COMPROBACIÓN DE LA LONGITUD DE PANDEO, DADA POR LA MV-103 DE 1972, O POR LA E.A. 95, CON LA SOLUCIÓN DIFERENCIAL

(CHECKING BULGING LENGTH ESTABLISHED BY STANDARDS MV-103 AND E. A. 95, WITH THE DIFFERENTIAL SOLUTION)

Pedro Amondaráin Elícegui, Dr. Ingeniero Industrial
Susana Villanueva Besga, Ingeniero Técnico Industrial

Fecha de recepción: 29-XII-97
400-32

ESPAÑA

RESUMEN

Se estudia y comprueba en este artículo la longitud de pandeo, dada a través de las Normas MV-103 y E. A. 95 para el cálculo y diseño de estructuras metálicas. El estudio pone de manifiesto los errores en dichas Normas, en concreto en lo que respecta a los valores del coeficiente β .

SUMMARY

The bulging length by Standards MV-103 and E. A. 95 is studied and reckoned aiming the calculation and design of metallic structures. The study evidences the errors contained in Standards specially regarding coefficient β values.

INTRODUCCIÓN

Un tema importante en el cálculo de las estructuras metálicas es el pandeo.

Las piezas comprimidas, junto a las que trabajan a flexión, son las más abundantes de las estructuras metálicas y aparecen bien en compresión pura o mezcladas con flexión en:

- los pilares de los edificios
- las barras de las estructuras trianguladas
- los arcos, etc.

La Norma MV-103 o E.A.95 posee un coeficiente β que, multiplicado a la longitud de la barra, nos da el valor de la *longitud de pandeo*, que será la medida que utilizaremos en los cálculos de dimensionamiento y diseño de la estructura.

Debido a que se han encontrado errores en algunos de los valores aproximados del coeficiente β de la Norma MV-103 del año 1972 y que estos errores continúan en la actualización de 1995, E.A.95, en el artículo se estudiarán los casos concretos de las tablas 3.2, 3.3 y 3.4 de la Norma MV-103, que coincide con la E.A.95.

Se han encontrado errores en los casos *1b*, *1d*, *1e* y *1f* de la tabla 3.2 donde se da un valor del coeficiente *s* igual a:

$$s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{l}{A} + \frac{l}{A_1} \right) \leq 0,2, \text{ cuando la ecuación correcta es: } s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right) \leq 0,2$$

Además, las ecuaciones que dan el valor del coeficiente β de los casos *1e* y *1f*, están trastocadas, la del *1e* sería en realidad la del *1f* y al contrario.

En los estudios del doble y triple vano, debido a la no constancia de los momentos que se presentan en los de un vano, se han establecido unos valores concretos y, comparando los resultados, en el caso *2a* nuestro valor de β para el pilar central y el de la *MV-103* coinciden, mientras que para los pilares extremos hay una diferencia del 43%. Es notable, pero no peligrosa, al estar del lado de la seguridad o ser más rígida. En el *2b* ocurre lo mismo.

En el caso *2c* para los pilares extremos coinciden las β , pero para el central existe una diferencia del 41%. Es notable y más peligrosa debido a que no está en el lado de la seguridad o es menos rígida.

Comprobada también la tabla 3.3 se han encontrado diferencias de hasta un 20%, pero siempre por el lado de la seguridad. Para la tabla 3.4 existen diferencias de un 18% pero, en este caso, no por el lado de la seguridad

Todos los estudios estarán dentro del régimen elástico, donde las tensiones permanecen por debajo del *límite elástico* o de *proporcionalidad* del material, siguiendo, éste, la *Ley de Hooke*:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

donde:

- ε es el alargamiento unitario
- σ es la tensión en kp/cm^2
- E es el módulo elástico en kp/cm^2

Dentro del régimen plástico, el material no responde a la Ley de Hooke. El valor de la razón $d\sigma/d\varepsilon$ puede considerarse como un módulo de elasticidad variable del material, que es función de σ y lo designaremos por E_σ .

En todos los casos se supondrá que los nudos del pórtico tienen libertad de giros y corrimientos dentro del plano, que están impedidos los corrimientos en dirección perpendicular al plano del pórtico y que la flexión se efectúa en uno de los dos planos principales de la barra.

En todos estos problemas se suponen siempre las deformaciones lo suficientemente pequeñas, como son en realidad, aun en el colapso de la pieza. Esto hace que la tangente, el seno y el ángulo sean aproximadamente iguales y podamos tomar uno u otro.

Figura 1

Vamos a solucionar el problema dentro del régimen elástico de una manera exacta, planteando la ecuación diferencial. Después se compararán gráficamente los resultados con la aproximación de la E.A. 95.

El caso de la figura 1 es el resuelto por *Timoshenko* en su libro "*TEORÍA DE LA ESTABILIDAD ELÁSTICA*". Pero la estructura es simétrica hasta en la carga.

"Cuando el marco no es simétrico o no está simétricamente cargado, el problema de determinar el valor crítico de la carga se hace más complicado puesto que se necesita considerar corrimientos y giros de las uniones superiores", nos dice y nos remite a R. v. *Mises* y J. *Ratzersdorfer*, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 3, pag. 407, 1923.

Ante esto, la suposición de que el momento en el nudo es $P \cdot y$, del que parte el citado autor, hay que demostrarlo resolviendo el caso hiperestático del pórtico en ese estado de deformación con su desplazamiento δ . Resolviendo el caso encontramos que el momento en el nudo B es constante y vale:

$$M_B = M_c = (P + P_1) \frac{\delta}{2}$$

Siguiendo la figura 1, examinemos este marco con barras verticales comprimidas y un dintel en condiciones de moverse lateralmente. El marco posee un eje vertical de simetría en cuanto a sus elementos, no en cuanto a la carga, coincidiendo con el caso *a* de la E.A. 95. El problema completo sería estudiarlo sin esta simetría, pero su estudio prácticamente no tiene interés, como lo demuestra el que la E.A. 95 no lo incluya, pero el planteamiento es idéntico al que se realiza en este estudio. En este caso el momento en el nudo B no sería $(P + P_1) \delta/2$ y habría que estudiarlo aparte.

Comprobados todos los casos de la tabla 3.2, caso 1, con las correcciones antes dichas, la coincidencia de ambas soluciones es muy aceptable. Por lo que, debido al espacio reducido de un artículo, sólo vamos a exponer, de los casos 1, el 1d y 1e, una vez realizados los cambios, para demostrar el error de la Norma, aunque lo corrobora el Sr. Rodríguez-Avial Azcúnaga en su libro "CONSTRUCCIONES METÁLICAS", quinta edición (1963), pág. 631, en los casos 1b, 1d. Los casos 1e, 1f no aparecen, aunque el error, sólo por comparación, se puede ver.

De los casos 2 sólo tocaremos el 2c, al ser más peligroso, por no estar de lado de la seguridad.

De las tablas 3.3 y 3.4, por el mismo motivo, expondremos el caso de estructuras sin recuadros arriostrados, o la tabla 3.4.

CASO 1d

CASO	FORMA DEL PÓRTICO	COEFICIENTE β	MAGNITUDES AUXILIARES
1d		$\sqrt{1 + 0,35(c + 6s) - 0,017(c + 6s)^2}$	$c = \frac{2 I b}{I_0 l} \leq 10$ $s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right) \leq 0,2$

Como en el caso 1b, creemos que la fórmula dada por la Norma está equivocada y que el valor de la constante s debería ser:

$$s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right) \text{ y no } s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{l}{A} + \frac{l}{A_1} \right)$$

Para los cálculos que siguen se ha utilizado el valor de s que creemos correcto, ya que con el de la Norma las diferencias entre los valores de los coeficientes β son demasiado grandes.

Suponemos el caso de un pórtico empotrado en una base y articulado en la otra. Cargado con una carga de compresión P sobre el pilar empotrado. El dintel está unido rígidamente al pilar empotrado y mediante una articulación al pilar articulado.

En este caso, la figura deformada será de la figura 2. Partiendo de la ecuación diferencial calcularemos el coeficiente de la estructura.

La ecuación diferencial es:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(\delta - y) - M$$

donde: EI es la rigidez de flexión, P la fuerza axial, $y = f(x)$, la ecuación de la elástica.

hallamos la ecuación trascendente:

$$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = -\frac{bI}{3II_0} - \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = -\frac{c+6s}{6}$$

Encontrado el valor de kl podemos hallar β :

$$\beta = \frac{\pi}{kl}$$

En las tablas y gráficas siguientes podemos comparar el valor de β que hemos obtenido con la aproximación de la *Norma*. En la gráfica I se han tomado los siguientes valores: $b = 600 \text{ cm}$, $I = I_0 = 9.800 \text{ cm}^4$, $A = A_1 = 69 \text{ cm}^2$ y se ha variado la longitud l . En la gráfica II se ha tomado $l = b = 600 \text{ cm}$, $I = I_1 = 9.800 \text{ cm}^4$, $A = 69 \text{ cm}^2$, pero se ha variado la sección del pilar derecho A_1 .

Figura 2

TABLA I.

l	kl	β	β_{103}	l	kl	β	β_{103}	l	kl	β	β_{103}
100	1,8365	1,7106	1,6588	400	2,2882	1,3729	1,3777	700	2,5168	1,2482	1,2455
150	1,9395	1,6197	1,6469	450	2,3364	1,3445	1,3467	750	2,5441	1,2348	1,2320
200	2,0284	1,5487	1,5775	500	2,3798	1,3201	1,3203	800	2,5692	1,2227	1,2199
250	2,1060	1,4917	1,5130	550	2,4190	1,2986	1,2977	850	2,5923	1,2118	1,2090
300	2,1741	1,4449	1,4591	600	2,4546	1,2798	1,2780	900	2,6138	1,2019	1,1991
350	2,2345	1,4059	1,4146	650	2,4871	1,2631	1,2608

Gráfica I

TABLA II.

<i>IPN</i>	<i>A₁</i>	<i>kl</i>	β	β_{103}	<i>IPN</i>	<i>A₁</i>	<i>kl</i>	β	β_{103}
80	7,57	2,4508	1,2818	1,2801	320	77,7	2,4547	1,2798	1,2780
140	18,2	2,4533	1,2805	1,2787	380	107	2,4548	1,2797	1,2779
200	33,4	2,4541	1,2801	1,2783	450	147	2,4549	1,2797	1,2779
260	53,3	2,4545	1,2799	1,2781	500	179	2,4550	1,2796	1,2778

Gráfica II

CASO 1e

CASO	FORMA DEL PÓRTICO	COEFICIENTE β	MAGNITUDES AUXILIARES
1e		$\sqrt{1+0,86n} \cdot \sqrt{1+0,35(c+6s)-0,017(c+6s)^2}$	$n = \frac{P_2}{P} \leq 2$ $c = \frac{2 I b}{I_0 l} \leq 10$ $s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right) \leq 0,2$

La Norma MV-103 y la E.A.95 dan un valor de la constante: $\beta = \sqrt{1+0,96n} \sqrt{4+1,4(c+6s)+0,02(c+6s)^2}$

que creemos equivocado, ya que se han comparado los valores del coeficiente β hallados con la aproximación que da la Norma y son muy diferentes. Vemos que este caso es similar al caso 1c donde el extremo del pilar izquierdo está empotrado en su extremo inferior, por lo que la ecuación de la constante β también debería ser similar. Al estudiar el caso 1f se ha comprobado que también existían diferencias entre los valores de β y que la ecuación que presenta la Norma debería ser similar a la del caso 1a, ya que las estructuras son muy similares al estar el pilar izquierdo articulado. De todo esto se ha deducido que las ecuaciones de los casos 1e y 1f están intercambiadas.

Por lo tanto, la ecuación correcta en el caso 1e será: $\beta = \sqrt{1+0,86n} \sqrt{1+0,35(c+6s)-0,017(c+6s)^2}$

en la que podemos ver que la segunda raíz es similar a la del caso 1c y, por lo tanto, será la ecuación utilizada en los cálculos.

Es un caso similar al caso 1D, pero aplicando además otra carga de compresión P_2 en el pilar CD. La deformada será la de la figura 3.

Solucionando la ecuación diferencial:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = (P + P_2)(\delta - y) - M$$

obtenemos la ecuación trascendente cuya incógnita es kl :

$$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = -\frac{bI}{3II_0} - \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right)$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\operatorname{tg} kl}{kl} = -\frac{c+6s}{6}$$

Hallamos el valor de β :

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2(1+n)}{(kl)^2}}$$

Para la gráfica I, se han tomado los siguientes valores de las constantes: $l = b = 600 \text{ cm}$, $I = I_0 = 9.800 \text{ cm}^4$, $A = A_1 = 69 \text{ cm}^2$ y se ha variado n . En la gráfica II se han mantenido los mismos valores, pero se ha fijado $n = 1$ y se ha variado la longitud l .

Figura 3

TABLA I.

n	kl	β	β_{103}	n	kl	β	β_{103}	n	kl	β	β_{103}
0	2,4546	1,2798	1,2780	1,0	2,4546	1,8099	1,7430	1,8	2,4546	2,1415	2,0400
0,2		1,4019	1,3836	1,2		1,8983	1,8218	2		2,2167	2,1077
0,4		1,5143	1,4816	1,4		1,9827	1,8973	2,2		2,2894	2,1734
0,6		1,6188	1,5736	1,6		2,0637	1,9700	2,4		2,3599	2,2371
0,8		1,7170	1,6604

Gráfica I

TABLA II.

l	kl	β	β_{103}	l	kl	β	β_{103}	l	kl	β	β_{103}
100	1,8365	2,4192	2,2623	350	2,2345	1,9883	1,9293	600	2,4546	1,8099	1,7430
150	1,9396	2,2906	2,2461	400	2,2883	1,9415	1,8790	650	2,4871	1,7863	1,7195
200	2,0285	2,1902	2,1515	450	2,3364	1,9015	1,8367	700	2,5168	1,7652	1,6987
250	2,1060	2,1096	2,0635	500	2,3798	1,8669	1,8007	750	2,5441	1,7463	1,6802
300	2,1741	2,0435	1,9899	550	2,4190	1,8366	1,7698	800	2,5692	1,7292	1,6637

CASO 2c

CASO	FORMA DEL PÓRTICO	COEFICIENTE β	MAGNITUDES AUXILIARES
2c		<p>En los soportes extremos:</p> $\frac{6 + 1,2c_n}{3 + 0,1c_n} \sqrt{\frac{2+p}{2+t}} \leq 3$ <p>En el soporte intermedio:</p> $\frac{6 + 1,2c_n}{3 + 0,1c_n} \sqrt{\frac{2+p}{2+t}} \sqrt{\frac{t}{p}} \leq 3$	$c_n = c + \frac{9}{4}s$ $p = \frac{P_2}{P}$ $t = \frac{I_2}{I}$ $c = \frac{Ib}{I_0 l} \leq 10$ $s = \frac{4I}{Ab^2} \leq 0,2$
	<p>En los soportes extremos:</p> $\frac{6 + 1,2c_n}{3 + 0,1c_n} \sqrt{\frac{1+p}{1+t}} \leq 3$ <p>En el soporte intermedio:</p> $\frac{6 + 1,2c_n}{3 + 0,1c_n} \sqrt{\frac{1+p}{1+t}} \sqrt{\frac{t}{p}} \leq 3$ <p>Límite de validez $\beta \leq 6$</p>	

Se ha comprobado que los momentos no son constantes, por lo que tenemos que estudiar un caso concreto, con unos valores reales. Estudiaremos la figura 4, donde supondremos el arriostramiento en sentido perpendicular al plano del dibujo y de acero A-42.

Al estar los pilares comprimidos la rigidez y el coeficiente de transmisión variarán en función del parámetro $\rho = \frac{P}{P_{cr}}$, mientras que en las barras horizontales, al no haber compresión, será $\frac{4EI}{I}$ la rigidez y 0,5 el coeficiente de transmisión.

Figura 4

La ecuación que nos da el valor del coeficiente de transmisión para los pilares es: $r = \frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl}$

donde $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

también comprobamos que la rigidez para los pilares es:

$$K = \frac{\frac{kl}{2}(1 - kl \cot kl) \frac{EI}{l}}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}}$$

Cálculo del coeficiente β para los pilares intermedios

Momentos en los nudos:

$$2(P + P_2) \frac{\delta}{320} = \frac{2596,102}{320} x \Rightarrow x = 2(P + P_2) \frac{\delta}{2596,102}$$

$$M_{BA} = M_{HG} = M_{BD} = M_{HF} = 444,094 \cdot 2(P + P_2) \frac{\delta}{2596,102} = 0,342(P + P_2) \delta$$

$$M_{DC} = M_{FE} = 853,866 \cdot 2(P + P_2) \frac{\delta}{2596,102} = 0,658(P + P_2) \delta$$

$$M_{DB} = M_{FG} = 432,692 \cdot 2(P + P_2) \frac{\delta}{2596,102} = 0,333(P + P_2) \delta$$

$$M_{DE} = M_{ED} = 421,174 \cdot 2(P + P_2) \frac{\delta}{2596,102} = 0,325(P + P_2) \delta$$

Planteamiento de la ecuación diferencial: $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -0,342(P + P_2)y$

siendo $p = \frac{P_2}{P}$ y $Q = 0,342 P (1 + p)$ la ecuación diferencial nos queda: $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Qy$

Ecuación trascendente: $kl \operatorname{tg} kl = \frac{2,052}{0,351 \frac{bI}{II_0} + 0,009 \frac{4I}{Ab^2}} \Rightarrow \boxed{kl \operatorname{tg} kl = \frac{2,052}{0,351 c + 0,009 s}}$

Ecuación del coeficiente β : $\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 0,342(1+p)}{(kl)^2}}$

Comparamos el valor del coeficiente β que hemos hallado con el valor que da la *Norma* y obtenemos el mismo resultado:

$$\begin{aligned} kl &= 1,536 \\ \beta &= 2,0717 \\ \beta_{103} &= 2,0720 \end{aligned}$$

Cálculo del coeficiente β para los pilares intermedios

Planteamiento de la ecuación diferencial: $E I_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -0,658 (P + P_2)y$

siendo $p = \frac{P_2}{P}$ y $Q = 0,658 P (1 + p)$ la ecuación diferencial nos queda: $E I_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -Q y$

Ecuación trascendente:

$$kl \operatorname{tg} kl = \frac{3,948}{0,324 \frac{b I}{l I_0} \frac{I_2}{I} + 0,675 \frac{4 I}{A b^2} \frac{I_2}{I}} \Rightarrow kl \operatorname{tg} kl = \frac{3,948}{0,324 c t + 0,675 s t}$$

Ecuación del coeficiente β :
$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 0,325 (1 + p)}{(kl)^2}}$$

Comparamos el valor del coeficiente β que hemos hallado con el valor que da la *Norma* y obtenemos un resultado bastante diferente y además nuestro caso, como pasaba en el caso del doble pórtico, no va por el lado de la seguridad:

$$\begin{aligned} kl &= 1,5385 \\ \beta &= 2,8689 \\ \beta_{103} &= 2,0302 \end{aligned}$$

COEFICIENTE β PARA PILARES DE ESTRUCTURAS DE VARIOS PISOS SIN RECUADROS ARRIOSTRADOS.

Hemos visto que los pórticos simples se pueden resolver fácilmente haciendo uso de las ecuaciones diferenciales. Para pórticos más complicados, como son las estructuras de edificación, es necesario recurrir a métodos matriciales que exigen conocer las *rigideces* de las barras y sus *coeficientes de transmisión*.

Por efecto de una compresión tanto la *rigidez* como el *coeficiente de transmisión* pueden verse afectados, convirtiéndose en funciones de esta misma compresión.

Para estudiar la *rigidez* y el *factor de transmisión* consideraremos la barra de la figura 5, que está empotrada en el extremo A, articulada en el extremo B y sometida a una compresión P. Se le aplica en el extremo articulado un momento M por efecto del cual, el nudo B gira un ángulo θ_B y en el empotramiento A aparece un momento inducido m.

Figura 5

Llamamos **rigidez del nudo B** al momento necesario para producir un giro de un radián en el extremo B (suponiendo que no se rebase el límite de proporcionalidad del material y que las deformaciones pudiesen seguir considerándose pequeñas). Su valor será:

$$K = \frac{M}{\theta_B}$$

Llamamos **factor de transmisión del nudo B al A** a la relación entre el momento reacción m que aparece en el extremo empotrado A y el momento M aplicado en el extremo B,

$$r = \frac{m}{M}$$

Se demuestra que:

$$m = M \frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl}$$

;

$$r = \frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl}$$

;

$$k = S \frac{EI}{l}$$

donde $k^2 = \frac{P}{EI}$ y $S = \frac{\frac{kl}{2}(1 - kl \cot kl)}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}}$

Cuando la viga no está comprimida, $P = 0$, o lo que es lo mismo $kl = 0$, el valor límite de r y de S es: $r = 0,5$ y $S = 4$

En el estudio de la estabilidad de las estructuras de varios pisos con desplazamiento lateral no coartado, la fuerza cortante en los extremos de un pilar debe ser cero en la posición de equilibrio.

Consideramos la viga de la figura 6:

Figura 6

Resolviendo por la estática tenemos las siguientes ecuaciones:

$$M_A = \left[\left[S - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_A + \left[Sr - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_B \right] R$$

$$M_B = \left[\left[Sr - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_A + \left[S - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_B \right] R$$

donde S y r están definidas en el apartado anterior y m y R son:

$$m = \frac{\Delta (\theta_A + \theta_B)}{l} \quad R = \frac{EI}{l}$$

Para estudiar los casos que presenta la tabla 3.4 de la MV-103 (*coeficiente β para pilares de estructuras sin recuadros arriostrados*) nos fijaremos en la estructura de la figura 7. Consideramos que se alcanza la carga crítica de una estructura cuando se alcanza la de uno de sus miembros. En dicha figura, los elementos comprimidos son los pilares. Conociendo la de cada pilar, la mínima nos dará la carga crítica de la estructura.

Para estudiar la estructura de la figura 7 se determina la carga crítica del pilar AB , asumiendo las siguientes simplificaciones:

1. Sólo se considera la influencia de las vigas que concurren en los extremos A y B del pilar.
2. Se acepta que los nudos E y F estén fijos y empotrados.
3. Se acepta que los nudos C y D estén empotrados, pero que puedan desplazarse libremente, lo que indica que el cortante en el nudo A del pilar debe ser cero.

Como en el caso de una estructura con recuadros arriostrados, llamaremos:

$$R_P = \frac{EI_P}{l} \quad ; \quad R_{AC} = \frac{EI_{AC}}{l_{AC}} \quad ; \quad R_{AD} = \frac{EI_{AD}}{l_{AD}} \quad ; \quad R_{BE} = \frac{EI_{BE}}{l_{BE}} \quad ; \quad R_{BF} = \frac{EI_{BF}}{l_{BF}}$$

donde todos los parámetros son valores conocidos.

Bajo la acción de una carga de compresión P aplicada en los nudos A y B , aparecerán unos giros θ_A y θ_B creando la deformada de la figura 8.

Figura 7

Figura 8

Para valores de $P > P_{cr}$ aparecerán en los nudos A y B unos momentos M_A y M_B en equilibrio con la deformada. Como los extremos C y D pueden desplazarse, tenemos un equilibrio con cortante nulo, por lo que las ecuaciones de equilibrio de la barra AB son:

$$\left. \begin{aligned} M_A &= (4R_{AC} + 4R_{AD}) \theta_A + \left[\left[S - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_A + \left[Sr - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_B \right] R_P \\ M_B &= (4R_{BE} + 4R_{BF}) \theta_B + \left[\left[Sr - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_A + \left[S - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_B \right] R_P \end{aligned} \right\}$$

donde: $(4R_{AC} + 4R_{AD}) \theta_A$ es el momento absorbido por las barras AC y AD .

$\left[\left[S - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_A + \left[Sr - S(r+1) \frac{m}{2} \right] \theta_B \right] R_P$ es el momento absorbido por la barra AB .

Para $P = P_{cr}$ el pilar AB permanece en equilibrio, por lo que los momentos M_A y M_B serán cero. Para que exista equilibrio indiferente con $\theta_A \neq 0$ y $\theta_B \neq 0$ el determinante de las ecuaciones de los momentos ha de ser cero. Resolviendo el determinante encontramos la ecuación trascendente siguiente:

$$\left[\frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} - \frac{\left[\frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} \left(\frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl} + 1 \right) \right]^2}{2 \frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} \left(\frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl} + 1 \right) - (kl)^2} + \frac{4}{R_A} - 4 \right] \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} - \frac{\left[\frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} \left(\frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl} + 1 \right) \right]^2}{2 \frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} \left(\frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl} + 1 \right) - (kl)^2} + \frac{4}{R_B} - 4 \right] -$$

$$- \left[\frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} \frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl} - \frac{\left[\frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} \left(\frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl} + 1 \right) \right]^2}{2 \frac{\frac{kl}{2} [1 - kl \cot kl]}{\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2}} \left(\frac{kl - \operatorname{sen} kl}{\operatorname{sen} kl - kl \cos kl} + 1 \right) - (kl)^2} \right]^2 = 0$$

Una vez obtenido el valor mínimo de kl , podemos obtener el valor de P_{cr} y, por lo tanto, del coeficiente β ; $\beta = \frac{\pi}{kl}$

La Norma *MV-103* nos da una ecuación aproximada del coeficiente β en función del **grado de empotramiento** k del pilar,

$$k = \frac{\frac{I_V}{l_V} + \frac{I_W}{l_W}}{\frac{I}{l} + \frac{I_P}{l_P} + \frac{I_V}{l_V} + \frac{I_W}{l_W}}$$

En nuestro caso tenemos:

$$k_A = \frac{\frac{I_{AC}}{l_{AC}} + \frac{I_{AD}}{l_{AD}}}{\frac{I_{AB}}{l_{AB}} + \frac{I_{AA'}}{l_{AA'}} + \frac{I_{AC}}{l_{AC}} + \frac{I_{AD}}{l_{AD}}}$$

$$k_B = \frac{\frac{I_{BE}}{l_{BE}} + \frac{I_{BF}}{l_{BF}}}{\frac{I_{AB}}{l_{AB}} + \frac{I_{BB'}}{l_{BB'}} + \frac{I_{BE}}{l_{BE}} + \frac{I_{BF}}{l_{BF}}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1,6 + 2,4 (k_A + k_B) + 1,1 k_A k_B}{(k_A + k_B) + 5,5 k_A k_B}}$$

A continuación se han representado, en unas gráficas, la variación del coeficiente β según los momentos de inercia y las longitudes de las distintas barras de la estructura. Se ha representado el coeficiente β según la expresión dada por la Norma *MV-103* y el coeficiente β , calculado según la ecuación:

$$\beta = \frac{\pi}{kl}$$

TABLA I.

k_A	0.0									
k_B	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
kl	-	0,6211	0,8603	1,0298	1,1603	1,2645	1,3495	1,4198	1,4786	1,5283
β	-	5,0580	3,6515	3,0505	2,7074	2,4842	2,3278	2,2126	2,1246	2,0555
β_{103}	-	4,2895	3,2249	2,7808	2,5298	2,3664	2,2509	2,1646	2,0976	2,0439

Gráfica I ($k_A = 0$)

TABLA II.

k_A	0,5									
k_B	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
kl	1,2646	1,5000	1,7004	1,8737	2,0239	2,1537	2,2652	2,3606	2,4420	2,5113
β	2,4842	2,0943	1,8475	1,6766	1,5522	1,4586	1,3868	1,3307	1,2864	1,2509
β_{103}	2,3664	1,8807	1,6468	1,5059	1,4106	1,3416	1,2891	1,2477	1,2142	1,1865

Gráfica II ($k_a = 0,5$)

En la gráfica I hemos dado un valor fijo a k_A ($k_A = 0$) y hemos variado el valor de k_B . En las gráficas II y III, $k_A = 0,5$ y $k_A = 0,9$, respectivamente. Se puede comprobar que:

$$k_A = 1 - R_A ; \quad k_B = 1 - R_B$$

CONCLUSIONES

Los errores de la tabla 3.2, caso 1, son sencillos de solventar, al ser el valor de los momentos de los pilares:

$$\left(\frac{P + P_1}{2} \right) \frac{\delta}{2}$$

TABLA III.

k_A	0,9									
k_B	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
kl	1,5283	1,7680	1,9822	2,1773	2,3532	2,5113	2,6519	2,7756	2,8234	2,9766
β	2,0555	1,7769	1,5843	1,4428	1,3349	1,2509	1,1846	1,1318	1,0895	1,0554
β_{103}	2,0439	1,6558	1,4572	1,3338	1,2489	1,1865	1,1385	1,1004	1,0693	1,0435

Gráfica III ($k_a = 0,9$)

independiente de las longitudes de las barras, contando siempre con la simetría de medidas y perfiles.

El caso 2, contando con las mismas simetrías, no es independiente de las longitudes. Por lo que la solución de la corrección es bastante más complicada. Nosotros sólo hemos constatado el hecho.

En cuanto a las tablas 3.3 y 3.4 de la *MV-103*, los resultados nos parecen buenos dentro de los coeficientes de seguridad que se usan en el cálculo y la influencia del coeficiente de pandeo en el resultado final.

* * *