\partial y} \\ f_{,11} = f_{,xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad y \quad f_{,22} = f_{,yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ f_{,12} = f_{,xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{,yx} = f_{,21} \end{array} \right.$$

SUMMARY

This paper presents the equilibrium analysis of a membrane with rigid boundary. The idea of using membranes in applications such as footbridges, a new technology being developed in Spain, implies a more accurate analysis procedure. Due to the tension stresses, membrane is identified to a negative gaussian curvature surface. Equilibrium is directly expressed by means of partial differential equations, in terms of the membrane shape and stress tensor. Starting from these equations, two dual approaches can be defined, namely direct problem and dual problem. Both problems are analyzed, studying their possible solutions in order to obtain practical results. In particular, the main analytical aspects of the direct problem are discussed, a numerical resolution procedure is proposed and, finally, analytical and numerical solution examples are presented.

Keywords: membrane; footbridge; rigid boundary; elliptic problem; hyperbolic problem.

– Si $\tau_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1,2$ y $\beta = 1,2$) es un tensor del segundo orden, utilizaremos la siguiente convención:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{11} = \tau_{xx} \\ \tau_{12} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{21} \\ \tau_{22} = \tau_{yy} \end{array} \right.$$

– En algunos casos se utilizará la *notación tensorial de Einstein*⁽¹⁾

⁽¹⁾Para una primera introducción a esta notación, es posible ver las notas en el siguiente enlace: <http://w3.mecanica.upm.es/mmc-igt/Apuntes/indices.pdf>.

^(*)Centro de Supercomputación de Galicia (CESGA), España

^(**)Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja (CSIC), Madrid (España)

^(***)Universidad Politécnica de Cataluña (España)

Persona de contacto/Corresponding author: gviglial@cesga.es (G. Viglialoro)

1. INTRODUCCIÓN

La idea de utilizar estructuras de membrana para nuevas aplicaciones en ingeniería civil, tales como pasarelas, implica responsabilidades estructurales más altas y esfuerzos más intensos debido a las cargas de uso, a la forma muy rebajada de la membrana y al fuerte pretensado necesario para obtener la rigidez requerida; en consecuencia hace falta un adecuado análisis bidimensional (2-D). En este contexto, se está desarrollando en España una nueva tecnología para pasarelas (la membrana funciona a la vez como tablero y estructura), de la cual existe ya un prototipo (véase el trabajo de Murcia, 2007).

En las pasarelas el pretensado de la membrana es decisivo, porque gobierna la rigidez de la misma para limitar su deformabilidad en servicio.

Así, el pretensado ha de tener un valor importante y la fase de pretensado (pretensado + peso propio) destaca claramente como fase de referencia para el análisis estructural y debe ser estudiada de modo ajustado en el continuo bidimensional que es la superficie de la membrana.

Entonces, al estudiar la fase de pretensado, el peso propio de la membrana es de muy bajo valor con relación al pretensado y puede no ser considerado. Esto, irrelevante en el análisis (problemas planteados y conclusiones), tiene alguna ventaja de cara al diseño de la membrana, como se indicará al final.

Un factor central en el análisis de la fase de pretensado, la de referencia como se ha dicho, es el equilibrio de la membrana, que relaciona los esfuerzos (de pretensado, si no se considera el peso propio) y la forma de la membrana, forma de referencia para obtener la forma en otras fases.

Como se verá en este trabajo, del equilibrio por sí solo se pueden deducir bastantes cosas; y, en particular, la forma de la membrana.

Esto ya sucede en el *Método de la Densidad de Fuerzas*, unidimensional (véase

la referencia Linkwitz, 1999), basado sólo en ecuaciones de equilibrio. Este método, muy utilizado en la práctica de las cubiertas para buscar la forma de la membrana, modela ésta como una red de cables (estructura unidimensional, 1-D) inscrita en su superficie.

Existen métodos que, deformando la membrana (problema general: ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y material), obtienen formas de equilibrio (Bonet and Mahaney, 2001; Tüzel and Erbay, 2004). Pero, si como se ve aquí, sólo con el equilibrio puede hacerse, es más directo, sencillo y natural obtener tales formas *sin deformar nada*.

Cosa muy distinta es obtener la forma de la membrana en otras fases a partir de la de referencia, para lo cual hay que deformar físicamente la estructura y reflejar esto en el análisis.

Volvamos al equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio en membranas son, claro está, las mismas del análisis de los estados de membrana en láminas, ecuaciones bien conocidas (véanse, por ejemplo, los trabajos de Timoshenko and Woinowsky-Krieger, 1959; Haas, 1964; Flugge, 1973). Pero los problemas son del todo diferentes.

Es muy importante destacar y explicar la afirmación anterior. Las láminas son estructuras con rigidez material (espesor, aunque sea pequeño) y así potencialmente con cualquier forma, no hay que buscarla; las membranas son estructuras sin rigidez material (espesor mínimo, rigidez por tracción) y hay que buscar su forma. Las láminas pueden tener esfuerzos de membrana de cualquier signo, compresión y/o tracción; las membranas trabajan sólo a tracción, con clara implicación en su forma (de tipo silla de montar en las abiertas o con bordes, como aquí, o abombada en las cerradas o inflables).

De esta forma, con las mismas ecuaciones, los problemas de equilibrio son diferentes. Pero, además, hay que subrayar que los citados análisis en láminas se limitan a casos particulares, normalmente a la obtención de esfuerzos de membrana para formas

dadas, sencillas (elipsoide de revolución, paraboloides hiperbólicos, etc.), sin entrar en la problemática matemática de estudio de solución o soluciones. Por el contrario, aquí el estudio del equilibrio se aborda de modo matemático con un planteamiento, en principio, totalmente general en esfuerzos y formas.

Por tanto, este trabajo estudia el equilibrio de una membrana con bordes, donde aparecen distintas ecuaciones que ligan sus esfuerzos (de tracción) y su forma. Para poder obtener algo de ahí se plantean sendos casos, complementarios, fijando bien los esfuerzos o bien la forma. Ambos problemas se analizan matemáticamente para ver qué ocurre. En todo subyace la idea de ver si existe *isostatismo*, esto es, si tan sólo del equilibrio se obtienen resultados.

En particular, los esfuerzos de membrana se identifican con un tensor *definido positivo* (sólo tracciones) y su forma con una superficie con curvatura de Gauss *negativa*. El equilibrio se plantea directamente a través de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Así, se define el *problema directo* fijando el tensor de esfuerzos y , de forma complementaria, el *problema dual* fijando la forma de membrana.

El hecho de que el estudio se particularice a la fase de pretensado (y de que en ella se desprece el peso propio), tal como se ha explicado más arriba, no resta generalidad a lo fundamental, como se insistirá al final del trabajo.

El trabajo se complementa con el análisis de casos del problema directo con solución analítica y se implementa un procedimiento numérico general para el que se comprueba su eficacia por confrontación con los casos analíticos. Por otro lado se presentan ejemplos de problema dual analíticamente resolubles.

2. ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN LA MEMBRANA

Identifiquemos la membrana con una superficie S con *curvatura de Gauss negativa*. En particular, S es la gráfica de una función $z(x,y)$, definida en un dominio *acotado* D del plano $x - y$, tal

que $z_{,xx}z_{,yy} - z_{,xy}^2 < 0$ (la Figura 1, idealiza un elemento diferencial de membrana dS y su correspondiente proyección dD en el plano $x - y$, así como los relativos esfuerzos de membrana y proyectados).

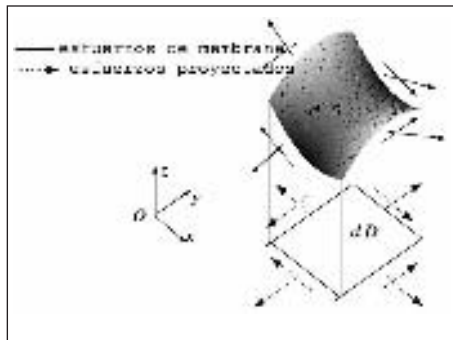
Como se sabe, el peso de la membrana es muy bajo y, en general, puede despreciarse para la fase de pretensado; más en particular para altos esfuerzos de pretensado como es el caso. Entonces, en esta fase no se considerará ninguna carga así que las ecuaciones de equilibrio serán homogéneas.

Con referencia a la Figura 2, si se indica con $N_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1,2$ y $\beta = 1,2$) el tensor de esfuerzos proyectados (esto es, fuerza por unidad de longitud: tensión constante en el espesor de la membrana), el equilibrio plano se expresa como:

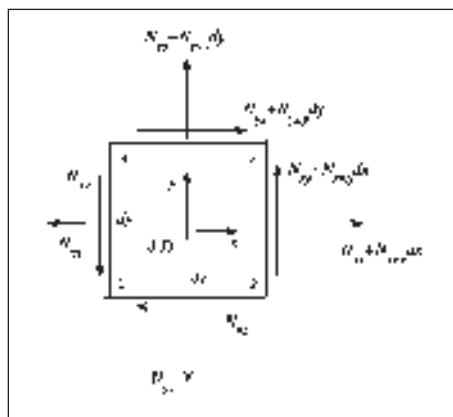
$$\begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0, \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Además, tal como muestra la Figura 3, las componentes verticales de los esfuerzos pueden ser calculadas en términos de los valores de $N_{\alpha\beta}$ y de las pendientes de la

1. Elementos de membrana y tensor de esfuerzos: membrana y esfuerzos proyectados.
2. Tensor de esfuerzos proyectados.



1



2

3. Proyecciones verticales del tensor de esfuerzos $\tilde{N}_{\alpha\beta}$

superficie S . De esta forma, equivalentemente, el equilibrio vertical se escribe como:

$$(N_{xx}z_{,x} + N_{yx}z_{,x}) + (N_{xy}z_{,y} + N_{yy}z_{,y}) = 0,$$

esto es:

$$z(N_{xx,x} + N_{yx,y}) + z_y(N_{xy,x} + N_{yy,y}) + N_{xx}z_{,xx} + 2N_{xy}z_{,xy} + N_{yy}z_{,yy} = 0. \tag{2.2}$$

Finalmente, usando el sistema (2.1), las ecuaciones de equilibrio en términos de los esfuerzos proyectados $N_{\alpha\beta}$ se resumen en el siguiente sistema:

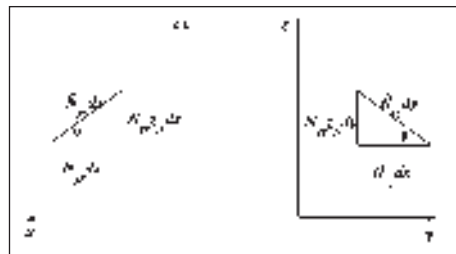
$$\begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \text{ en } D, \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0 \text{ en } D, \\ N_{xx}z_{,xx} + 2N_{xy}z_{,xy} + N_{yy}z_{,yy} = 0 \text{ en } D. \end{cases} \tag{2.3}$$

En la tesis de Viglialoro (2006) dichas ecuaciones han sido calculadas también en función de los esfuerzos de membrana $\tilde{N}_{\alpha\beta}$ (esto es, fuerza por unidad de longitud).

Usando las relaciones

$$\begin{cases} N_{yy} = \tilde{N}_{yy} \sqrt{1+z_x^2} \cos \beta = \tilde{N}_{yy} = \frac{\sqrt{1+z_x^2}}{\sqrt{1+z_y^2}}, \\ N_{xx} = \tilde{N}_{xx} \sqrt{1+z_y^2} \cos \alpha = \tilde{N}_{xx} = \frac{\sqrt{1+z_y^2}}{\sqrt{1+z_x^2}}, \\ N_{xy} = \frac{\sqrt{1+z_y^2}}{\sqrt{1+z_x^2}} \tilde{N}_{xy} = \frac{\sqrt{1+z_x^2}}{\sqrt{1+z_y^2}} \tilde{N}_{yx} = N_{yx}, \end{cases} \tag{2.4}$$

entre los esfuerzos proyectados $N_{\alpha\beta}$ y sus correspondientes de membrana $\tilde{N}_{\alpha\beta}$ (véanse las Figuras 1 y 3), se obtiene el mismo sistema (2.3).



3

La utilización de la *función de Airy H* ofrece una vía útil de estudio para el sistema (2.3). $H = H(x,y)$ es tal que:

$$H_{,xx} = N_{yy}; H_{,xy} = -N_{xy}; H_{,yy} = N_{xx}. \tag{2.5}$$

Sustituyendo estas relaciones dentro del sistema (2.3), la única ecuación no trivial es:

$$H_{,xx}z_{,yy} - 2H_{,xy}z_{,xy} + H_{,yy}z_{,xx} = 0. \tag{2.6}$$

La ecuación (2.6) muestra que si se fija el tensor $N_{\alpha\beta}$ definido positivo (esto es, $H_{,xx} > 0$ y $H_{,xx}H_{,yy} - H_{,xy}^2 > 0$) la función z tiene que resolver una *ecuación elíptica*. Al contrario, si se fija una superficie z con curvatura de Gauss negativa (esto es, $z_{,xx}z_{,yy} - z_{,xy}^2 < 0$), la función H tiene que resolver una *ecuación hiperbólica* (véase Hörmander, 1964).

Así, insistamos, el *problema directo* consiste en fijar los esfuerzos (proyectados) de membrana, mientras que en el *problema dual* se fija su forma.

3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN EL BORDE

Una vez establecido el equilibrio de membrana a través del sistema (2.3) hace falta definir las adecuadas condiciones de frontera. Para ello hemos de analizar el equilibrio en el borde.

Identifiquemos, entonces, el borde rígido por medio de *cualquier* curva espacial cerrada C ; C se parametriza por $(x(s), y(s), z(s))$, siendo $x(s)$, $y(s)$ y $z(s)$ funciones de s definidas en un intervalo I .

$$\text{Sea } \tilde{f}(s) = (\tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s) \tilde{f}_3(s))$$

la fuerza (por unidad de longitud) que actúa a lo largo de C y consideremos la Figura 4. En ella, indicando con $f = (f_1, f_2)$ la proyección en el plano $x - y$ de \tilde{f} , se refleja el equilibrio de borde a lo largo de la frontera $\Gamma = \partial D = \{(x(s), y(s)); s \in I\}$ proyección de C sobre el mismo plano $x - y$. Más exactamente, si $d\Gamma$ indica un elemento diferencial de Γ al equilibrar la fuerza f con los esfuerzos de membrana proyectados $N_{\alpha\beta}$ se tiene el sistema

$$\begin{cases} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} ds f_1 - dx N_{xy} + dy N_{xx} = 0 \text{ en } I, \\ \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} ds f_2 - dx N_{yy} + dy N_{xy} = 0 \text{ en } I, \end{cases}$$

esto es,

$$\begin{cases} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} f_1 = \dot{x} N_{xy} - \dot{y} N_{xx} \text{ en } I, \\ \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} f_2 = \dot{x} N_{yy} - \dot{y} N_{xy} \text{ en } I, \end{cases} \tag{3.1}$$

siendo f_1 la componente horizontal en el

plano $x-y$ de la fuerza repartida \tilde{f} y f_2 aquella vertical. Finalmente, indicando con:

$$n = (n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} (-\dot{y}, \dot{x})$$

el vector unitario normal a Γ , el sistema (3.1) puede expresarse como:

$$N_{\alpha\beta} n_\beta = f_\alpha \text{ en } I \text{ (con } \alpha = 1 \text{ y } 2), \quad (3.2)$$

o bien, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} N_{xx} & N_{xy} \\ N_{yx} & N_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

En la tesis de Vigliani (2006) se ha comprobado que el equilibrio tridimensional calculado usando las variables naturales $\tilde{N}_{\alpha\beta}$, \tilde{f} y C es equivalente al bidimensional aquí considerado, en el que intervienen sólo las variables proyectadas $N_{\alpha\beta}$, f y Γ .

4. EL PROBLEMA DIRECTO: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Condiciones de contorno para el borde rígido

Las condiciones de contorno para el problema directo se tienen que definir sobre la forma de membrana z , la incógnita del problema.

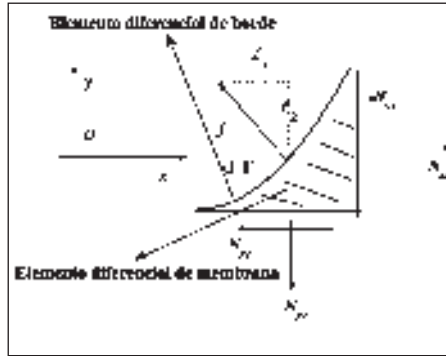
En efecto, conociéndose $N_{\alpha\beta}$ y Γ (esto es, $x(s)$ y $y(s)$), la fuerza de borde f es fácilmente calculable a partir del sistema (3.2).

En consecuencia, en el problema directo, sólo hay que fijar el valor de z a lo largo de Γ , esto es la forma del borde rígido.

Problema directo

Con referencia al sistema (2.3), fijemos un tensor de esfuerzos $N_{\alpha\beta}$ definido en un dominio acotado D del plano $x-y$, tal que $N_{xx} > 0$ y $N_{xx}N_{yy} - N_{xy}^2 > 0$ (tensor definido positivo).

Si g es la función que define el valor de z sobre Γ (esto es, $g(s) = z(x(s), y(s))$) describe el contorno rígido de la membrana, se trata de hallar la superficie z definida en D , tal que:



4. Equilibrio de borde en el plano horizontal.

$$\begin{cases} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \text{ en } D, \\ N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 \text{ en } D, \\ N_{xx}z_{,xx} + 2N_{xy}z_{,xy} + N_{yy}z_{,yy} = 0 \text{ en } D, \\ z = g \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que las condiciones $N_{\alpha\beta,\beta} = 0$ (con $\alpha = 1, 2$) permiten escribir el último sistema en el siguiente, más común, en forma divergencial:

$$\begin{cases} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 (N_{\alpha\beta}z_{,\beta})_{,\alpha} = 0 \text{ en } D, \\ z = g \text{ sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (4.1)$$

Debido a que $N_{\alpha\beta}$ es definido positivo, la ecuación diferencial del sistema (4.1) es elíptica; por lo tanto el problema directo es un problema elíptico de Dirichlet, esto es, un problema *bien puesto*. En efecto, como puede comprobarse en los conocidos trabajos de Brezis (1983) y de Gilbarg and Trudinger (1998), la única solución z (regular y estable) del problema (4.1) es la que minimiza el funcional

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_D \sum_{\alpha,\beta=1}^2 N_{\alpha\beta} v_{,\alpha} v_{,\beta} dD,$$

en el conjunto $K = \{v \in H^1(D) \text{ tal que } v - g \in H_0^1(D)\}$

5. SOLUCIONES ANALÍTICAS Y NUMÉRICAS DEL PROBLEMA DIRECTO EN UN DOMINIO SIMÉTRICO

En esta sección se analizarán algunas soluciones analíticas y numéricas del problema directo. Para ello se considerará un dominio simétrico, que representará un típico perfil proyectado de una pasarela.

Problema directo definido en un dominio simétrico

Sea D el siguiente dominio del plano horizontal

$D := \{ (x,y) \}$
 tal que $-a \leq x \leq a$ y $-y(x) \leq y \leq y(x)$,
 siendo $y(x)$ una función positiva y simétrica
 definida en $I = [-a, a]$. Si se fijan:

- en D un tensor (definido positivo) de esfuerzos $N_{\alpha\beta}$ tal que $N_{\alpha\beta} = 0$ (con $\alpha = 1,2$);
- en $I = [-a,a]$ y $J = [-b,b]$ (con $b = y(\mp a)$) dos funciones simétricas, $h(x)$ y $g(y)$, tales que verifican las condiciones de continuidad en las esquinas, $h(\mp a) = g(\mp b)$ se trata de hallar la función z tal que

$$\begin{cases} \sum_{\alpha,\beta=1}^2 (N_{\alpha\beta} z_{,\beta})_{,\alpha} = 0 \text{ en } D, \\ z = g \text{ sobre } x = \mp a, \\ z = h \text{ sobre } y = \mp y(x). \end{cases} \quad (5.1)$$

Por lo dicho anteriormente, este problema admite una única solución analítica z que coincide con el punto de mínimo del siguiente funcional

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_D \sum_{\alpha,\beta=1}^2 N_{\alpha\beta} v_{,\alpha} v_{,\beta} \, dD, \quad (5.2)$$

en $K = \{v \in H^1(D) \text{ tal que } v(\mp a, y) = g(y) \text{ y } v(x, \mp y(x)) = h(x)\}$.

5.1. Soluciones analíticas en un rectángulo

A continuación se analizarán dos casos de problema directo, ambos definidos en un rectángulo.

Fijemos el siguiente dominio rectangular:

$$R := \{ (x,y) \text{ tal que } -a \leq x \leq a \text{ y } -b \leq y \leq b \}.$$

Es posible definir la nueva variable $\varphi(x, y) := z(x, y) - [h(x) + g(y) - g(\mp b)]$ obteniendo, de esta forma, el siguiente problema:

$$\begin{cases} - \sum_{\alpha,\beta=1}^2 (N_{\alpha\beta} \varphi_{,\beta})_{,\alpha} = N_{xx} h''(x) + N_{yy} g''(y) \text{ en } R, \\ \varphi = 0 \text{ sobre } y = \mp b, \\ \varphi = 0 \text{ sobre } x = \mp a. \end{cases}$$

La solución (única y estable) de este sistema es la que minimiza el funcional:

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int_D (N_{xx} \psi_{,x}^2 + 2N_{xy} \psi_{,x} \psi_{,y} + N_{yy} \psi_{,y}^2) \, dR - \int_D \psi (N_{xx} h''(x) + N_{yy} g''(y)) \, dR, \quad (5.3)$$

en el conjunto $H_0^1(R)$. Se pueden estudiar los siguientes casos:

(i) **Contorno plano.** Para cada tensor (definido positivo) de esfuerzos $N_{\alpha\beta}$ tal que $N_{\alpha\beta} = 0$ (con $\alpha = 1,2$), si $h''(x) = g''(y) = 0$, esto es, debido a la condición de continuidad $g = h = c$ (constante), se obtiene $\varphi = c = 0$, visto que $\varphi \in H_0^1(R)$. Ello implica la membrana plana cuya ecuación es:

$$z(x, y) = c.$$

(ii) **Contorno general.** Fijemos $N_{\alpha\beta}$, $h(x)$ y $g(y)$ tales que $N_{\alpha\beta} = 0$ (con $\alpha = 1,2$) y $N_{xx} h''(x) = -N_{yy} g''(y)$; se obtiene $\varphi = c = 0$, visto que $\varphi \in H_0^1(R)$. Ello implica la membrana de ecuación:

$$z(x, y) = h(x) + g(y) - g(\mp b)$$

5.2. Soluciones numéricas

Como acabamos de comprobar a través de los dos ejemplos anteriores, la relación (5.2) permite conocer, sólo en algunos casos, la solución analítica del sistema (5.1).

No obstante esto, en general se ha de recurrir a métodos numéricos. En particular, es posible desarrollar un procedimiento numérico basado en el clásico *Método de los Elementos Finitos* (véanse, por ejemplo, los trabajos de Hughes, 1987; Zienkiewicz and Taylor, 2000) para resolver estos tipos de problema. Más en particular, en la tesis de Viglialoro (2006) pueden consultarse los detalles para implementar dicho procedimiento, en el caso se utilicen elementos lineales cuadriláteros dentro de un programa en MATLAB.

Presentemos, ahora, una serie de casos de solución numérica para el problema directo, algunos definidos en un rectángulo y otros en un dominio general. De aquí en adelante todas las *longitudes* de los ejemplos (x , y y las longitudes referentes a las diversas figuras) se expresarán en *metros*.

5.2.1. Resolución numérica de los casos analíticos (dominio rectangular)

Ante todo, resolvamos numéricamente los mismos casos analíticos del ejemplo anterior. De esta forma, confrontando la solución numérica $z_{n\acute{u}m}$ con la analítica z , puede evaluarse el error relativo (en la

$$\text{norma euclídea)} e = \frac{\|z - z_{n\acute{u}m}\|}{\|z\|}.$$

Definamos, entonces, el dominio mostrado en la Figura 5, junto a su malla correspondiente,

$$D: = \{(x,y) \text{ tal que: } -5 \leq x \leq 5 \text{ y } -2 \leq y \leq 2\},$$

y el tensor de esfuerzos (definido positivo) $N_{xx} = 10 \text{ kN/m}$, $N_{xy} = 0$ y $N_{yy} = 4 \text{ kN/m}$, que verifica las relaciones $N_{\alpha\beta,\beta} = 0$ (por cada $\alpha = 1,2$)

(i) **Contorno plano.** Fijemos como condiciones de contorno $h(x) = 0$ y $g(y) = 0$; se obtiene la solución numérica $z_{n\acute{u}m}$ que es perfectamente plana. En consecuencia, el error relativo con respecto a la solución exacta $z = 0$ es

$$e = \frac{\|z - z_{n\acute{u}m}\|}{\|z\|} = 0$$

(ii) **Contorno general.** Fijemos como condiciones de contorno $h(x) = -0,068x^2 + 2,38$ y $g(y) = 0,17y^2$ (h, g, N_{xx} y N_{yy} verifican la condición $N_{xx}h''(x) = -N_{yy}g''(y)$); se obtiene la solución numérica de la Figura 6. El error relativo con respecto a la solución analítica $z = -0,068x^2 + 0,17y^2 + 1,7$ es:

$$e = \frac{\|z - z_{n\acute{u}m}\|}{\|z\|} = 4,6 \cdot 10^{-16}$$

5.2.2. Resolución numérica en un dominio general

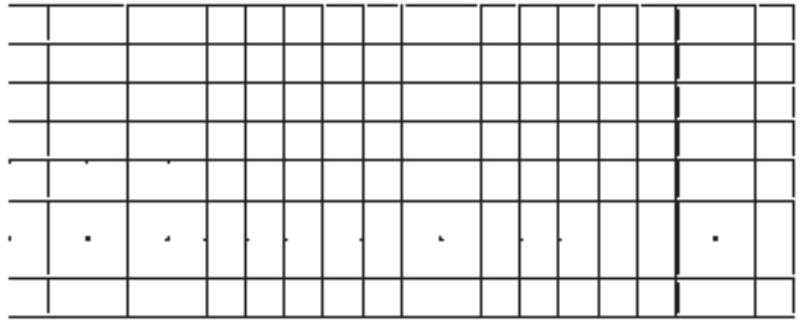
Resolvamos ahora numéricamente dos casos definidos en un dominio general.

Definamos el dominio mostrado en la Figura 7, junto a su correspondiente malla,

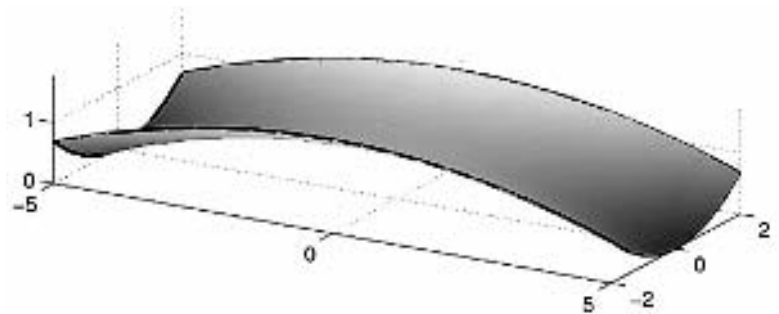
$D: = \{(x,y) \text{ tal que:}$

$$-5 \leq x \leq 5 \text{ y } -3 + 0.04x^2 \leq y \leq 3 - 0.04x^2\},$$

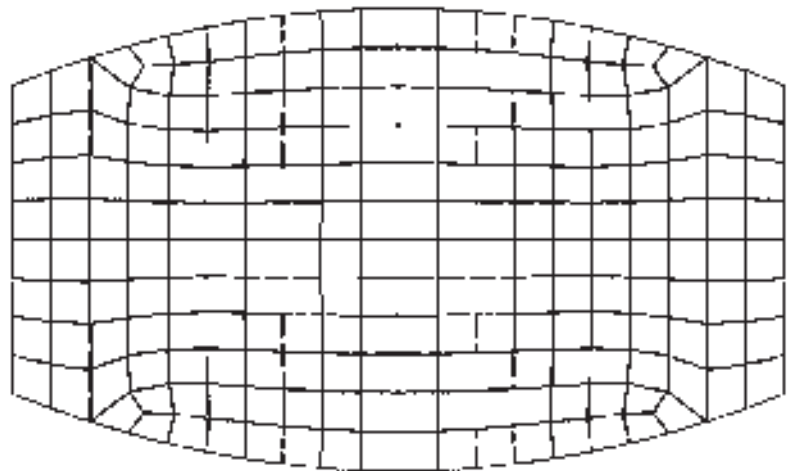
y consideremos dos casos distintos dependiendo del tensor de esfuerzos escogido.



5



6



7

(i) **Esfuerzos constantes.** Consideremos el tensor (definido positivo) de esfuerzos

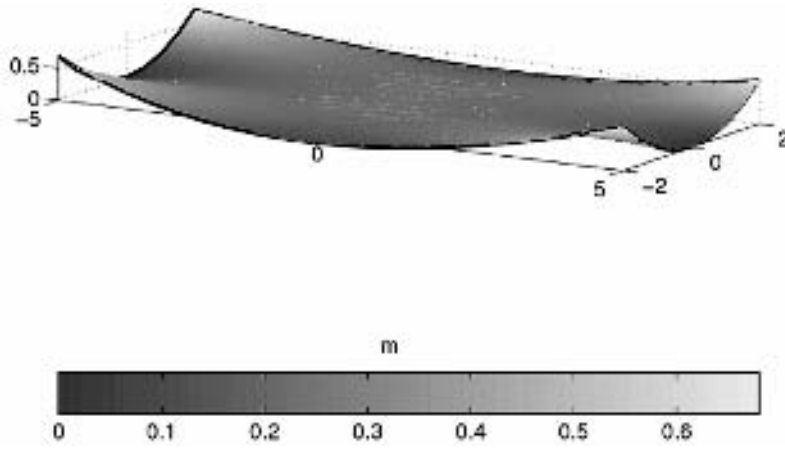
$$N_{xx} = 10 \text{ kN/m}, N_{xy} = 0 \text{ y } N_{yy} = 4 \text{ kN/m},$$

que verifica las relaciones $N_{\alpha\beta,\beta} = 0$ (con $\alpha = 1,2$) y fijemos curvas concordes como condición de frontera; se obtiene la solución numérica de la Figura 8, pág. siguiente.

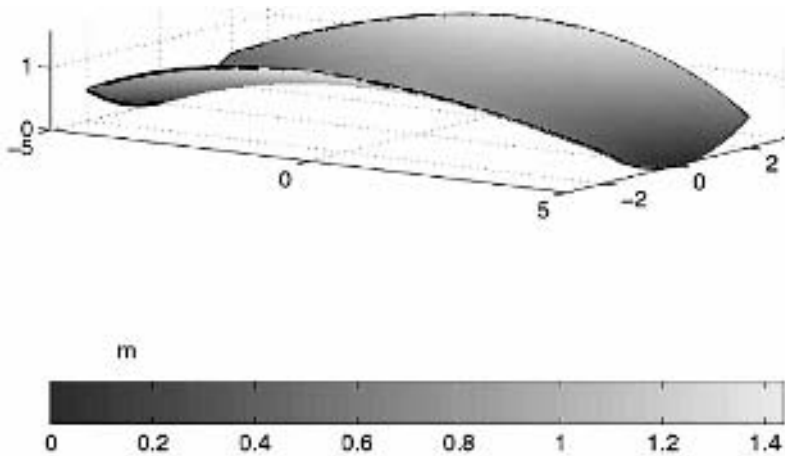
5. Dominio rectangular. Malla utilizada para el cálculo: 189 nodos.

6. Resultado gráfico de la solución numérica. Caso: $N_{xx}h''(x) = -N_{yy}g''(y)$.

7. Dominio general. Malla utilizada para el cálculo: 249 nodos.



8



9

8. Resultado gráfico de la solución numérica. Caso: $h(x) = 0,017x^2 + 0,255$ y $g(y) = 0,17y^2$.

9. Resultado gráfico de la solución numérica. Caso: $h(x) = -0,0375x^2 + 1,4375$ y $g(y) = 0,125y^2$.

(ii) Esfuerzos variables. Consideremos el tensor (definido positivo) de esfuerzos

$$N_{xx} = 12 - 0,5y^2 \text{ kN/m}; N_{xy} = 0$$

$$\text{y } N_{yy} = 6 - 0,08x^2 \text{ kN/m,}$$

que verifica las relaciones $N_{\alpha\beta,\beta} = 0$ (con $\alpha = 1,2$), y fijemos curvas discordes como condición de frontera; se obtiene la solución numérica de la Figura 9.

Aunque en la Figura 8 el contorno esté definido por curvas de bordes concordes, sugiriendo esto que la solución global pueda tener curvatura de Gauss negativa, localmente la forma de la membrana se corresponde a una superficie con curvatura de Gauss negativa.

En la práctica se diseñaría una membrana con curvas de borde discordes, como la de la Figura 9.

6. PROBLEMA DUAL: DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Condiciones de contorno para el borde rígido

Las condiciones de contorno para el problema dual se tienen que definir sobre el tensor de esfuerzos $N_{\alpha\beta}$, la incógnita del problema. Según lo afirmado anteriormente, a lo largo del borde se tiene que imponer el equilibrio entre las fuerzas distribuidas y los esfuerzos de membrana.

Más exactamente, una vez fijada la membrana z , su borde proyectado Γ y la fuerza repartida (proyectada, también) f , utilizaremos, como condición de frontera para el problema dual, la relación expresada por el sistema (3.2).

Problema dual

Con referencia al sistema (2.3), fijemos una superficie S (superficie con curvatura de Gauss negativa), gráfica de una función $z(x,y)$ tal que $z_{,xx}z_{,yy} - z_{,xy}^2 < 0$, en un dominio acotado D del plano $x - y$.

Si $f(s) = (f_1(s), f_2(s))$ indica la fuerza repartida a lo largo el contorno Γ , se trata de hallar el tensor de esfuerzos $N_{\alpha\beta}$ definido en D , tal que

$$\begin{cases} N_{,xx,x} + N_{,xy,y} = 0 \text{ en } D, \\ N_{,xx,x} + N_{,xy,y} = 0 \text{ en } D, \\ N_{,xx}z_{,xx} + 2N_{,xy}z_{,xy} + N_{,yy}z_{,yy} = 0 \text{ en } D, \\ N_{\alpha\beta}n_\beta = f_\alpha \text{ sobre } \Gamma \text{ (con } \alpha = 1,2), \end{cases} \quad (6.1)$$

siendo $n = (n_1, n_2)$ el vector unitario normal a Γ .

Recordando la ecuación (2.6) en término de la función de Airy, se concluye que el sistema (6.1) es hiperbólico. Por esta razón, se trata de un problema de Dirichlet de tipo hiperbólico, esto es, un problema en general no bien definido (véase Hörmander, 1964). Una vez más, en la tesis de Viglialoro (2006) se presentan casos de solución analítica definidos en un rectángulo y en el que el problema dual está bien definido.

Resumamos estos resultados y sus características principales.

• Fijemos en el rectángulo $R = (-a, a) \times (-b, b)$ el paraboloides hiperbólico de segundo orden $z = -x^2 + c^2y^2$ como forma de la membrana y $N_{yy}(x, \mp b) = f_2(x) = c_1 > 0$ y $N_{xy}(x, \mp b) = f_1(x) = 0$ como condiciones de contorno.

Entonces, la única solución es $N_{xx} = c_1c^2$, $N_{xy} = 0$ y $N_{yy} = c_1$.

• Fijemos en el rectángulo $R = (-a, a) \times (-b, b)$ (esta vez con la condición $b^2 = 2a$) el paraboloides hiperbólico de cuarto orden $z = c_1y^4 - c_2x^2$ (con la condición $3c_1b^4 = 2c_2a^2$) como forma de la membrana y $N_{xx}(\mp a, y) = f_1(y) = ky^2 > 0$ ($k > 0$) y $N_{xy}(\mp a, y) = f_2(y) = 0$

como condiciones de contorno.

Entonces, la única solución es $N_{xx} = ky^2$, $N_{xy} = 0$ y $N_{yy} = k$.

7. CONSISTENCIA DE LOS DOS PROBLEMAS

Es importante observar que, debido a la complementariedad de los problemas directo y dual, sus resultados deben de ser consistentes (los resultados de un problema son los datos del otro, y viceversa). La consistencia de ambos problemas ha sido verificada, obviamente para los casos en los que el problema dual está bien definido, usando las soluciones analíticas y el procedimiento numérico analizado anteriormente en el problema directo (véase Viglialoro, 2006).

8. RESUMEN Y CONCLUSIONES

El presente trabajo ha estudiado el equilibrio de una membrana con bordes sobre la superficie que la misma conforma, un continuo 2-D, en la fase de pretensado. El mismo se orienta a estructuras de membrana para pasarelas.

El análisis se formula mediante ecuaciones en derivadas parciales asociadas a los esfuerzos (de tracción) y a la forma de la membrana. Para borde rígido, se han planteado dos problemas: en el primero, de tipo elíptico, se fijan los esfuerzos y se busca la forma; el segundo, dual, donde se fija la forma y se buscan los esfuerzos, es de tipo hiperbólico. Am-

bos se han abordado matemáticamente en la idea de verificar el isostatismo (si, en efecto, tan sólo del equilibrio se obtienen resultados). El primer problema, elíptico, es isostático: a partir de unos esfuerzos (equilibrados en planta, por supuesto), con el equilibrio se obtiene la forma. El segundo, hiperbólico, no asegura el isostatismo: a partir de una forma, no siempre se obtienen esfuerzos con el equilibrio; pero se han propuesto algunos casos concretos sencillos que son isostáticos.

En particular, el enfoque directo lleva a analizar un problema que tiene una única solución estable. En el artículo se presenta dicha solución como el punto de mínimo de un cierto funcional. Se han analizado casos de solución analítica definidos en un rectángulo y se ha implementado un procedimiento numérico general, basado en el Método de los Elementos Finitos, cuya eficacia puede comprobarse comparando los resultados analíticos con los numéricos. Finalmente se han presentado otros resultados numéricos para casos generales, no necesariamente definidos en un rectángulo y utilizando diferentes tensores de esfuerzos.

Por otro lado, el enfoque dual lleva a analizar un problema generalmente no bien definido. No obstante ello, se han presentado algunos casos singulares definidos en un rectángulo y con solución única y analítica.

Como las ecuaciones de equilibrio son todas homogéneas, las soluciones obtenidas lo son asimismo multiplicadas por un factor constante; lo cual es ventajoso en el diseño de la membrana. Así, para una forma obtenida (o dada, en su caso), el pretensado de partida (o resultante, en su caso) puede multiplicarse por el factor adecuado al objeto de alcanzar con dicha forma la rigidez necesaria en servicio (sin cambiar la distribución de esfuerzos). Del mismo modo podría graduarse la forma de la membrana (por ejemplo, para ajustar en servicio la pendiente máxima en la zona de paso).

Por supuesto, aun referido a la fase de pretensado, el estudio realizado da pautas importantes para el análisis

de membranas bajo cargas distintas al pretensado.

Así, para cargas gravitatorias (eje z), aunque la ecuación en dicho eje ya no

sea homogénea (tiene un término independiente dado), la problemática no cambia; y el peso propio, no tenido en cuenta por ínfimo valor con relación al pretensado, es un caso particular.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) Bonet J., Mahaney J., 2001. Form finding of membrane structures by updated reference method with minimum mesh distortion. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp. 5469 - 5480.
- (2) Brezis H., 1983. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson Editeur, París.
- (3) Flugge W., 1973. *Stresses in Shells*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- (4) Gilbarg L., Trudinger N. S., 1998. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer.
- (5) Haas L.M. 1964. *Design of Thin Shells*. Wiley, New York.
- (6) Hörmander L., 1964 *Linear Partial Differential Operators*. Springer, Berlin.
- (7) Hughes T.J.R., 1987. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*; Mineola, New York Dover Publications.
- (8) Linkwitz K., 1999. About formfinding of double-curved structures. *Engineering Structures*; Vol. 21, pp. 709 - 718.
- (9) Murcia J., 2007. Tecnología de pasarelas con estructura de membrana. *Informes de la Construcción*; No. 507; 21 - 31.
- (10) Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1959. *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, Inc., New York.
- (11) Tüzel V.H., Erbay H.A., 2004. The dynamic response of an incompressible nonlinearly elastic membrane tube subjected to a dynamic extension. *International Journal of Non-Linear Mechanics*; Vol. 39, pp. 515 - 537.
- (12) Viglialoro G., 2006. Análisis matemático del equilibrio en estructuras de membrana con bordes rígidos y cables. Pasarelas: forma y pretensado. Tesis doctoral, UPC. Enlace: <http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0515107-10074>.
- (13) Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., 2000. *The Finite Element Method*, Butterworth Heinemann.

* * *